**I – Kiến thức cần nhớ**

— Phương trình tiếp tuyến của $(C): y = f(x)$ **tại** điểm $M(x_o; y_o)$ có dạng:

$\Delta: \boxed{y = k(x - x_o) + y_o}$ Với $k = y'(x_o)$ là hệ số góc tiếp tuyến.

① ② ③

¾ ¾ ® ***Để viết phương trình tiếp tuyến*** $\Delta$, ***ta cần tìm ba thành phần*** $x_o$, $y_o$, $k$

— Điều kiện cần và đủ để hai đường $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$ ***tiếp xúc nhau*** $\Leftrightarrow$ hệ $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm ***(nhớ: "hàm = hàm, đạo = đạo")***

**II – Các dạng toán viết phương trình tiếp tuyến thường gặp**

① **Viết PTTT** $\Delta$ **của** $(C): y = f(x)$, **biết** $\Delta$ **có hệ số góc k cho trước**

— Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm. Tính $y' \Rightarrow y'(x_o)$.

— Do phương trình tiếp tuyến $\Delta$ có hệ số góc k $\Rightarrow y'(x_o) = k$ $(i)$

— Giải $(i)$ tìm được $x_o \longrightarrow y_o = f(x_o) \longrightarrow \Delta: y = k(x - x_o) + y_o$.

**Lưu ý**. Hệ số góc $k = y'(x_o)$ của tiếp tuyến $\Delta$ thường cho gián tiếp như sau:

— Phương trình tiếp tuyến $\Delta \,//\, d: y = ax + b \Rightarrow k = a$.

— Phương trình tiếp tuyến $\Delta \perp d: y = ax + b \Rightarrow k = -\dfrac{1}{a}$.

— Phương trình tiếp tuyến $\Delta$ tạo với trục hoành góc $\alpha \Rightarrow |k| = \tan\alpha$.

— Phương trình tiếp tuyến $\Delta$ tạo với $d: y = ax + b$ góc $\alpha \Rightarrow \left|\dfrac{k - a}{1 + k.a}\right| = \tan\alpha$

② **Viết PTTT** $\Delta$ **của** $(C): y = f(x)$, **biết** $\Delta$ **đi qua (kẻ từ) điểm** $A(x_A; y_A)$

— Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm. Tính $y_o = f(x_o)$ và $k = y'(x_o)$ theo $x_o$.

— Phương trình tiếp tuyến $\Delta$ tại $M(x_o; y_o)$ là $\Delta: y = k(x - x_o) + y_o$.

— Do $A(x_A; y_A) \in \Delta \Rightarrow y_A = k(x_A - x_o) + y_o$ $(i)$

— Giải phương trình $(i) \longrightarrow x_o \longrightarrow y_o$ và $k \longrightarrow$ phương trình $\Delta$.

③ **Viết PTTT** $\Delta$ **của** $(C): y = f(x)$, **biết** $\Delta$ **cắt hai trục tọa độ tại A và B sao cho tam giác OAB vuông cân hoặc có diện tích S cho trước**

— Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm và tính hệ số góc $k = y'(x_o)$ theo $x_o$.

— Đề cho $\left[\begin{array}{ll} \Delta OAB \text{ vuông cân} \Leftrightarrow \Delta \text{ tạo với } Ox \text{ một góc } 45^o \text{ và } O \notin \Delta & (i) \\ S_{\Delta OAB} = S \Leftrightarrow OA.OB = 2S & (ii) \end{array}\right.$

— Giải $(i)$ hoặc $(ii) \longrightarrow x_o \longrightarrow y_o; k \longrightarrow$ phương trình tiếp tuyến $\Delta$.

④ **Tìm những điểm trên đường thẳng** $d: ax + by + c = 0$ **mà từ đó vẽ được** $1, 2, 3, \ldots, n$ **tiếp tuyến với đồ thị hàm số** $(C): y = f(x)$

— Gọi $M(x_M; y_M) \in d: ax + by + c = 0$ (sao cho có một biến $x_M$ trong M)

— PTTT $\Delta$ qua M và có hệ số góc k có dạng $\Delta: y = k(x - x_M) + y_M$.

— Áp dụng điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases} f(x) = k(x - x_M) + y_M & (i) \\ f'(x) = k & (ii) \end{cases}$

— Thế k từ $(ii)$ vào $(i)$, được: $f(x) = f'(x).(x - x_M) + y_M$ $(iii)$

— Số tiếp tuyến của $(C)$ vẽ từ $M =$ số nghiệm x của $(iii)$.

⑤ **Tìm những điểm $M(x_M; y_M)$ mà từ đó vẽ được hai tiếp tuyến với đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ và hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau**

— PTTT $\Delta$ qua M và có hệ số góc k có dạng $\Delta: y = k(x - x_M) + y_M$.

— Áp dụng điều kiện tiếp xúc: $\begin{cases} f(x) = k(x - x_M) + y_M & (i) \\ f'(x) = k & (ii) \end{cases}$

— Thế k từ $(ii)$ vào $(i)$, được: $f(x) = f'(x).(x - x_M) + y_M$ $(iii)$

— Qua M vẽ được hai tiếp tuyến với $(C) \Leftrightarrow (iii)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$.

— Hai tiếp tuyến đó vuông góc nhau $\Leftrightarrow k_1.k_2 = -1 \Leftrightarrow y'(x_1).y'(x_2) = -1$.

✍ **Lưu ý**.

— Qua M vẽ được hai tiếp tuyến với $(C)$ sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía với trục hoành thì $\begin{cases} (iii): & \text{có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2. \\ f(x_1).f(x_2) < 0. \end{cases}$

— Đối với bài toán tìm điểm $M \in (C): y = f(x)$ sao cho tại đó tiếp tuyến song song hoặc vuông góc với đường thẳng d cho trước, ta chỉ cần gọi $M(x_o; y_o)$ và $\Delta$ là tiếp tuyến với $k = f'(x_o)$. Rồi áp dụng $k = f'(x_o) = k_d$ nếu cho song song và $f'(x_o).k_d = -1$ nếu cho vuông góc $\Rightarrow x_o \Rightarrow y_o \Rightarrow M(x_o; y_o)$.

## BÀI TẬP TỔNG HỢP

Cho đường cong $(C): y = f(x) = x^3 - 3x^2$. Viết phương trình tiếp tuyến của $(C)$ trong các trường hợp sau:
a) Tại điểm $M_0(1; -2)$.
b) Tại điểm thuộc $(C)$ và có hoành độ $x_0 = -1$.
c) Tại giao điểm của $(C)$ với trục hoành.
d) Biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(-1; -4)$.

**LỜI GIẢI**

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x$

a). Ta có $f'(x_0) = f'(1) = -3$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(1; -2)$: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

$\Leftrightarrow y = -3(x - 1) - 3 \Leftrightarrow y = -3x$

b). Ta có $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -4, f'(x_0) = 9$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm $N(-1; -4)$ là $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

$y=9(x+1)-4\Leftrightarrow y=9x+5$.

c). Phương trình hoành độ giao điểm của $(C)$ với trục hoành: $x^3-3x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$

Với $x_0=0\Rightarrow y_0=0, f'(x_0)=f'(0)=0$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm $(0;0)$ là $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0\ \Leftrightarrow y=0$

Với $x_0=3\Rightarrow y_0=0, f'(x_0)=f'(3)=9$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm $(3;0)$ là $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$\Leftrightarrow y=9(x-3)\Leftrightarrow y=9x-27$.

d). Gọi $(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của phương trình tiếp tuyến d đi qua điểm A

Vì điểm $(x_0;y_0)\in(C)\Rightarrow y_0=x_0^3-3x_0^2$, và $f'(x_0)=3x_0^2-6x_0$

Phương trình d: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0\ \Leftrightarrow y=(3x_0^2-6x_0)(x-x_0)+x_0^3-3x_0^2$

Vì $A(-1;-4)\in d$ nên: $(3x_0^2-6x_0)(-1-x_0)+x_0^3-3x_0^2=-4$

$\Leftrightarrow 2x_0^3-6x_0-4=0\Leftrightarrow x_0=2\vee x_0=-1$

Với $x_0=2\Rightarrow y_0=-4, f'(2)=0$, phương trình tiếp tuyến $y=-4$

Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=-4, f'(-1)=9$, phương trình tiếp tuyến $y=9(x+1)-4\Leftrightarrow y=9x+5$

Cho đường cong $(C): y=\dfrac{3x+1}{1-x}$.

a). Viết phương trình tiếp tuyến của $(C)$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d): x-4y-21=0$.

b). Viết phương trình tiếp tuyến của $(C)$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(\Delta): 2x+2y-9=0$.

c). Viết phương trình tiếp tuyến của $(C)$ biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng :

$(d): x-2y+5=0$ một góc $30^0$.

Tập xác định $D=R\setminus\{1\}$. Ta có $y'=f'(x)=\dfrac{4}{(1-x)^2}$

a). Có $(d): x-4y-21=0\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{21}{4}\Rightarrow k_d=\dfrac{1}{4}$

Vì tiếp tuyến song song với d nên $k_{tt}=k_d=\dfrac{1}{4}$.

Gọi $M(x_0,y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến, ta có $f'(x_0)=k_{tt}\ \Leftrightarrow\dfrac{4}{(1-x_0)^2}=\dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow(x_0-1)^2=16\Leftrightarrow x_0=5\vee x_0=-3$

Với $x_0=5\Rightarrow y_0=-4$, phương trình tiếp tuyến tại điểm này là: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{4}(x-5)-4\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{21}{4}$ (loại, vì trùng với d).

Với $x_0=-3\Rightarrow y=-2$, phương trình tiếp tuyến tại điểm này là: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{4}(x+3)-2\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{5}{4}$.

b). $(\Delta): 2x+2y-9=0 \Leftrightarrow y=-x+\frac{9}{2} \Rightarrow k_{\Delta}=-1$

Vì tiếp tuyến vuông góc với $\Delta$ nên, $k_{tt}.k_{\Delta}=-1 \Rightarrow k_{tt}=1$

Gọi $N(x_0,y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến, ta có $f'(x_0)=k_{tt} \Leftrightarrow \frac{4}{(1-x_0)^2}=1$

$\Leftrightarrow (x_0-1)^2=4 \Leftrightarrow x_0=3 \vee x_0=-1$.

Với $x_0=3 \Rightarrow y=-5$, phương trình tiếp tuyến tại điểm này là: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$\Leftrightarrow y=-1(x-3)-5 \Leftrightarrow y=-x-2$

Với $x_0=-1 \Rightarrow y=-1$, phương trình tiếp tuyến tại điểm này là: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$\Leftrightarrow y=-1(x+1)-1 \Leftrightarrow y=-x-2$.

c). $(d): x-2y+5=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \Rightarrow k_d=\frac{1}{2}$

Ta có tiếp tuyến hợp với d một góc $30^0$, nên có $\left|\frac{k_{tt}-k_d}{1+k_{tt}k_d}\right|=\tan 30^0$

$$\left|\frac{k_{tt}-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}k_{tt}}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3\left(k_{tt}-\frac{1}{2}\right)^2=\left(1+\frac{1}{2}k_{tt}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{11}{4}k_{tt}^2-4k_{tt}-\frac{1}{4}=0$$

Cho hàm số $y=f(x)=\frac{x^2-x+2}{x-1}$ (C)

a). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M(2; 4).

b). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc $k=1$.

LỜI GIẢI

Ta có: $f'(x)=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

a). Ta có $x_0=2 \Rightarrow f'(x_0)=f'(2)=-1$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M(2; 4) là $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$\Leftrightarrow y=-1(x-2)+4 \Leftrightarrow y=-x+6$

b). Gọi $x_0$ là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị, ta có $f'(x_0)=1$

$\Leftrightarrow \frac{x_0{}^2-2x_0-1}{(x_0-1)^2}=1 \Leftrightarrow -1=1$ (vô lý).

Kết luận không có tiếp tuyến nào có hệ số góc bằng 1.

Cho hàm số (C): $y=\sqrt{1-x-x^2}$ . Tìm phương trình tiếp tuyến với (C):

a) Tại điểm có hoành độ $x_0=\frac{1}{2}$.

b) Song song với đường thẳng (d): x + 2y = 0.

**LỜI GIẢI**

Tập xác định $D=\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$. Ta có $f'(x)=\frac{-1-2x}{2\sqrt{1-x-x^2}}$

a). Với $x_0=\frac{1}{2}\Rightarrow y_0=\sqrt{1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}, f'(x_0)=f'\left(\frac{1}{2}\right)=-2$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ là $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$y=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\Leftrightarrow y=-2x+\frac{3}{2}$.

b). Ta có $(d):x+2y=0\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x\Rightarrow k_d=-\frac{1}{2}$

Vì tiếp tuyến song song với d nên, $k_{tt}=k_d=-\frac{1}{2}$. Gọi $x_0$ là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị,

ta có $f'(x_0)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{-1-2x_0}{2\sqrt{1-x_0-x_0^2}}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1+2x_0=\sqrt{1-x_0-x_0^2}\Leftrightarrow\begin{cases}1+2x_0\ge 0\\ x_0=0\vee x_0=-1\end{cases}$

So với điều kiện $x_0=0$ (nhận), $x_0=-1$ (loại)

Với $x_0=0\Rightarrow y_0=1$, phương trình tiếp tuyến tại điểm $(0;1)$ là: $y=-\frac{1}{2}(x-0)+1\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+1$.

| |
|---|
| Cho hàm số $y=x^3+3x^2-9x+5\ (C)$. Trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị $(C)$, hãy tìm tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất. |

**LỜI GIẢI**

Ta có $y'=f'(x)=3x^2+6x-9$

Gọi $x_0$ là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến, vậy $f'(x_0)=3x_0^2+6x_0-9$

Ta có $3x_0^2+6x_0-9=3(x_0^2+2x_0+1)-12=3(x_0+1)^2-12\ge -12, \forall x_0\in(C)$

Vậy $\min f'(x_0)=-12$ tại $x_0=-1\Rightarrow y_0=16$

Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm: $y=-12(x+1)+16\Leftrightarrow y=-12x+4$

| |
|---|
| Cho hàm số $y=\frac{x+2}{2x+3}\ (1)$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O. (Khối A – 2009). |

LỜI GIẢI

Tập xác định $D=R\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$. Ta có $y'=f'(x)=\frac{-1}{(2x+3)^2}$

Vì tiếp tuyến (d) cắt hai trục Ox, Oy lần lượt tại A, B tạo thành tam giác OAB vuông cân, nên đường thẳng (d) hợp với trục Ox một góc $45^0$.

Vậy có $k_{tt}=\pm\tan 45^0\Leftrightarrow k_{tt}=\pm 1$

Gọi $x_0$ là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến, ta có $f'(x_0)=\pm 1$

Với $f'(x_0)=1\Leftrightarrow\frac{-1}{(2x_0+3)^2}=1$ (phương trình vô nghiệm).

Với $f'(x_0)=-1\Leftrightarrow\frac{-1}{(2x_0+3)^2}=-1\Leftrightarrow(2x_0+3)^2=1\Leftrightarrow x_0=-1\vee x_0=-2$

Với $x_0=-1\Rightarrow y_0=1$, phương trình tiếp tuyến tại điểm này $y=-1(x+1)+1\Leftrightarrow y=-x$. Tiếp tuyến này loại vì đường thẳng này đi qua gốc tọa độ nên không tạo thành được tam giác.

Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0$, phương trình tiếp tuyến tại điểm này $y = -1(x+2) \Leftrightarrow y = -x-2$

Cho hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + (m+1)x + 1 \ \ (1)$, m là tham số thực. Tìm các giá trị của m để tiếp tuyến của đồ thị của hàm số (1) tại điểm có hoành độ $x = -1$ đi qua điểm $A(1;2)$. *(Dự bị A1 - 2008)*

**LỜI GIẢI**

Tập xác định $D = R$

$y' = f'(x) = 3x^2 + 6mx + m + 1$

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 2m - 1$, $f'(-1) = -5m + 4$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(-1;2m-1)$: $y = (-5m+4)(x+1) + 2m - 1$ (d).

Ta có $A(1;2) \in (d) \Leftrightarrow (-5m+4).2 + 2m - 1 = 2 \Leftrightarrow m = \frac{5}{8}$.

Cho hàm số $y = \frac{3x+1}{x+1} \ \ (1)$. Tính diện tích của tam giác tạo bởi các trục tọa độ và tiếp tuyến của đồ thị của hàm số (1) tại điểm $M(-2;5)$.*(Dự bị D1 - 2008)*

**LỜI GIẢI**

Tập xác định $D = R \setminus \{-1\}$. Có $y' = \frac{2}{(x+1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến (d) tại điểm $M(-2;5)$: $y = 2(x+2) + 5 \Leftrightarrow y = 2x + 9$

Gọi A là giao điểm của d và trục hoành $\Rightarrow y_A = 0 \Rightarrow x_A = -\frac{9}{2}$, vậy $A\left(-\frac{9}{2};0\right)$

Gọi B là giao điểm của d và trục tung $\Rightarrow x_B = 0 \Rightarrow y_B = 9$, vậy $B(0;9)$.

Ta có tam giác OAB vuông tại O nên $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}\left|-\frac{9}{2}\right||9| = \frac{81}{4}$

Cho hàm số $y = \sqrt{3}x^3 + 4 \ \ (C)$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C)$ biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng $(d): -x + \sqrt{3}y + 6 = 0$ góc $30^0$.

**LỜI GIẢI**

Tập xác định $D = R$. Ta có $y' = 3\sqrt{3}x^2$

$(d): \sqrt{3}y - x + 6 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{3} \Rightarrow k_d = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Vì tiếp tuyến tạo với đường thẳng d một góc $30^0$ nên thỏa $\left|\frac{k_{tt} - k_d}{1 + k_{tt}k_d}\right| = \tan 30^0$

$$\left|\frac{k_{tt} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}k_{tt}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 3\left(k_{tt} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}k_{tt}\right)^2 \Leftrightarrow k_{tt}^2 - \sqrt{3}k_{tt} = 0 \Leftrightarrow k_{tt} = 0 \vee k_{tt} = \sqrt{3}$$

Gọi $x_0$ là hoành độ tiếp điểm

Với $k_{tt} = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{3}x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 4$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm (0 ; 4): $y = 4$.

Với $k_{tt} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 3\sqrt{3}x_0^2 = \sqrt{3} \Leftrightarrow x_0^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Với $x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y_0 = \frac{13}{3}$, phương trình tiếp tuyến $y = \sqrt{3}\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{13}{3} \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x + \frac{10}{3}$.

Với $x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y_0 = \frac{11}{3}$, phương trình tiếp tuyến $y = \sqrt{3}\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{11}{3} \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x + \frac{14}{3}$.

Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 9x - 5 \ (C)$. Trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị $(C)$, hãy tìm tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất.

**LỜI GIẢI**

Tập xác định $D = R$. Ta có $y' = -3x^2 - 6x + 9$

Gọi $x_0$ là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến, ta có $f'(x_0) = -3x_0^2 - 6x_0 + 9$

$\Leftrightarrow f'(x_0) = -3(x_0^2 + 2x_0 + 1) + 12 = -3(x_0 + 1)^2 + 12 \le 12$

Từ đó suy ra $\max f'(x_0) = 12$ tại $x_0 = -1$.

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -16$, phương trình tiếp tuyến cần tìm: $y = 12(x+1) - 16 \Leftrightarrow y = 12x - 4$

Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1} \ (C)$. Gọi $I(1\,;\,2)$. Tìm điểm $M \in (C)$ sao cho tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ vuông góc với đường thẳng $IM$ ***.(Dự bị B2 - 2003)***

**LỜI GIẢI**

Tập xác định $D = R$. Ta có $y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0, y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = \frac{2x_0 - 1}{x_0 - 1}$

Ta có $\overrightarrow{IM} = \left(x_0 - 1; \frac{2x_0 - 1}{x_0 - 1} - 2\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = \left(x_0 - 1; \frac{1}{x_0 - 1}\right) \Rightarrow k_{IM} = \frac{1}{(x_0 - 1)^2}$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại M $k_{tt} = f'(x_0) = -\frac{1}{(x_0 - 1)^2}$

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng IM nên có $k_{tt}.k_{IM} = -1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{(x_0 - 1)^4} = 1 \Leftrightarrow x_0 - 1 = \pm 1 \Leftrightarrow x_0 = 0 \vee x_0 = 2$

Vậy có 2 điểm $M_1(0;1), M_2(2;3)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+1} \ (C)$. Tìm điểm $M \in (C)$, biết tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ cắt hai trục tọa độ tại $A, B$ và tam giác $OAB$ có diện tích bằng $\frac{1}{4}$ ***.(Khối D - 2007)***

**LỜI GIẢI**

Tập xác định $D = R\setminus\{-1\}$. Ta có $y' = \frac{2}{(x+1)^2}$

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = \frac{2x_0}{x_0 + 1}$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

$\Leftrightarrow y=\frac{2}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0}{x_0+1}\Leftrightarrow y=\frac{2}{(x_0+1)^2}x+\frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}$ $(d)$

Gọi A là giao điểm của d và trục Ox, có $y_A=0\Rightarrow x=-x_0^2$. Vậy $A\left(-x_0^2;0\right)$

Gọi B là giao điểm của d và trục Oy, có $x_B=0\Rightarrow y_B=\frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}$. Vậy $B\left(0;\frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}\right)$

Ta có tam giác OAB cân tại O, theo giả thiết ta có: $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow\left|-x_0^2\right|.\left|\frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}\right|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 4x_0^2=(x_0+1)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x_0^2=x_0+1\\2x_0^2=-x_0-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x_0^2-x_0-1=0\\2x_0^2+x_0+1=0\end{array}\right.$

Với $2x_0^2+x_0+1=0$ phương trình vô nghiệm.

Với $2x_0^2-x_0-1=0\Leftrightarrow x_0=1\vee x_0=-\frac{1}{2}$

Với $x_0=1$ ta có $M(1;1)$. Với $x_0=-\frac{1}{2}$ ta có $M\left(-\frac{1}{2};-2\right)$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán là $M(1;1)$, $M\left(-\frac{1}{2};-2\right)$

(*) Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$ $(C)$. Qua điểm $A\left(\frac{4}{9};\frac{4}{3}\right)$ có thể kẻ được mấy tiếp tuyến đến đồ thị $(C)$. Viết phương trình các tiếp tuyến ấy .

LỜI GIẢI

Cho hai hàm số $y=\frac{1}{x\sqrt{2}}$ và $y=\frac{x^2}{\sqrt{2}}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị của các hàm số đã cho tại giao điểm của chúng. Tìm góc giữa hai tiếp tuyến trên.

LỜI GIẢI

**Cho hàm số :** $y=\frac{3x+1}{1-x}$ $(C)$ .

a) Viết phương trình tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm $M(-1\,;-1)$ ;

b) Vết phương trình tiếp tuyến của $(C)$ tại giao điểm của $(C)$ với trục hoành;

c) Viết phương trình tiếp tuyến của $(C)$ tại giao điểm của $(C)$ với trục tung ;

d) Viết phương trình tiếp tuyến của $(C)$ bết tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d):4x-y+1=0$ ;

e) Viết phương trình tiếp tuyến của $(C)$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(\Delta):4x+y-8=0$ .

LỜI GIẢI

Tìm các điểm trên đồ thị $(C):y=\frac{1}{3}x^3-x+\frac{2}{3}$ mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$.

**LỜI GIẢI**

Tập xác định $D = ¡$ . Ta có $y' = x^2 - 1$

Gọi $M\left(x_0; \frac{1}{3}x_0^3 - x_0 + \frac{2}{3}\right)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến d với đồ thị (C), sao cho d vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

Phương trình tiếp tuyến d là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = (x_0^2 - 1)(x - x_0) + \frac{1}{3}x_0^3 - x_0 + \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow y = (x_0^2 - 1)x - \frac{2}{3}x_0^3 + \frac{2}{3}$.

(d) vuông góc với ( $\Delta$ ) khi và chỉ khi $(x_0^2 - 1)\left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$

Kết luận có hai tọa độ điểm M cần tìm là $M\left(2; \frac{4}{3}\right)$ và $M(-2; 0)$.

| |
|---|
| Cho đồ thị $(C_m): y = \frac{(3m+1)x - m}{x + m}$ .Tìm m để tiếp tuyến tại giao điểm của $(C_m)$ với Ox song song với đường thẳng d: $y = -x - 5$. |

**LỜI GIẢI**

Tập xác định $D = ¡ \setminus \{-m\}$. Ta có $y' = \frac{3m^2 + 2m}{(x+m)^2}$.

Tọa độ giao điểm của $(C_m)$ và trục Ox là $A\left(\frac{m}{3m+1}; 0\right)$. Phương trình tiếp tuyến $\Delta$ của $(C_m)$ tại điểm A là: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = \frac{(3m+1)^2}{3m^2 + 2m}\left(x - \frac{m}{3m+1}\right) \Leftrightarrow y = \frac{(3m+1)^2}{3m^2 + 2m}x - \frac{m(3m+1)}{3m^2 + 2m}$.

Để $\Delta$ song song với d: $y = -x - 5$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \frac{(3m+1)^2}{3m^2 + 2m} = -1 \\ \frac{m(3m+1)}{3m^2 + 2m} \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12m^2 + 8m + 1 = 0 \\ 12m^2 + 9m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{6} \vee m = -\frac{1}{2}.$$

Kết luận $m = -\frac{1}{6} \vee m = -\frac{1}{2}$ thỏa yêu cầu.

| |
|---|
| Cho hàm số (C): $y = \frac{x+2}{x-2}$. Viết phương trình tiếp tuyến đi qua $A(-6; 5)$ của đồ thị (C). |

**LỜI GIẢI**

Tập xác định $D = ¡ \setminus \{2\}$. Ta có $y' = \frac{-4}{(x-2)^2}$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến (d) cần tìm với đồ thị hàm số (C) nên $y_0 = \frac{x_0 + 2}{x_0 - 2}$ và $f'(x_0) = \frac{-4}{(x_0 - 2)^2}$. Phương trình tiếp tuyến (d):

$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = \frac{-4}{(x_0 - 2)^2}(x - x_0) + \frac{x_0 + 2}{x_0 - 2}$

Ta có $A(-6;5)\in d \Leftrightarrow \dfrac{-4}{(x_0-2)^2}(-6-x_0)+\dfrac{x_0+2}{x_0-2}=5 \Leftrightarrow 4x_0^2-24x_0=0 \Leftrightarrow x_0=0 \vee x_0=6$.

Kết luận có hai tiếp tuyến cần tìm là $y=-x-1$ và $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{7}{2}$.

Gọi ($C_m$) là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{m}{2}x^2+\dfrac{1}{3}$ $(*)$ (m là tham số).
Gọi M là điểm thuộc ($C_m$) có hoành độ bằng $-1$. Tìm m để tiếp tuyến của ($C_m$) tại điểm M song song với đường thẳng $5x-y=0$.

LỜI GIẢI

Tập xác định $D=¡$. Ta có $y'=x^2-mx$

Điểm thuộc $(C_m)$ có hoành độ $x=-1$ là $M\left(-1;-\dfrac{m}{2}\right)$

Phương trình tiếp tuyến của $(C_m)$ tại M là:

$(\Delta): y=f'(1)(x+1)-\dfrac{m}{2} \Leftrightarrow y=(m+1)x+\dfrac{m+2}{2}$

Để $\Delta$ song song với d: $5x-y=0 \Leftrightarrow y=5x$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} m+1=5 \\ m+2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=4$.

Kết luận $m=4$.

Cho hàm số $y=4x^3-6x^2+1$ $(1)$. Viết phương trình tiếp tuyến của (1), biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1;-9)$.

**LỜI GIẢI**

Tập xác định $D=¡$. Có $y'=12x^2-12x$.

Gọi $A(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến (d) cần tìm với đồ thị hàm số (1) nên $y_0=4x_0^3-6x_0^2+1$ và $f'(x_0)=12x_0^2-12x_0$. Phương trình tiếp tuyến (d):

$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0 \Leftrightarrow y=(12x_0^2-12x_0)(x-x_0)+4x_0^3-6x_0^2+1$

Ta có $M(-1;-9)\in d \Leftrightarrow (12x_0^2-12x_0)(-1-x_0)+4x_0^3-6x_0^2+1=-9$

$\Leftrightarrow -8x_0^3-6x_0^2+12x_0+10=0 \Leftrightarrow x_0=-1 \vee x_0=\dfrac{5}{4}$

Kết luận có hai tiếp tuyến cần tìm là $y=24x+15$ và $y=\dfrac{15}{4}x-\dfrac{21}{4}$.

Cho đồ thị (C): $y=\dfrac{1}{4}x^4-2x^2-\dfrac{9}{4}$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với Ox.

**LỜI GIẢI**

Tập xác định $D=¡$. Ta có $y'=x^3-4x$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox: $\dfrac{1}{4}x^4-2x^2-\dfrac{9}{4}=0 \Leftrightarrow x^2=9 \vee x^2=-1$ (loại). Với

$x^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \Rightarrow y=0 \\ x=-3 \Rightarrow y=0 \end{array}\right.$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(3;0)$ của (C): $y=f'(3)(x-3) \Leftrightarrow y=15x-45$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M(-3;0)$ của (C): $y=f'(-3)(x-3) \Leftrightarrow y=-15x+45$.

Tìm $A, B \in (C): y = \dfrac{2x}{x-1}$ sao cho tiếp tuyến của $(C)$ tại $A, B$ song song với nhau và $\Delta OAB$ vuông tại O ?

**LỜI GIẢI**

- Gọi $A\left(a;\dfrac{2a}{a-1}\right), B\left(b;\dfrac{2b}{b-1}\right) \in (C), (a;b \neq 1; a \neq b)$. Ta có: $y' = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$.
- Tiếp tuyến tại A và B lần lượt có hệ số góc: $k_A = \dfrac{-2}{(a-1)^2}; k_B = \dfrac{-2}{(b-1)^2}$.
- Do tiếp tuyến tại A và B song song nhau nên $k_A = k_B \Leftrightarrow \dfrac{-2}{(a-1)^2} = \dfrac{-2}{(b-1)^2}$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 = (b-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-1 = b-1 \\ a-1 = 1-b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = 2-b \end{array}\right. \Leftrightarrow a = 2-b \qquad (i)$$

- Do ba điểm $O, A, B$ tạo thành tam giác vuông tại O nên $\begin{cases} O \neq A \neq B \\ \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a, b \neq 0 \\ \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \neq 0 \\ ab + \dfrac{4ab}{(a-1)(b-1)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 + \dfrac{4}{(a-1)(b-1)} = 0 \quad (ii)$$

$$(i),(ii) \Rightarrow \begin{cases} a = 2-b \\ 1 + \dfrac{4}{(a-1)(b-1)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 = -\dfrac{4}{(1-b)(b-1)} \Leftrightarrow (b-1)^2 = 4$$

$\Leftrightarrow b = 3 \Rightarrow a = -1 \vee b = -1 \Rightarrow a = 3$.

- Vậy $A(-1;1), B(3;3)$ hoặc $A(-3;3), B(-1;1)$ là các điểm cần tìm.

Tìm những điểm $M \in (C): y = \dfrac{x-1}{2x+2}$ sao cho tiếp tuyến với $(C)$ tại M tạo với hai trục tọa độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $d: 4x + y = 0$ ?

LỜI GIẢI

- Gọi $M\left(x_o;\dfrac{x_o-1}{2x_o+2}\right) \in (C), (x_o \neq -1)$ và tiếp tuyến $\Delta$ tại điểm M có phương trình

$$\Delta: y = \frac{1}{(x_o+1)^2}(x-x_o) + \frac{x_o-1}{2(x_o+1)} \qquad (i)$$

- Gọi $A = \Delta \cap Ox \Rightarrow A\left(\dfrac{-x_o^2+2x_o+1}{2};0\right), B = \Delta \cap Oy \Rightarrow B\left(0;\dfrac{x_o^2-2x_o-1}{2(x_o+1)^2}\right)$.
- Khi đó tọa độ trọng tâm của $\Delta OAB$ là $G\left(-\dfrac{x_o^2-2x_o-1}{6};\dfrac{x_o^2-2x_o-1}{6(x_o+1)^2}\right)$.
- Do $G \in d: 4x + y = 0 \Leftrightarrow -4\dfrac{x_o^2-2x_o-1}{6} + \dfrac{x_o^2-2x_o-1}{6(x_o+1)^2} = 0$

$\Leftrightarrow (x_o+1)^2 = 4 \quad (do: A \neq B \neq O \Rightarrow x_o^2 - 2x_o - 1 \neq 0)$

$\Leftrightarrow x_o = -\frac{1}{2} \vee x_o = -\frac{3}{2}$ nên $(i) \Rightarrow M_1\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ hoặc $M_2\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Tìm $A \in (C): y = x^3 - 3x + 1$ biết rằng tiếp tuyến của đồ thị $(C)$ tại điểm $A$, cắt đồ thị $(C)$ tại B (khác điểm A) thỏa: $x_A + x_B = 1$ ?

**LỜI GIẢI**

- Gọi $A(x_A; x_A^3 - 3x_A + 1) \in (C)$ và phương trình tiếp tuyến tại điểm A có dạng

$\Delta: y = (3x_A^2 - 3)(x - x_A) + x_A^3 - 3x_A + 1$.

- Ta có $\Delta \cap (C) = B$ có hoành độ nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm:

$(3x_A^2 - 3)(x_B - x_A) + x_A^3 - 3x_A + 1 = x_B^3 - 3x_B + 1 \qquad (i)$

- Theo giả thiết, ta có: $x_A + x_B = 1 \Rightarrow x_B = 1 - x_A \qquad (ii)$

$(i),(ii) \Rightarrow (3x_A^2 - 3)(1 - 2x_A) + x_A^3 - 3x_A = (1 - x_A)^3 - 3(1 - x_A)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x_A^3 + 3x_A - 1 = 0 \\ x_A \neq x_B,\ (do: A \neq B) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A = -1 \Rightarrow x_B = 2 \\ x_A = \frac{1}{2} \Rightarrow x_B = \frac{1}{2}\ (L) \end{array}\right. \Rightarrow A(-1;3).$$

Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2 \quad (C)$.Tìm điểm M thuộc (C), sao cho tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại điểm thứ hai là N và $MN = 6\sqrt{5}$.

**LỜI GIẢI**

Gọi $M(m; m^3 - 3m + 1) \in (C)$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là

$y = (3m^2 - 3)(x - m) + m^2 - 3m + 2 \ (d)$. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$x^3 - 3x + 2 = (3m^2 - 3)(x - m) + m^2 - 3m + 2 \Leftrightarrow (x - m)^2(x + 2m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = -2m \end{array}\right.$, để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq -2m \Leftrightarrow m \neq 0$, khi đó $N(-2m; -8m^3 + 6m + 2)$.

Có $MN^2 = 81m^6 - 2.81m^4 + 90m^2 = 180$. Đặt $t = m^2, t \geq 0 \Rightarrow 9t^3 - 18t^2 + 10t - 20 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \ m = \pm\sqrt{2}$

Vậy có hai điểm N cần tìm $N(-2\sqrt{2}; -10\sqrt{2} + 2), N(2\sqrt{2}; 10\sqrt{2} + 2)$

Chứng minh rằng với mọi m thì đường thẳng $d: y = x + m$ luôn cắt đồ thị $(C): y = \frac{1-x}{2x-1}$ tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi $k_1, k_2$ là hệ số góc của các tiếp tuyến với $(C)$ tại A và B. Tìm m để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất ?

**LỜI GIẢI**

- Phương trình hoành độ giao điểm giữa d và $(C): \frac{1-x}{2x-1} = x + m, \forall x \neq \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow g(x) = 2x^2 + 2mx - (m+1) = 0, \forall x \neq \frac{1}{2}$

- Ta có: $\begin{cases} \Delta'_g = m^2 + m + 2 > 0 \\ g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \neq 0 \end{cases}$ : luôn đúng $\forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow d \cap (C) = \{A; B\}$.
- Gọi $A(a; a+m), B(b; b+m)$ với $a, b$ là hai nghiệm của $g(x) = 0$.
- Ta có: $T = k_1 + k_2 = y'(a) + y'(b) = -\left[\frac{1}{(2a-1)^2} + \frac{1}{(2b-1)^2}\right]$

$$\Rightarrow T = -\frac{4\left[(a+b)^2 - 2ab\right] - 4(a+b) + 2}{\left[4ab - 2(a+b) + 1\right]^2} = -4(m+1)^2 - 2 \leq -2$$

- Dấu " = " xảy ra $\Leftrightarrow m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$ thì $T_{max} = (k_1 + k_2)_{min} = -2$.

| |
|---|
| Cho hàm số $y = x^3 - (m+2)x^2 + 4m - 3 \quad (1)$<br>Tìm giá trị của tham số m để đường thẳng $y = 2x - 7$ cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt A, B, C sao cho tổng hệ số góc của các tiếp tuyến với đồ thị hàm số (1) tại các điểm A, B, C bằng 28. |

**LỜI GIẢI**

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $d: y = 2x - 7$ và đồ thị hàm số (1):

$x^3 - (m+2)x^2 + 4m - 3 = 2x - 7 \Leftrightarrow x^3 - (m+2)x^2 - 2x + 4m + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2 - mx - 2m - 2 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$. Đặt $g(x) = x^2 - mx - 2m - 2$

Đường thẳng d cắt đồ thị hàm số (1) tại ba điểm phân biệt A, B, C $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt và khác 2 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(2)} > 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 8m + 8 > 0 \\ 2 - 4m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 - 2\sqrt{2} \vee m > -4 + 2\sqrt{2} \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases}$ (3).

Gọi $A(2; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$ với $x_1, x_2$ là hai nghiệm của (2). Hệ số góc của tiếp tuyến tại các điểm A, B, C với đồ thị hàm số (1) lần lượt là:

$k_A = y'(2) = 4 - 4m, k_B = y'(x_2) = 3x_2^2 - 2(m+2)x_2, k_C = y'(x_3) = 3x_3^2 - 2(m+2)x_3$. Theo đề bài

$k_A + k_B + k_C = 28 \Leftrightarrow 4 - 4m + 3x_2^2 - 2(m+2)x_2 + 3x_3^2 - 2(m+2)x_3 = 28$

$\Leftrightarrow 4 - 4m + 3(x_2^2 + x_3^2) - 2(m+2)(x_2 + x_3) = 28 \Leftrightarrow 4 - 4m + 3\left[(x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3\right] - 2(m+2)(x_2 + x_3) = 28$

$\Leftrightarrow 4 - 4m + 3\left[m^2 - 2(-2m-2)\right] - 2(m+2)m = 28 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = -6 \vee m = 2$ Kết hợp với điều kiện (3) được m = 2.

| |
|---|
| Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2x + 2 - m^2 \quad (1)$. Định m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại ba điểm A, B, C phân biệt sao cho tổng các hệ số góc của các tiếp tuyến với đồ thị (1) tại ba điểm A, B, C lớn nhất. |

**LỜI GIẢI**

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + m^2$

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (1) với trục hoành: $x^3-3x^2+m^2x+2-m^2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x+m^2-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ g(x)=x^2-2x+m^2-2=0 \quad (*) \end{array}\right.$

Đồ thị hàm số (1) cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt và khác 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(*)}>0 \\ g(1)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-m^2>0 \\ m^2-3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$. Gọi $A(1;y_A),B(x_1;y_B),C(x_2;y_C)$ với $x_1,x_2$ là hai nghiệm của phương trình $(*)$ theo định lý Vi ét có $x_1+x_2=2$ và $x_1.x_2=m^2-2$.

Ta có $P=k_A+k_B+k_C=y'(1)+y'(x_1)+y'(x_2)$

$=-3+m^2+(3x_1^2-6x_1+m^2)+(3x_2^2-6x_2+m^2)$

$=3\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]-6(x_1+x_2)+3m^2-3=9-3m^2\le 9$

Vậy $\max P=9$ khi $m=0$.

Kết luận với $m=0$ thỏa yêu cầu bài toán.

Cho hàm số $y=-x^3+3x^2-2 \quad (1)$

Tìm tham số m để đường thẳng $d: y=m(2-x)+2$ cắt đồ thị (C) của hàm số (1) tại ba điểm phân biệt $A(2;2),B,C$ sao cho tích các hệ số góc tiếp tuyến với đồ thị $(C)$ tại B và C đạt giá trị nhỏ nhất ?

**LỜI GIẢI**

- Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^3+3x^2-2=m(2-x)+2$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-x-m-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\Rightarrow y=2 \\ g(x)=x^2-x-m-2=0 \end{array}\right.$

- Để d cắt $(C)$ tại ba điểm phân biệt $A(2;2),B,C \Leftrightarrow g(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt $\neq 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g=9+4m>0 \\ g(2)=-m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\dfrac{9}{4} \\ m\neq 0 \end{cases} \quad (i)$

- Ta có: $y'=-3x^2+6x$ và gọi $B(x_1;m(2-x_1)+2),C(x_2;m(2-x_2)+2)$ với $x_1,x_2$ là hai nghiệm của $g(x)=0$. Theo Viét: $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1x_2=-(m+2) \end{cases}$.

- Ta có: $k_1k_2=y'(x_1).y'(x_2)=(-3x_1^2+6x_1)(-3x_2^2+6x_2)$

$\Leftrightarrow k_1k_2=9(x_1x_2)^2-18x_1x_2(x_1+x_2)+36x_1x_2=9(m+2)^2-18(m+2)\Leftrightarrow k_1k_2=9(x)$

$\Leftrightarrow k_1k_2=9(m+1)^2-9\ge -9 \Rightarrow (k_1k_2)_{min}=-9$ khi $m=-1$ (thỏa $(i)$).

Cho hàm số $y=(x+2)(x-1)^2 \quad (C)$

b). Tìm các điểm M thuộc đường thẳng $d: y=-2x+19$, biết rằng tiếp tuyến của đồ thị (C) đai qua điểm M vuông góc với đường thẳng $x+9y-8=0$.

**LỜI GIẢI**

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x+9y-8=0 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{9}x+\frac{8}{9}$ $(\Delta)$ nên $k_{tt}.k_{\Delta}=-1 \Rightarrow k_{tt}=9$, gọi tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến là $I(x_0;y_0)$, từ đó ta có $y'(x_0)=k_{tt} \Leftrightarrow x_0^2-1=3 \Leftrightarrow x_0=2 \vee x_0=-2$

• Với $x_0=2 \Rightarrow y_0=4$ khi đó phương trình tiếp tuyến $d_1: y=y'(1)(x-2)+4 \Leftrightarrow d_1: y=9x-14$. Suy ra M là giao điểm của d và $d_1$ tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases} y=9x-14 \\ y=-2x+19 \end{cases} \Rightarrow M(3;13)$.

• Với $x_0=-2 \Rightarrow y_0=0$ khi đó phương trình tiếp tuyến $d_2: y=9x+18$. Suy ra M là giao điểm của d và $d_2$ tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases} y=9x+18 \\ y=-2x+19 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{11};\frac{201}{11}\right)$.

Kết luận tọa độ điểm M cần tìm là $M(3;13)$ hoặc $M\left(\frac{1}{11};\frac{201}{11}\right)$.

Cho hàm số $y=x^3-3x^2+(m-2)x+3m$ $(C_m)$ (m là tham số).
Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị $(C_m)$ của hàm số đã cho vuông góc với đường thẳng $d: x-y+2=0$.

**LỜI GIẢI**

Có $y'=3x^2-6x+m-2$

Gọi $M(x_0;y_0) \in (C_m)$, suy ra hệ số góc tiếp tuyến của $(C_m)$ tại M là

$k=y'(x_0)=3x_0^2-6x_0+m-2=3(x_0-1)^2+m-5 \geq m-5$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x_0=1$ suy ra hệ số góc của tiếp tuyến nhỏ nhất là $k_{min}=m-5$ tại điểm $M(1;4m-4)$.

Để tiếp tuyến vuông góc với d $\Leftrightarrow k_{tt}.k_d=-1 \Leftrightarrow (m-5).1=-1 \Leftrightarrow m=4$.

Kết luận với m = 4 thỏa yêu cầu đề bài.

Gọi $k_1$ là hệ số góc của tiếp tuyến tại giao điểm của đồ thị hàm số $(C_m): y=\frac{x+m}{x+1}$ với trục hoành. Gọi $k_2$ là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị $(C_m)$ tại điểm có hoành độ $x=1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho $|k_1+k_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất ?

**LỜI GIẢI**

- Ta có: $y'=\frac{1-m}{(x+1)^2}$. Hoành độ giao điểm $(C_m)$ với trục hoành: $x=-m$.
- Hệ số góc tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x=-m$ là $k_1=y'(-m)=\frac{1}{1-m}$.
- Hệ số góc tiếp tuyếnTại điểm có hoành độ $x=1$ là $k_2=y'(1)=\frac{1-m}{4}$.
- Ta có: $|k_1+k_2|=\left|\frac{1}{1-m}+\frac{1-m}{4}\right|=\left|\frac{1}{1-m}\right|+\left|\frac{1-m}{4}\right| \overset{Cauchy}{\geq} 2\sqrt{\frac{1}{1-m}.\frac{1-m}{4}}$

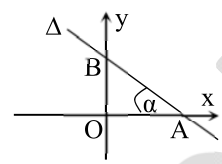
$\Leftrightarrow |k_1+k_2| \geq 1, \forall m \neq 1$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \left|\frac{1}{1-m}\right|=\left|\frac{1-m}{4}\right|$

$\Leftrightarrow (1-m)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right.$. Vậy $|k_1+k_2|_{min} = 1$ khi $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=3 \end{array}\right.$.

Viết phương trình tiếp tuyến d của $(C): y = \dfrac{2x-1}{x-1}$, biết rằng tiếp tuyến cắt trục $Ox, Oy$ lần lượt tại $A, B$ sao cho $AB = \sqrt{82}.OB$ ?

**LỜI GIẢI**

**Phân tích và tìm hướng giải**




TT $\Delta$ cắt trục $Ox, Oy$ tại $A, B \Rightarrow \Delta OAB$ vuông tại O và tạo với trục Ox một góc $\alpha$ với $|k| = \tan\alpha = \dfrac{OB}{OA}$.

Ta có: $\begin{cases} AB = \sqrt{82}.OB \\ OA^2 + OB^2 = AB^2 \end{cases} \Rightarrow 81.OB^2 = OA^2 \Leftrightarrow \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{1}{9} \Rightarrow |k| = \dfrac{1}{9}$.

<u>Bài giải</u>

- Gọi $M\left(x_o; \dfrac{2x_o-1}{x_o-1}\right)$, $(x_o \neq 1)$ là tiếp điểm $\Rightarrow k = \dfrac{-1}{(x_o-1)^2}$. Phương trình tiếp tuyến có dạng

$\Delta: y = -\dfrac{1}{(x_o-1)^2}(x-x_o) + \dfrac{2x_o-1}{x_o-1}$ $\quad$ (i)

- Ta có: $\begin{cases} AB = \sqrt{82}.OB \\ OA^2 + OB^2 = AB^2 \end{cases} \Rightarrow AB^2 = 82.OB^2 = OA^2 + OB^2 \Leftrightarrow \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{1}{9}$.
- Hệ số góc tiếp tuyến được tính $|k| = \tan\alpha = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{9} \vee k = -\dfrac{1}{9}$.
- Với $k = \dfrac{1}{9} = \dfrac{-1}{(x_o-1)^2}$ : phương trình vô nghiệm.
- Với $k = -\dfrac{1}{9} = \dfrac{-1}{(x_o-1)^2} \Leftrightarrow (x_o-1) = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_o = 4 \\ x_o = -2 \end{array}\right.$ $\quad$ (ii)

$(i),(ii) \Rightarrow \Delta: y = -\dfrac{1}{9}x + \dfrac{25}{9}$ hoặc $\Delta: y = -\dfrac{1}{9}x + \dfrac{13}{9}$ là các tiếp tuyến cần tìm.

Lập phương trình tiếp tuyến của $(C): y = x^3 - 3x^2 + 1$, biết nó song song với đường thẳng $d: 9x - y + 6 = 0$ ?

**LỜI GIẢI**

- Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$. Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến có dạng:

$\Delta: y = k(x - x_o) + y_o$. Do tiếp tuyến $\Delta \,//\, d: y = 9x + 6 \Rightarrow k = 9$

$\Leftrightarrow y'(x_o) = 9 \Leftrightarrow 3x_o^2 - 6x_o = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_o = -1 \Rightarrow y_o = -3 \\ x_o = 3 \Rightarrow y_o = 1 \end{array}\right.$.

- Với $x_o = -1$ ; $y_o = -3$; $k = 9 \Rightarrow \Delta: y = 9x + 6$ (loại do $\Delta \equiv d$ ).
- Với $x_o = 3$; $y_o = 1$; $k = 9 \Rightarrow \Delta: y = 9(x-3) + 1$ hay $\Delta: y = 9x - 26$.

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = -x^4 - x^2 + 6$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: y = \frac{1}{6}x - 1$ ?***Đại học khối D năm 2010***

**LỜI GIẢI**

- Ta có: $y' = -4x^3 - 2x$. Gọi $M(x_o; y_o)$ là tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến có dạng:

$\Delta: y = k(x - x_o) + y_o$. Do $\Delta \perp d: y = \frac{1}{6}x - 1 \Rightarrow k.\frac{1}{6} = -1$

$\Leftrightarrow k = y'(x_o) = -6 \Leftrightarrow -4x_o^3 - 2x_o = -6 \Leftrightarrow x_o = 1 \Rightarrow y_o = 4$.

- Phương trình tiếp tuyến là $\Delta: y = -6(x-1) + 4$ hay $\Delta: y = -6x + 10$.

Gọi $M \in (C): y = \frac{2x+1}{x-1}$ có tung độ bằng $5$. Tiếp tuyến của $(C)$ tại M cắt các trục tọa độ $Ox, Oy$ lần lượt tại A và B. Tính $S_{\Delta OAB}$ ?

***Cao đẳng khối A, A₁, B, D năm 2013***

**LỜI GIẢI**

**Phân tích và tìm hướng giải**

Viết PTTT $\Delta$ tại M khi biết $y_o = 5 = \frac{2x_o + 1}{x_o - 1} \Rightarrow x_o \Rightarrow k = y'(x_o)$. Tìm tọa độ $A = \Delta \cap Ox,\ B = \Delta \cap Oy$ và tính $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \ ?$

Bài giải

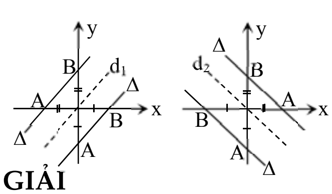
- Ta có: $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$ và $y_o = 5 = \frac{2x_o + 1}{x_o - 1} \Rightarrow x_o = 2 \Rightarrow k = y'(x_o) = -3$.
- Phương trình tiếp tuyến tại $M(2;5)$ là $\Delta: y = -3x + 11$.
- Ta có: $A = \Delta \cap Ox$ thỏa $\begin{cases} \Delta: y = -3x + 11 \\ Ox: y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{3} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{11}{3}; 0\right)$.
- Ta lại có: $B = \Delta \cap Oy$ thỏa $\begin{cases} \Delta: y = -3x + 11 \\ Oy: x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 11 \end{cases} \Rightarrow B(0;11)$.

$\Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}.\frac{11}{3}.11 = \frac{121}{6}$ (đvdt)

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = \frac{x+2}{2x+3}$, biết rằng tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt $A, B$ và tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O ?***Đại học khối A năm 2009***

**Phân tích và tìm hướng giải**

Tiếp tuyến $\Delta \cap Ox = \{A\}, \Delta \cap Oy = \{B\}$ mà $\Delta OAB$ vuông cân tại O $\Rightarrow$ $\Delta$ song song với phương trình đường thẳng phân
giác góc phần tư thứ I $(d_1: y = x)$ và thứ II $(d_2: y = -x) \Rightarrow k = \pm 1 \Rightarrow x_o \Rightarrow y_o \Rightarrow \Delta$.




**LỜI GIẢI**

- Ta có: $y' = \dfrac{-1}{(2x+3)^2}$. Gọi $M(x_o;y_o)$ là tiếp điểm và tiếp tuyến là $\Delta$.
- Theo đề $\Rightarrow \Delta \,//\, d_{1,2}: y = \pm x \Rightarrow k = y'(x_o) = \dfrac{-1}{(2x_o+3)^2} = \pm 1$

$\Leftrightarrow (2x_o+3)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_o = -1 \Rightarrow y_o = 1 \Rightarrow k = -1 \\ x_o = -2 \Rightarrow y_o = 0 \Rightarrow k = -1 \end{array}\right.$.

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta: y = -1(x+1)+1 \\ \Delta: y = -1(x+2)+0 \end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l} \Delta: y = -x \\ \Delta: y = -x-2 \end{array}\right.$ (loại do $\equiv d: y = -x$)

- Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $\Delta: y = -x-2$.

| |
|---|
| Cho hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị $(C)$. Viết phương trình tiếp tuyến $\Delta$ với đồ thị hàm số $(C)$ sao cho $\Delta$ cắt trục hoành tại A mà $OA = 6$ ? |

**Phân tích và tìm hướng giải**

Gọi $M\left(x_o;\dfrac{2x_o-3}{x_o-2}\right)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$ tt $\Delta: y = \dfrac{-1}{(x_o-2)^2}(x-x_o) + \dfrac{2x_o-3}{x_o-2}$

$\Delta \cap Ox = \{A\} \Rightarrow$ tọa độ điểm A theo $x_o \rightarrow$ giải $OA = 6 \Rightarrow x_o \Rightarrow$ tt $\Delta$.

**LỜI GIẢI**

Ta có: $y' = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$. Gọi $M\left(x_o;\dfrac{2x_o-3}{x_o-2}\right) \in (C)$, $(x_o \neq 2)$ là tiếp điểm.

- Phương trình tiếp tuyến tại M là $\Delta: y = \dfrac{-1}{(x_o-2)^2}(x-x_o) + \dfrac{2x_o-3}{x_o-2}$ (i)
- Ta có: $A = \Delta \cap Ox \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = \dfrac{-1}{(x_o-2)^2}(x-x_o) + \dfrac{2x_o-3}{x_o-2}$

$\Leftrightarrow x = 2x_o^2 - 6x_o + 6 \Rightarrow A\left(2x_o^2 - 6x_o + 6; 0\right)$.

- Theo đề $OA = 6 \Leftrightarrow \left|2x_o^2 - 6x_o + 6\right| = 0 \Rightarrow x_o = 0 \vee x_o = 3$ (ii)
- Thế (ii) vào (i) $\Rightarrow$ các tiếp tuyến cần tìm là: $\left[\begin{array}{l} \Delta: y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{2} \\ \Delta: y = -x+6 \end{array}\right.$.

| |
|---|
| Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị $(C): y = x^3 - 6x^2 + 9x$, biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng $\Delta: x+y+1 = 0$ một góc $\alpha$, sao cho $\cos\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{41}}$ và tiếp điểm có hoành độ nguyên ? |

**Phân tích và tìm hướng giải**

Gọi $M\left(x_o;x_o^3-6x_o^2+9x_o\right)$ là tiếp điểm thì $k=y'\left(x_o\right)=3x_o^2-12x_o+9$ và có $\Delta: y=-x-1\Rightarrow k_\Delta=-1$. Khi đó ta có hai hướng xử lý: một là áp dụng công thức $\tan\alpha=\left|\dfrac{k-k_\Delta}{1+k.k_\Delta}\right|$, hai là sử dụng $\cos\alpha=\cos\left(\overrightarrow{n_\Delta};\overrightarrow{n_d}\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_\Delta}.\overrightarrow{n_d}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\Delta}\right|.\left|\overrightarrow{n_d}\right|}$ với $\overrightarrow{n_\Delta}=\left(1;1\right)$ và $\overrightarrow{n_d}=\left(k;-1\right)$ là véctơ pháp tuyến của $\Delta$ và tiếp tuyến d.

**LỜI GIẢI**

- Gọi $M\left(x_o;x_o^3-6x_o^2+9x_o\right)$ là tiếp điểm và $k=y'\left(x_o\right)=3x_o^2-12x_o+9$.
- Phương trình tiếp tuyến có dạng $d: y=k\left(x-x_o\right)+x_o^3-6x_o^2+9x_o$ và có véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_d}=\left(k;-1\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{n_\Delta}=\left(1;1\right)$.

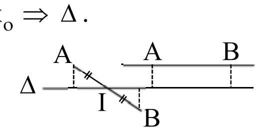
- Theo đề: $\cos\alpha=\cos\left(\overrightarrow{n_\Delta};\overrightarrow{n_d}\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_\Delta}.\overrightarrow{n_d}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\Delta}\right|.\left|\overrightarrow{n_d}\right|}=\dfrac{\left|k-1\right|}{\sqrt{2}.\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{4}{\sqrt{41}}$

  $\Leftrightarrow 9k^2-82k+9=0\Leftrightarrow k=9\vee k=\dfrac{1}{9}$.
- Với $k=9\Rightarrow 3x_o^2-12x_o=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_o=0\Rightarrow y_o=0\\ x_o=4\Rightarrow y_o=4\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta: y=9x\\ \Delta: y=9x-32\end{array}\right.$.
- Với $k=\dfrac{1}{9}\Rightarrow 3x_o^2-12x_o+9=\dfrac{1}{9}\Leftrightarrow x_o=\dfrac{18\pm2\sqrt{21}}{9}$ (loại do $x_o;y_o\in\mathbb{Z}$).
- Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $\Delta: y=9x$ hoặc $\Delta: y=9x-32$.

| |
|---|
| Viết phương trình tiếp tuyến với $\left(C\right): y=\dfrac{2x-1}{x-1}$, biết tiếp tuyến cách đều hai điểm $A\left(-2;4\right)$ và $B\left(4;-2\right)$ ? |

✍ **Phân tích và tìm hướng giải**

Gọi $M\left(x_o;\dfrac{2x_o-1}{x_o-1}\right)$ là tiếp điểm $\Rightarrow$ tt $\Delta: y=\dfrac{-1}{\left(x_o-1\right)^2}\left(x-x_o\right)+\dfrac{2x_o-1}{x_o-1}$. Do $\Delta$ cách đều hai điểm A và B nên có các trường hợp sau đây xảy ra: tiếp tuyến $\Delta$ qua trung điểm I của AB $\left(I\in\Delta\right)$ hoặc song song với AB hoặc trùng với AB $\left(k=k_{AB}\right)$. Giải hai trường hợp $\Rightarrow x_o\Rightarrow\Delta$.




**LỜI GIẢI**

- Gọi $M\left(x_o;\dfrac{2x_o-1}{x_o-1}\right)$, $\left(x_o\neq1\right)\Rightarrow$ tiếp tuyến $\Delta: y=\dfrac{x_o-x}{\left(x_o-1\right)^2}+\dfrac{2x_o-1}{x_o-1}$ (i)
- Do tiếp tuyến cách đều hai điểm $A\left(-2;4\right)$ và $B\left(4;-2\right)$ nên có các trường hợp:

<u>Trường hợp 1</u>. Gọi I là trung điểm của AB $\Rightarrow I\left(1;1\right)\in\Delta$

$\Leftrightarrow 1=\dfrac{x_o-1}{\left(x_o-1\right)^2}+\dfrac{2x_o-1}{x_o-1}\Leftrightarrow x_o=-1\Rightarrow\Delta: y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

<u>Trường hợp 2</u>. $\Delta$ // AB hoặc $\Delta\equiv AB\Rightarrow k=k_{AB}$.

Phương trình đường thẳng $AB: y=-x+2 \Rightarrow k_{AB}=-1=k=-\dfrac{1}{(x_o-1)^2}$

$\Leftrightarrow x_o=2 \vee x_o=0$. Thế vào $(i)$ được $\Delta: y=-x+5$ hoặc $\Delta: y=-x+1$.

- Vậy $\Delta: y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$ hoặc $\Delta: y=-x+5$ hoặc $\Delta: y=-x+1$.

Xác định m để đồ thị $(C): y=\dfrac{2x+m}{x-1}$ có tiếp tuyến song song và cách đường thẳng $d: 3x+y-1=0$ một khoảng cách bằng $\sqrt{10}$ ?

**Phân tích và tìm hướng giải**

$M\left(x_o;\dfrac{2x_o+m}{x_o-1}\right)\in(C)$ là tiếp điểm $\Rightarrow k=\dfrac{-2-m}{(x_o-1)^2}$. Do $\Delta // d \Rightarrow k=-3$ sẽ thu được một phương trình với hai ẩn $x_o, m$ và $d(M;d)=\sqrt{10}$ sẽ thu thêm được một phương trình nữa. Giải hệ này tìm được $\Rightarrow x_o, m$.

**LỜI GIẢI**

- Gọi $M\left(x_o;\dfrac{2x_o+m}{x_o-1}\right),(x_o\neq 1)$ và tiếp tuyến $\Delta$ có $k=\dfrac{-2-m}{(x_o-1)^2}=-3$ (do tiếp tuyến $\Delta$ // $d: y=-3x+1$)

$\Leftrightarrow 3x_o^2-6x_o-m+1=0 \qquad (i)$

- Vì $d(\Delta;d)=d(M;d)=\sqrt{10} \Rightarrow \left|3x_o+\dfrac{2x_o+m}{x_o-1}\right|=10 \qquad (ii)$

$(i),(ii)\Rightarrow \begin{cases}3x_o^2-11x_o+m+10=0\\3x_o^2-6x_o-m+1=0\end{cases} \vee \begin{cases}3x_o^2+9x_o+m-10=0\\3x_o^2-6x_o-m+1=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_o=1 \ (L)\\x_o=\dfrac{11}{6}\Rightarrow m=\dfrac{1}{12}\end{cases} \vee \begin{cases}x_o=1 \ (L)\\x_o=-\dfrac{3}{2}\Rightarrow m=\dfrac{67}{4}\end{cases}.$

- Vậy $m=\dfrac{1}{12} \vee m=\dfrac{67}{4}$ là các giá trị cần tìm.

Tìm tất cả các giá trị của tham số $m\neq 0$ sao cho tiếp tuyến của đồ thị $(C_m): y=mx^3-(2m+1)x+m+1$ tại giao điểm của nó với trục tung tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $4$ ?

**LỜI GIẢI**

- Ta có: $M=(C_m)\cap Oy: x=0\Rightarrow y=m+1\Rightarrow M(0;m+1)$.
- Mà $y'=3mx^2-2m-1 \Rightarrow k=y'(0)=-2m-1$ là hệ số góc tiếp tuyến tại điểm M và có phương trình $\Delta: y=-(2m+1)x+m+1 \qquad (i)$
- $\Delta\cap Ox=A$ thỏa $\begin{cases}y=0\\y=-(2m+1)x+m+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{m+1}{2m+1}\\y=0\end{cases}\Rightarrow A\left(\dfrac{m+1}{2m+1};0\right)$

$\Delta\cap Oy=B$ thỏa $\begin{cases}x=0\\y=-(2m+1)x+m+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=m+1\end{cases}\Rightarrow B(0;m+1)$.

$\Rightarrow OA=\left|\dfrac{m+1}{2m+1}\right|,\ OB=|m+1|$ với $m\neq-\dfrac{1}{2}$.

- Theo đề: $S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}.OA.OB=\frac{1}{2}.\left|\frac{m+1}{2m+1}\right|.\left|m+1\right|=4$

$\Leftrightarrow (m+1)^2=8\left|2m+1\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}16m+8=m^2+2m+1\\16m+8=-m^2-2m-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=7\pm 2\sqrt{14}\\m=-9\pm 6\sqrt{2}\end{array}\right.$.

| |
|---|
| Tìm m để tiếp tuyến của $(C_m): y=x^3+3mx^2+(m+1)x+1$ tại điểm có hoành độ $x=-1$ đi qua điểm $A(1;2)$ ? |

**LỜI GIẢI**

Ta có: $y'=3x^2+6mx+m+1 \Rightarrow k=y'(-1)=4-5m$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(-1;2m-1)$ có dạng:

$d: y=(4-5m)(x+1)+2m-1$ và $A(1;2)\in d$ nên $\boxed{m=\frac{5}{8}}$.

| |
|---|
| Viết phương trình tiếp tuyến của $(C): y=\frac{2x-1}{x+1}$, biết rằng tiếp điểm của tiếp tuyến đó với $(C)$ cách điểm $A(0;1)$ một khoảng $=2$ ? |

**LỜI GIẢI**

Gọi $M\left(x_o;\frac{2x_o-1}{x_o+1}\right),(x_o\neq -1)$ là tiếp điểm. Theo đề thì $MA=2$ hay

$x_o^2+\left(\frac{2x_o-1}{x_o+1}-1\right)^2=4 \Leftrightarrow x_o=0 \vee x_o=2$. Với $x_o=0\Rightarrow$ tiếp tuyến là $d_1: \boxed{y=3x-1}$ và với $x_o=2\Rightarrow d_2: \boxed{y=\frac{x}{3}+\frac{1}{3}}$.

| |
|---|
| Viết phương trình tiếp tuyến của $(C): y=\frac{x}{1-x}$ tại M, biết rằng tiếp tuyến đó cắt các trục tọa độ tại A và B sao cho M là trung điểm của AB ? |

**LỜI GIẢI**

Gọi $M\left(m;\frac{m}{1-m}\right),(m\neq 1)$ là tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến tại M có

dạng $\Delta: x-(1-m)^2y-m^2=0$. Khi đó: $A(m^2;0)$ và $B\left(0;\frac{-m^2}{(1-m)^2}\right)$.

Để M là trung điểm của đoạn AB thì $m\neq 0;\ m^2=2m;\ -\frac{m^2}{(1-m)^2}=\frac{2m}{1-m}$

$\Leftrightarrow m = 2$. Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $\Delta : \boxed{x - y - 4 = 0}$.

Tìm m để đồ thị hàm số $(C_m): y = x^3 - 3mx + 2$ có tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d: x + y + 7 = 0$ góc $\alpha$, biết $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$ ?

**LỜI GIẢI**

Gọi k là hệ số góc tiếp tuyến $\Rightarrow$ tiếp tuyến có vtpt $\overrightarrow{n_1} = (k; -1)$.

Đường thẳng $d: x + y + 7 = 0$ có vtpt $\overrightarrow{n_2} = (1; 1)$.

Theo đề $\cos\alpha = \cos\left(\overrightarrow{n_1}; \overrightarrow{n_2}\right) = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{|k-1|}{\sqrt{2}.\sqrt{k^2+1}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \frac{3}{2} \\ k = \frac{2}{3} \end{array}\right.$.

YCBT $\Leftrightarrow$ ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} y' = \frac{3}{2} \\ y' = \frac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2 - 3m = \frac{3}{2} \\ 3x^2 - 3m = \frac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = \frac{2m+1}{2} \\ x^2 = \frac{9m+2}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{2m+1}{2} \geq 0 \\ \frac{9m+2}{9} \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \boxed{m \geq -\frac{1}{2}}.$$

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = \frac{2x-1}{x-1}$, biết rằng tiếp tuyến này cắt trục $Ox, Oy$ lần lượt tại $A, B$ thỏa: $OA = 4OB$ ?

**LỜI GIẢI**

Giả sử tiếp tuyến d của $(C)$ tại $M(x_o; y_o) \in (C)$ cắt Ox tại A, cắt Oy tại B

sao cho $OA = 4OB$. Do $\Delta OAB$ vuông tại O nên $\tan A = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{4} \Rightarrow$ hệ số góc của d bằng $\frac{1}{4}$ hoặc $-\frac{1}{4}$. Mà hệ số góc của d là: $y'(x_o) = -\frac{1}{(x_o - 1)^2} < 0$

$$\Rightarrow -\frac{1}{(x_o-1)^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_o = -1 \Rightarrow y_o = \frac{3}{2} \text{ hoặc } x_o = 3 \Rightarrow y_o = \frac{5}{2}.$$

Khi đó có hai tiếp tuyến là: $d: \boxed{y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}}$ hoặc $d: \boxed{y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}}$.

Tìm các điểm M trên đường thẳng $d: y = -2x + 19$, biết rằng tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = (x+2)(x-1)^2$ đi qua điểm M vuông góc với đường thẳng $d': x + 9y - 8 = 0$ ?

**LỜI GIẢI**

- Hàm số được viết lại: $y = x^3 - 3x + 2$.
- Vì tiếp tuyến $\Delta \perp d': y = -\frac{1}{9}x + \frac{8}{9}$ nên $\Leftrightarrow k.\left(-\frac{1}{9}\right) = -1 \Leftrightarrow k = 9$.
- Gọi $M\left(x_o; y_o\right) \in (C)$ là tiếp điểm $\Rightarrow k = y'\left(x_o\right) = 3x_o^2 - 3 = 9 \Leftrightarrow x_o = \pm 2$.
- Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng: $\Delta: y = k\left(x - x_o\right) + x_o^3 - 3x_o + 2$.

Hay $\Delta_1: y = 9x - 14$ hoặc $\Delta_2: y = 9x + 18$ là hai tiếp tuyến tại M.

- Khi đó, tọa độ điểm M là giao điểm của đường thẳng d và tiếp tuyến

$d \cap \Delta_1 = M_1$ thỏa $\begin{cases} y = -2x + 19 \\ y = 9x - 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 13 \end{cases} \Rightarrow M_1(3;13)$.

$d \cap \Delta_2 = M_2$ thỏa $\begin{cases} y = -2x + 19 \\ y = 9x + 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{11} \\ y = \frac{207}{11} \end{cases} \Rightarrow M_2\left(\frac{1}{11}; \frac{207}{11}\right)$.

- Vậy có hai điểm M là $M_1(3;13)$ hoặc $M_2\left(\frac{1}{11}; \frac{207}{11}\right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Tìm các điểm $A, B \in (C): y = -x^3 + 3x$ sao cho tiếp tuyến của $(C)$ tại $A, B$ song song với nhau và $AB = 4\sqrt{2}$ ?

**LỜI GIẢI**

Gọi $A\left(a; -a^3 + 3a\right), B\left(b; -b^3 + 3b\right) \in (C), (a \neq b)$.

Do tiếp tuyến tại A và B song song nhau nên $y'(a) = y'(b)$ hay

$\Leftrightarrow -3a^2 + 3 = -3b^2 + 3 \Leftrightarrow a = -b$ (nhận) hoặc $a = b$ (loại).

Theo đề $\Rightarrow AB^2 = 32 \Leftrightarrow \begin{cases} ab = -4 \\ a = -b \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2; b = -2 \\ a = -2; b = 2 \end{array}\right.$.

Vậy $A(2;-2), B(-2;2)$ hoặc $A(-2;2), B(2;-2)$ thì thỏa yêu cầu bài toán.

Tìm $M \in (C): y = x^3 - 3x + 2$ để tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm M cắt đồ thị $(C)$ tại điểm thức hai là N thỏa mãn $\left|x_M - x_N\right| = 6$ ?

**LỜI GIẢI**

Gọi $M\left(a; a^3 - 3a + 2\right) \in (C)$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm M:

$\Delta: y = \left(3a^2 - 3\right)(x - a) + a^3 - 3a + 2$ hay $\Delta: y = \left(3a^2 - 3\right)x - 2a^3 + 2$

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 - 3x + 2 = \left(3a^2 - 3\right)x - 2a^3 + 2$

$\Leftrightarrow (x-a)^2(x+2a)=0 \Leftrightarrow x=a \vee x=-2a \Rightarrow x_M=a;\ x_N=-2a$.

Theo đề: $|x_M-x_N|=6 \Leftrightarrow |a-(-2a)|=6 \Leftrightarrow |a|=2 \Rightarrow a=\pm 2$.

Vậy có hai điểm M thỏa yêu cầu bài toán: $\boxed{M(2;4) \vee M(-2;0)}$.

Tìm các điểm trên $(C): y=\dfrac{2x-3}{x+1}$, sao cho tiếp tuyến tại đó tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\dfrac{18}{5}$ (đvdt) ?

**LỜI GIẢI**

Gọi $M\left(x_o;\dfrac{2x_o-3}{x_o+1}\right)\in(C);(x_o\neq -1)$ và phương trình tiếp tuyến tại M:

$\Delta: y=\dfrac{5}{(x_o+1)^2}(x-x_o)+\dfrac{2x_o-3}{x_o+1}$ và $\Delta\cap Ox=A\left(\dfrac{7x_o^2-x_o-3}{5x_o};0\right)$

$\Delta\cap Oy=B\left(0;\dfrac{2x_o^2-6x_o-3}{(x_o+1)^2}\right)$. Do $S_{\Delta ABO}=\dfrac{18}{5}\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}AO.BO=\dfrac{18}{5}$

Giải phương trình này, sẽ tìm được $x_o \Rightarrow M$ cần tìm.

Tìm tọa độ điểm $M\in(C): y=\dfrac{2x-1}{x+1}$, sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của $(C)$ tại M là lớn nhất ?

**LỜI GIẢI**

Gọi $M\left(x_o;2-\dfrac{3}{x_o+1}\right)\in(C),(x_o\neq -1)$. Khi đó tiếp tuyến tại M dạng

$\Delta: y=\dfrac{3}{(x_o+1)^2}(x-x_o)+2-\dfrac{3}{x_o+1}$. Khi đó khoảng cách từ $I(-1;2)$ đến tiếp tuyến là:

$$d(I;\Delta)=\frac{|3(-1-x_o)-3(x_o+1)|}{\sqrt{9+(x_o+1)^4}}=\frac{6|x_o+1|}{\sqrt{9+(x_o+1)^4}}$$

Hay $d(I;\Delta)=\dfrac{6}{\sqrt{\dfrac{9}{(x_o+1)^2}+(x_o+1)^2}} \overset{\text{Cauchy}}{\leq} \sqrt{6}$ và $d_{max}=\sqrt{6}$ khi và chỉ khi

$$\frac{9}{(x_o+1)^2}=(x_o+1)^2 \Leftrightarrow (x_o+1)^2=3 \Leftrightarrow x_o=-1\pm\sqrt{3}.$$

Vậy: $\boxed{M_1\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)}$ hoặc $\boxed{M_2\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)}$ là hai điểm cần tìm