VI PHÂN
TÓM TẮT GIÁO KHOA

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm tại x_0. Gọi Δx là số gia của biến số tại x_0. Ta gọi tích $f'\left(x_0\right).\Delta x$ là vi phân của hàm số f(x) tại điểm x_0 ứng với số gia Δx. Kí hiệu $df(x_0)=f'(x_0).\Delta x$.

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm tại x. Ta gọi tích $f'\left(x\right).\Delta x$ là vi phân của hàm số f(x) tại điểm x ứng với số gia Δx (gọi tắt là vi phân của f tại điểm x). Kí hiệu $df(x)=f'(x).\Delta x$. Nếu chọn hàm số $y=x$ thì ta có $dy=dx=1.\Delta x=\Delta x$. Vì vậy ta thường kí hiệu $\Delta x=dx$ và $dy=f'\left(x\right)dx$.

Công thức tính gần đúng nhờ vi phân là: $f\left(x_0+\Delta x\right)\approx f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right).\Delta x$

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DẠNG 1: Tìm vi phân của hàm số

PHƯƠNG PHÁP

a). Tính vi phân của hàm số f(x) tại x_0 cho trước:

Tính đạo hàm của hàm số tại x_0.

Suy ra vi phân của hàm số tại x_0 ứng với số gia Δx là $df(x_0)=f'(x_0).\Delta x$.

b). Tính vi phân của hàm số f(x).

Tính đạo hàm của hàm số .

Suy ra vo phân của hàm số: $dy=df(x)=f'\left(x\right)dx$

Ví dụ 1: Cho hàm số $y=x^3-4x^2+2$. Tính vi phân của hàm số tại điểm $x_0=1$, ứng với số gia $\Delta x=0,02$.

LỜI GIẢI

Ta có $y'=f'(x)=3x^2-4x$. Do đó vi phân của hàm số tại điểm $x_0=1$, ứng với số gia $\Delta x=0,02$ là:

$df(1)=f'(1).\Delta x=\left(3.1^2-4.1\right).0,02=-0,02$.

Ví dụ 2: Tính vi phân của các hàm số sau:

a). $y=\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+x+1}$ b). $y=\sqrt{3x^3+2x^2}$ c). $y=\sin x\cos\dfrac{x}{2}$ d). $y=x\sin x-\cos x$

LỜI GIẢI

a). Ta có $y'=f'(x)=\dfrac{(2x^2-3x+1)'(x^2+x+1)-(x^2+x+1)'(2x^2-3x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\dfrac{}{\left(x^2+x+1\right)^2}$

suy ra $dy=f'(x)dx=$

DẠNG 2: Tính gần đúng giá trị của hàm số:

Để tính gần đúng giá trị của hàm số f(x) tại điểm $x=(x_0+\Delta x)$ cho trước, ta áp dụng công thức $f\left(x_0+\Delta x\right)\approx f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right).\Delta x$.

Ví dụ tính gần đúng các giá trị sau (lấy 4 chữ số thập phân trong kết quả).

a). $\sqrt{16,25}$ b). $\cos 30^0 15'$ c). $\sin 46^0$ d). $\dfrac{1}{0,9995}$

e). $\tan 53^0 15'$.

LỜI GIẢI

a). Ta có $\sqrt{16,25}=\sqrt{16+0,25}$. Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

chọn $x_0=16$ và $\Delta x=0,25$, ta có $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0).\Delta x$

$\Rightarrow\sqrt{16+0,25}\approx\sqrt{16}+\dfrac{1}{2\sqrt{16}}.0,25=4+0,03125=4,03125\Rightarrow\sqrt{16+0,25}\approx 4,0313$

b). Ta có $\cos 30^0 15'=\cos\left(30^0+15'\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{720}\right)$.

Xét hàm số $f(x)=\cos x\Rightarrow f'(x)=-\sin x$.

Chọn $x_0=\dfrac{\pi}{6}$ và $\Delta x=\dfrac{\pi}{720}$, ta có $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0).\Delta x$.

$\Rightarrow\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{720}\right)\approx\cos\dfrac{\pi}{6}-\sin\dfrac{\pi}{6}.\dfrac{\pi}{720}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{1440}$.

c). Ta có $\sin 46^0=\sin\left(45^0+1^0\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{180}\right)$.

Xét hàm số $f(x)=\sin x\Rightarrow f'(x)=\cos x$

Chọn $x_0=\dfrac{\pi}{4}$ và $\Delta x=\dfrac{\pi}{180}$, ta có $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0).\Delta x$.

$\Rightarrow\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{180}\right)\approx\sin\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{4}.\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}\pi}{360}$

d). Ta có $\dfrac{1}{0,9995}=\dfrac{1}{1-0,0005}$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

Chọn $x_0=1$ và $\Delta x=-0,0005$, ta có $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0).\Delta x$.

$\Rightarrow\dfrac{1}{1-0,0005}\approx 1-1.(-0,0005)\approx 1,0005$.

e). $\tan 53^0 15'=\tan\left(60^0-(6^0 45')\right)=\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{3\pi}{80}\right)$.

Xét hàm số $f(x)=\tan x\Rightarrow f'(x)=1+\tan^2 x$.

Chọn $x_0=\dfrac{\pi}{3}$ và $\Delta x=-\dfrac{3\pi}{80}$, ta có $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0).\Delta x$.

$\Rightarrow\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{3\pi}{80}\right)\approx\tan\dfrac{\pi}{3}+\left(1+\tan^2\dfrac{\pi}{3}\right).\left(-\dfrac{3\pi}{80}\right)\approx 1,2608$.

5.ĐẠO HÀM CẤP CAO

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $f'(x)$ còn gọi là đạo hàm cấp 1 của hàm số $f(x)$. Nếu hàm số $f'(x)$ có đạo hàm thì đạo hàm đó được gọi là đạo hàm cấp 2 của hàm số $f(x)$, kí hiệu là y'' hay $f''(x)$. Đạo hàm của đạo hàm cấp 2 được gọi là đạo hàm cấp 3 của hàm số $f(x)$, kí hiệu là y''' hay $f'''(x)$

. Tương tự, ta gọi đạo hàm của đạo hàm cấp $(n-1)$ là đạo hàm cấp n của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $y^{(n)}$ hay $f^{(n)}(x)$, tức là ta có:

$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'(n \in N, n > 1)$.

2.Đạo hàm cấp 2 của hàm số f(t) là gia tốc tức thời của chuyển động s=f(t) tại thời điểm t.

B.PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

DẠNG 1: Tính đạo hàm cấp cao của hàm số.

1.PHƯƠNG PHÁP

Áp dụng trực tiếp định nghĩa: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$ để tính đạo hàm đến cấp mà đề bài yêu cầu.

Ví dụ: Tính đạo hàm đến cấp đã chỉ ra của các hàm số sau:

a). $y = x\sin 2x, \left(y'''\right)$ b). $y = \cos^2 x, \left(y'''\right)$ c). $y = x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 1, \left(y^{(n)}\right)$

d). $y = x^4 - \sin 2x, \left(y^{(4)}\right)$ e). $y = \sin^2 2x, \left(y^{(5)}\right)$ f). $y = \dfrac{3x-1}{x+2}, \left(y^{(4)}\right)$

LỜI GIẢI

a). Có $y' = x'\sin 2x + x.(\sin 2x)' = \sin 2x + 2x\cos 2x$

$\Rightarrow y'' = (\sin 2x)' + (2x)'\cos 2x + 2x(\cos 2x)' = 4\cos 2x - 4x\sin 2x$

$\Rightarrow y''' = 4(\cos 2x)' - (4x)'\sin 2x - 4x(\sin 2x)' = -8\sin 2x - 4\sin 2x - 8\cos 2x$

$= -12\sin 2x - 8\cos 2x$.

b). Ta có $y = \cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x) \Rightarrow y' = -\sin 2x$

$\Rightarrow y'' = -2\cos 2x \Rightarrow y''' = 4\sin 2x$

c). $y = x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 1$

$\Rightarrow y' = 4x^3 + 12x^2 - 6x \Rightarrow y'' = 12x^2 + 24x - 6 \Rightarrow y''' = 24x + 24$

$\Rightarrow y^{(4)} = 24 \Rightarrow y^{(5)} = 0 \Rightarrow ... \Rightarrow y^{(n)} = 0$.

d). $y = x^4 - \sin 2x$

$\Rightarrow y' = 4x^3 - 2\cos 2x \Rightarrow y'' = 12x^2 + 4\sin 2x$

$\Rightarrow y''' = 24x + 8\cos 2x \Rightarrow y^{(4)} = 24 - 16\sin 2x$

e). $y = \sin^2 2x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 4x)$

$\Rightarrow y' = 2\sin 4x \Rightarrow y'' = 8\cos 4x \Rightarrow y''' = -32\sin 4x$

$\Rightarrow y^{(4)} = -128\cos 4x \Rightarrow y^{(5)} = 512\sin 4x$

f). $y = \dfrac{3x-1}{x+2}, \left(y^{(4)}\right)$

$$\Rightarrow y' = \frac{7}{(x+2)^2} \Rightarrow y'' = \frac{-7\left[(x+2)^2\right]'}{(x+2)^4} = \frac{-14}{(x+2)^3}$$

$$\Rightarrow y''' = \frac{14\left[(x+2)^3\right]'}{(x+2)^6} = \frac{42}{(x+2)^4} \Rightarrow y^{(4)} = \frac{-42\left[(x+2)^4\right]'}{(x+2)^8} = \frac{-168}{(x+2)^5}$$

DẠNG 2: Tìm đạo hàm cấp n của một hàm số

PHƯƠNG PHÁP

Bước 1: Tính y', y'', y'''. Dựa vào các đạo hàm vừa tính, dự đoán công thức tính $y^{(n)}$.
Bước 2: Chứng minh công thức vừa dự đoán là đúng bằng phương pháp quy nạp.
Chú ý: Cần phân tích kĩ các kết quả của đạo hàm y', y'', y''' tìm ra quy luật để dự đoán công thức $y^{(n)}$ chính xác.

Ví dụ 1: Tìm đạo hàm cấp n của hàm số $y = \sin x \left(n \in N^*\right)$

LỜI GIẢI

Bước 1: Ta có: $y' = \cos x = \sin\left(x + 1.\frac{\pi}{2}\right); y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$

Dự đoán: $y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad (1), \forall n \in N^*$

Bước 2: Chứng minh (1) bằng quy nạp:

$*$ $n = 1 : (1)$ hiển nhiên đúng.

$*$ Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1$ nghĩa là ta có: $y^k = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$ ta phải chứng minh (1) cúng đúng với $n = k + 1$ nghĩa là ta phải chứng minh

$$y^{(k+1)} = \sin\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right) \quad (2)$$

Thật vậy : vế trái $(2) = y^{k+1} = \left[y^k\right]' = \left[\sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right) =$ =vế phải (2)

$\Rightarrow (2)$ đúng, nghĩa là (1) đúng với $n = k + 1$.

Bước 3: theo nguyên lí quy nạp suy ra $y^n = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \forall n \in N^*$.

Ví dụ 2: Tìm đạo hàm cấp n của hàm số $y = \frac{1}{x+3}\left(n \in N^*\right)$

LỜI GIẢI

Ta có: $y' = (-1)' \frac{1}{(x+3)^2} = (-1)' \frac{1!}{(x+3)^2}$;

$y'' = (-1)^2 . \frac{1.2}{(x+3)^3} = (-1)^2 . \frac{2!}{(x+3)^3}$.

Dự đoán: $y^n = (-1)^n \frac{n!}{(x+3)^{n+1}} \quad (1), \forall n \in N^*$.

Chứng minh (1) bằng phương pháp quy nạp:

$*n = 1 : (1)$ hiển nhiên đúng.

$*$ Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 1$, nghĩa là ta có: $y^k = (-1)^k \frac{k!}{(x+3)^{k+1}}$ ta phải chứng minh (1) cúng đúng với $n = k + 1$, nghĩa là ta phải chứng minh:

$$y^{k+1} = (-1)^{k+1} \frac{(k+1)!}{(x+3)^{k+2}} \quad (2)$$

Thật vậy: vế trái

$$(2) = y^{k+1} = \left[y^k\right]' = \left[(-1)^k \frac{k!}{(x+3)^{k+1}}\right]' = (-1)^{k+1}.\frac{k!}{\left[(x+3)^{k+1}\right]^2}.\left[(x+3)^{k+1}\right]'$$

$$= (-1)^{k+1}.\frac{k!(k+1)}{(x+3)^{k+2}} = (-1)^{k+1}.\frac{(k+1)!}{(x+3)^{k+2}} = vt(2)$$

Vậy (2) đúng nghĩa là (1) đúng với $n = k+1$.

Theo nguyên lí quy nạp ta suy ra $y^n = (-1)^n.\dfrac{n!}{(x+3)^{n+1}}, \forall n \in N^*$.

DẠNG 3: Chứng minh đẳng thức:

Bài 11:

a). Cho hàm số $y = x\sin x$. Chứng minh $x.y'' - 2(y' - \sin x) + xy = 0 \quad (*)$

b). Cho hàm số : $y = \sqrt{2x - x^2}$ chứng minh: $y^3.y'' + 1 = 0 \quad (*)$

c). Cho hàm số: $y = x\tan x$ chứng minh: $x^2.y'' - 2(x^2 + y^2)(1+y) = 0 \quad (*)$

d). Cho hàm số: $y = \dfrac{x-3}{x+4}$ chứng minh: $2(y')^2 = (y-1).y'' \quad (*)$

LỜI GIẢI

a). Cho hàm số $y = x\sin x$. Chứng minh $x.y'' - 2(y' - \sin x) + xy = 0 \quad (*)$

Ta có $y' = (x\sin x)' \Leftrightarrow y' = x'.\sin x + x.(\sin x)' \Leftrightarrow y' = \sin x + x\cos x$

$y'' = (\sin x + x\cos x)' = (\sin x)' + (x\cos x)' = \cos x + x'.\cos x + x.(\cos x)' = 2\cos x - x\sin x$

$(1) \Leftrightarrow x(2\cos x - x\sin x) - 2(\sin x + x\cos x - \sin x) + x^2\sin x = 0$

$\Leftrightarrow 2x\cos x - x^2\sin x - 2x\cos x + x^2\sin x = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ (đpcm).

b). Cho hàm số : $y = \sqrt{2x - x^2}$ chứng minh: $y^3.y'' + 1 = 0 \quad (*)$

Ta có: $y' = \left(\sqrt{2x-x^2}\right)' \Leftrightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{2x-x^2}}.(2x - x^2)' = \dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$.

$$y'' = \frac{(1-x)'.\sqrt{2x-x^2} - \left(\sqrt{2x-x^2}\right)'.(1-x)}{\left(\sqrt{2x-x^2}\right)^2} = \frac{-\sqrt{2x-x^2} - \dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}.(1-x)}{\left(\sqrt{2x-x^2}\right)^2}$$

$$= \frac{-(2x-x^2) - (1-x)^2}{\sqrt{2x-x^2}.\left(\sqrt{2x-x^2}\right)^2} = \frac{-1}{\left(\sqrt{2x-x^2}\right)^3}.$$

$$(*) \Leftrightarrow \left(\sqrt{2x-x^2}\right)^3.\frac{-1}{\left(\sqrt{2x-x^2}\right)^3} + 1 = 0 \Leftrightarrow -1 + 1 = 0 \text{ (đpcm).}$$

c). Cho hàm số: $y = x\tan x$ chứng minh: $x^2.y'' - 2(x^2 + y^2)(1+y) = 0 \quad (*)$

Ta có: $y' = (x\tan x)' = x'.\tan x + x.(\tan x)' = \tan x + x(1 + \tan^2 x)$

$y'' = (\tan x)' + x'.(1 + \tan x) + x.(1 + \tan x)' = 2(1 + \tan^2 x) + x.(2\tan x).(\tan^2 + 1)$

$= 2(1 + \tan^2 x)(1 + x\tan x)$

$(*) \Leftrightarrow 2x^2\left(1+\tan^2 x\right).(1+x\tan x)-2\left(x^2+x^2\tan^2 x\right)(1+x\tan x)=0$

$\Leftrightarrow 2x^2\left(1+\tan^2 x\right)(1+x\tan x)-2x^2\left(1+\tan^2 x\right)(1+x\tan x)=0$

$\Leftrightarrow 0=0$ (đpcm).

d). Cho hàm số: $y=\dfrac{x-3}{x+4}$ chứng minh: $2(y')^2=(y-1).y''\quad(*)$

Ta có: $y'=\left(\dfrac{x-3}{x+4}\right)'=\dfrac{7}{(x+4)^2}$

$y''=\dfrac{-7\left((x+4)^2\right)'}{(x+4)^4}=\dfrac{-14}{(x+4)^3}$

$(*) \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{7}{(x+4)^2}\right)^2=\left(\dfrac{x-3}{x+4}-1\right).\left(\dfrac{-14}{(x+4)^3}\right) \Leftrightarrow \dfrac{98}{(x+4)^4}=\dfrac{98}{(x+4)^4}$ (đpcm).

e) Cho hàm số $y=\cos^2 3x$ chứng minh: $18(2y-1)+y''=0\quad(*)$

Ta có: $y=\cos^2 3x$

$y'=2.\cos 3x(\cos 3x)'=2\cos 3x.(-\sin 3x)(3x)'=-3\sin 6x$

$y''=-18\cos 6x$

$(*) \Leftrightarrow 18\left(2\cos^2 3x-1\right)-18\cos 6x=0 \Leftrightarrow 18.\cos 6x-18\cos 6x=0$ (đpcm).

Bài 12:

a).Cho hàm số $y=\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{1-\sin x.\cos x}$. Chứng minh $y''+y=0\quad(*)$

b). Cho hàm số $y=\left(x^2-1\right)^2$. Chứng minh: $y^4+2xy'''-4y''=40\quad(*)$

c). Cho hàm số $y=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$. Chứng minh: $4\left(x^2+1\right).y''+4x.y'-y=0\quad(*)$

d). Chứng minh $\left(1+x^2\right).y''+x.y'-k^2.y=0$ nếu $y=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k$

LỜI GIẢI

a).Cho hàm số $y=\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{1-\sin x.\cos x}$ chứng minh $y''+y=0\quad(*)$

Ta có: $y=\dfrac{(\sin x+\cos x)\left(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cos x\right)}{1-\sin x\cos x}$

$=\dfrac{(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)}{1-\sin x\cos x}=\sin x+\cos x$

$y'=\cos x-\sin x$

$y''=-\sin x-\cos x$

$(*) \Leftrightarrow -\sin x-\cos x+\sin x+\cos x=0 \Leftrightarrow 0=0$ (đpcm).

b). Cho hàm số $y=\left(x^2-1\right)^2$. Chứng minh: $y^4+2xy'''-4y''=40\quad(*)$

Ta có: $y=x^4-2x^2+1$

$y'=4x^3-4x$

$y'' = 12x^2 - 4$

$y''' = 24x$

$y'''' = 24.$

$(*) \Leftrightarrow 24 + 2x(24x) - 4(12x^2 - 4) = 40.$

$\Leftrightarrow 24 + 48x^2 - 48x^2 + 16 = 40 \Leftrightarrow 40 = 40$ (đpcm).

c). Cho hàm số $y = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$. Chứng minh: $4(x^2 + 1).y'' + 4x.y' - y = 0 \quad (*)$

Ta có: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}}.\left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right) = \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}}{2\sqrt{1 + x^2}}$

$$y'' = \frac{\left(\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}\right)'.2\sqrt{1 + x^2} - \left(2\sqrt{1 + x^2}\right)'.\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}}{\left(2\sqrt{1 + x^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}.\left(2\sqrt{1 + x^2} - 4x\right)}{8(1 + x^2).\sqrt{1 + x^2}}$$

$$(*) \Leftrightarrow 4(x^2 + 1)\frac{\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}\left(2\sqrt{1 + x^2} - 4x\right)}{8(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}} + 4x.\frac{\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}}{2\sqrt{1 + x^2}} - \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}.\left(2\sqrt{1 + x^2} - 4x\right)}{2\sqrt{1 + x^2}} + 2x\frac{\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}}{\sqrt{1 + x^2}} - \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}} - \frac{2x\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}}{\sqrt{1 + x^2}} + \frac{2x\sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}}{\sqrt{1 + x^2}} - \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}} = 0$$

$\Leftrightarrow 0 = 0$ (đpcm).

d). Chứng minh $(1 + x^2).y'' + x.y' - k^2.y = 0$ nếu $y = \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^k$

Ta có: $y = \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^k \Rightarrow y' = k\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^{k-1}.\left(1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)$

$$= k\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^{k-1}.\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) = k.\frac{\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$y'' = k.\frac{\left[\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^k\right]'.\sqrt{x^2 + 1} - \left(\sqrt{x^2 + 1}\right)'.\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^k}{x^2 + 1}$$

$$= k.\frac{\dfrac{k\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^k}{\sqrt{x^2 + 1}}.\sqrt{x^2 + 1} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^k}{(x^2 + 1)}$$

$$= \frac{k\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^k\left(k\sqrt{x^2 + 1} - x\right)}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$(*) \Leftrightarrow \left(1+x^2\right)\frac{k\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k.\left(k\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}+\frac{x.k\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^k}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k.\left(k\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x.k\left(x^2+\sqrt{1+x^2}\right)^k}{\sqrt{1+x^2}}-k^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k=0$$

Quy đồng đặt thừa số chung được:

$$\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^k}{\sqrt{x^2+1}}\left(k^2\sqrt{x^2+1}-kx+kx-k^2\sqrt{x^2+1}\right)=0 \Leftrightarrow 0=0 \text{ (đpcm).}$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với mọi số nguyên $n \geq 1$ ta có:

a)Nếu $y=\frac{1}{x}$ thì $y^n=(-1)^n.\frac{n!}{x^{n+1}}$.

b) Nếu $y=\cos x$ thì $y^{4n}=\cos x$.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng:

a)Nếu $y=\sin ax$ thì $y^{4n}=a^{4n}.\sin ax$ (a là hằng số).

b) Nếu $y=\sin^2 x$ thì $y^{4n}=-2^{4n-1}\cos 2x$.