DẠNG 2: SẮP XẾP NGƯỜI HOẶC ĐỒ VẬT.

Xếp 6 học sinh A, B, C, D, E, F vào một ghế dài, có bao nhiêu cách sắp xếp nếu:
a). 6 học sinh ngồi bất kỳ.
b). A và F luôn ngồi ở hai đầu ghế.
c). A và F luôn luôn ngồi cạnh nhau.
d). A, B, C luôn luôn ngồi cạnh nhau.
e). A, B, C, D luôn luôn ngồi cạnh nhau.
f). A và F luôn luôn ngồi cạnh nhau.

LỜI GIẢI

a). Xếp 6 học sinh vào 6 ghế thành hàng ngang là hoán vị của 6 phần tử. Số cách xếp là $6!$ cách.
b).
Bước 1: Xếp A và F ngồi ở hai đầu ghế có $2!$ cách xếp
Bước 2: Xếp 4 bạn còn lại vào 4 ghế còn lại có $4!$ cách xếp.
Theo quy tắc nhân có: $2!4! = 48$ cách xếp.
c). Vì A và F luôn ngồi cạnh nhau nên gom 2 bạn này thành nhóm X.
Bước 1: Xếp X và 4 bạn còn lại ngồi vào ghế có $5!$ cách xếp.
Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 1, có $2!$ cách xếp các bạn trong nhóm X.
Theo quy tắc nhân có: $5!2! = 240$ cách.
d). Vì A, B, C luôn luôn ngồi cạnh nhau nên gom ba bạn này thành nhóm Y.
Bước 1: Xếp Y và 3 bạn còn lại ngồi vào ghế có $4!$ cách xếp.
Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 1, có $3!$ cách xếp các bạn trong nhóm Y.
Theo quy tắc nhân ta có: $4!3! = 144$ cách xếp.
e). Vì A, B, C, D luôn ngồi cạnh nhau, nên gom 4 người này thành một nhóm Z.
Bước 1: Xếp Z và hai người còn lại, có $3!$ cách xếp.
Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 1, có 4! cách xếp các phần tử trong Z.
Theo quy tắc nhân có $3!4! = 144$ cách.
f). Bước 1: Xếp 4 bạn B, C, D, E ngồi vào ghế có $4!$ cách xếp.
Bước 2: Giả sử 4 bạn B, C, D, E là những vách ngăn. Giữa 4 bạn có 3 vị trí, thêm hai vị trí ở hai đầu, tổng cộng có 5 vị trí trống để xếp hai bạn A và F.
Chọn 2 vị trí trong 5 vị trí, sau đó xếp 2 bạn A và F , có A_5^2 cách.
Theo quy tắc nhân có: $4!A_5^2 = 480$ cách.

Một tổ có 5 nam và 3 nữ, trong đó có 2 bạn A và B. Hỏi có bao nhiêu cách xếp tổ trên thành một hàng ngang sao cho:
a). A và B đứng cách nhau hai người.
b). Giữa 2 người nữ có đúng một người nam.
c). Không có 2 người nữ nào được đứng gần nhau.

LỜI GIẢI

a).
Bước 1: Chọn 2 người trong 6 người còn lại, có C_6^2 cách chọn, để tao thành nhóm X thỏa điều kiện AabB đứng kề nhau với a và b là người vừa chọn.
Bước 2: Xếp X và 4 người còn lại (bỏ 4 người A, a, b, B) có 5! cách xếp.
Bước 3: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 2 có 2! cách xếp hai người A và B, có 2! cách xếp hai người a và b.
Theo quy tắc nhân có $C_6^2.5!.2!.2! = 7200$ cách xếp thỏa yêu cầu.
b).

Vì giữa 3 bạn nữ có 2 vị trí trống, để xếp thỏa yêu cầu phải có dạng $\overline{AaBbC}$. Trong đó A, B, C là 3 bạn nữ, a, b là 2 bạn nam.

Bước 1: Chọn 2 bạn nam trong 3 bạn nam, có C_5^2 cách.

Bước 2: Gọi nhóm $\overline{AaBbC}$ là X. Xếp X và 3 bạn nam còn lại thành 1 hàng ngang có 4! cách.

Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 1, có 2! cách xếp các bạn nam trong X và 3! cách xếp các bạn nữ trong X.

Theo quy tắc nhân có $C_5^2.4!.2!.3!$ cách xếp thỏa yêu cầu.

c).

Bước 1: Xếp 5 bạn nam thành 1 hàng dọc có 5! cách xếp.

Bước 3: Coi 5 bạn nam là các vách ngăn, giữa 5 bạn nam có 4 vị trí trống và thêm 2 vị trí ngoài cùng, suy ra có 6 vị trí để xếp 3 người nữ, chọn 3 vị trí trong 6 vị trí có A_6^3 cách chọn.

Theo quy tắc nhân có $5!.A_6^3 = 14400$ cách.

Có 5 ông già, 4 bà lão, 3 em bé. Có bao nhiêu cách sắp xếp vào một ghế dài nếu:
a). Ông già, bà lão, em bé ngồi bất kì.
b). 5 ông già ngồi cạnh nhau, 4 bà lão ngồi cạnh nhau, 3 em bé ngồi cạnh nhau.
c). 4 bà lão ngồi cạnh nhau, 3 em bé ngồi cạnh nhau.

LỜI GIẢI

a). Xếp 12 người vào một ghế dài có $12! = 479001600$ cách xếp.

b). Bước 1: Xếp 5 ông già ngồi cạnh nhau, có 5! cách xếp.

Bước 2: Xếp 4 bà lão ngồi cạnh nhau, có 4! cách xếp

Bước 3: Xếp 3 em bé ngồi cạnh nhau có 3! cách xếp

Bước 4: Hoán vị 3 nhóm trên có 3! Cách.

Theo quy tắc nhân có: $5!4!3!3! = 103680$ cách xếp.

Có 4 người đàn ông, 2 người đàn bà và 1 đứa trẻ được xếp ngồi vào bảy chiếc ghế đặt quanh một bàn tròn. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho:
a). Đứa trẻ ngồi giữa hai người đàn bà?
b). Đứa trẻ ngồi giữa hai người đàn ông?

LỜI GIẢI

a). Bước 1: Chọn 1 ghế xếp em bé, có 1 cách (vì ngồi xung quanh bàn tròn).

Bước 2: Xếp 2 người phụ nữ ngồi 2 ghế kề em bé, có 2! cách.

Bước 3: Xếp 4 người đàn ông vào 4 ghế còn lại, có 4! cách.

Theo quy tắc nhân có 2!.4! = 48 cách xếp.

b). Bước 1: Chọn 2 người đàn ông trong 4 người, có C_4^2 cách.

Bước 2: Chọn 1 ghế xếp em bé, có 1 cách (vì ngồi xung quanh bàn tròn).

Bước 3: Xếp 2 người đàn ông vừa chọn ngồi 2 ghế kề em bé, có 2! cách.

Bước 4: Xếp 4 người còn lại vào 4 ghế còn lại, có 4! cách.

Theo quy tắc nhân có $C_4^2.2!.4! = 288$ cách xếp.

Có bao nhiêu cách xếp chỗ cho 4 bạn nữ và 6 bạn nam vào 10 ghế mà không có hai bạn nữ nào ngồi cạnh nhau, nếu:
a). Ghế xếp thành hàng ngang? b). Ghế xắp quanh một bàn tròn?

LỜI GIẢI

a). Bước 1: Xếp 6 bạn nam thành một dãy, có 6! cách.

Bước 2: Xem các bạn nam là những vách ngăn, giữa 6 bạn nam có 5 vị trí và thêm 2 vị trí ở hai đầu. Tổng cộng có 7 vị trí để xếp 4 bạn nữ. Chọn 4 vị trí trong 7 vị trí để xếp 4 bạn nữ, có A_7^4 cách.

Theo quy tắc nhân có $6!.A_7^4 = 604800$ cách.

b). Bước 1: Xếp 6 bạn nam ngồi quanh một bàn tròn, có $5!$ cách.
Bước 2: Xem các bạn nam là những vách ngăn, giữa 6 bạn nam có 6 vị trí để để xếp 4 bạn nữ. Chọn 4 vị trí trong vị trí để xếp 4 bạn nữ, có A_6^4 cách.

Theo quy tắc nhân có $5!.A_6^4 = 43200$ cách.

Một nhóm học sinh có 7 em nam và 3 em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 10 em này trên một hàng ngang trong mỗi yêu cầu sau đây:
a). Giữa hai bạn nữ bất kì đều không có một em nam nào?
b). Hai vị trí đầu và cuối hàng là các em nam và không có 2 em nữ nào ngồi cạnh nhau?

LỜI GIẢI

a). Vì giữa 2 bạn nữ không có một bạn nam nào, có nghĩa 3 bạn nữ này đứng cạnh nhau.
Gọi nhóm 3 bạn nữ này là nhóm X.
Bước 1: Xếp X và 7 bạn nam trên một hàng ngang, có 8! cách xếp.
Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 1, có 3! cách xếp các bạn nữ trong X.
Vậy có 8!.3! = 241920 cách xếp.
b). Bước 1: Xếp 7 bạn nam thành một hàng ngang, có 7! cách xếp.
Bước 2: Xem các bạn nam là những vách ngăn, giữa 7 bạn nam có 6 vị trí để xếp 3 bạn nữ. Chọn 3 vị trí trong 6 vị trí để xếp ba bạn nữ có A_6^3 cách.

Theo quy tắc nhân có $7!.A_6^3 = 604800$ cách.

Có bao nhiêu cách xếp 5 bạn nam và 3 bạn nữ ngồi xung quanh một chiếc bàn tròn, sao cho không có 2 bạn nữ nào ngồi cạnh nhau.

LỜI GIẢI

Ta thực hiện các công đoạn sau:
Bước 1: Xếp 5 bạn nam ngồi quanh bàn tròn, có (5 – 1)! = 4! Cách.
Bước 2: giữa 5 bạn nam có 5 khoảng trống (xem 5 bạn nam là những vách ngăn), sau đó xếp 3 bạn nữ vào 3 trong 5 khoảng trống đó có A_5^3 cách.

Theo quy tắc nhân có $4!.A_5^3 = 1440$ cách.

Nhóm có 10 học sinh trong đó có 7 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 10 học sinh trên thành 1 hàng dọc,sao cho 7 học sinh nam phải đứng liền nhau.

LỜI GIẢI

Do 7 nam đứng cạnh nhau nên ta có thể xem họ như 1 vị trí x.
Bước 1: xếp x và 3 nữ có 4! cách
Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 1, có 7! cách xếp 7 nam trong x.
Do đó số cách sắp xếp cần tìm là $4!7! = 120960$ cách.

Xếp 3 nam, 2 nữ vào 8 ghế. Có bao nhiêu cách, nếu :
a. Nam và nữ được xếp ngồi tùy ý.
b. Xếp 5 người ngồi kề nhau.
c. Xếp 3 nam ngồi kề, 2 nữ ngồi kề và giữa hai nhóm có ít nhất một ghế trống.

LỜI GIẢI

a . Chọn 5 ghế trong 8 ghế và xếp 5 người ngồi vào : có A_8^5 cách xếp.

b. Ta có 4 trường hợp sau :
– Ghế thứ 6, 7, 8 trống ;

– Ghế thứ 1, 7, 8 trống ;
– Ghế thứ 1, 2, 8 trống ;
– Ghế thứ 1, 2, 3 trống.

Mỗi cách xếp trên có $5!$ cách xếp 5 người ngồi vào. Vậy có tất cả $4.5!$ cách xếp.

Cách 2: Gọi nhóm 5 người này là nhóm A. Nhóm A chiếm 5 ghế còn lại 3 ghế trống. Bây giờ ta xem nhóm A đã ngồi 1 ghế. Bước 1: Cách xếp A vào 4 ghế (3 ghế trống và 1 ghế đang ngồi), có 4 cách. Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 1, có 5! Cách xếp các bạn trong nhóm A. Theo quy tắc nhân có 4.5! cách.

c). Xem ba ghế nam ngồi là một nhóm; 2 ghế nữ ngồi là một nhóm; mội ghế trống là một nhóm. Ta có 5 nhóm. Chọn 2 nhóm ghế để xếp nam và nữ có A_5^2 cách. Trong số đó có 8 cách xếp nhóm nam và nhóm nữ ngồi kề nhau. Do đó ta có $20-8=12$ cách chọn vị trí để xếp nam và nữ thỏa bài toán. Ứng với mỗi cách xếp trên , ta có $3!$ cách xếp chỗ cho nam vào ba ghế dành cho nam và có $2!$ cách xếp 2 nữ ngồi vào 2 vị trí dành cho nữ. Vậy ta có tất cả $12.3!.2!$ cách xếp thỏa yêu cầu bài toán.

Cách 2: Gọi nhóm 3 nam là X, nhóm 2 nữ là Y. Tổng cộng hai nhóm này chiếm 5 ghế, vậy còn 3 ghế trống. (ta coi nhóm X ngồi 1 ghế, và nhóm Y ngồi 1 ghế).

Bây giờ bài toán trở thành xếp X và Y vào 5 ghế sao cho X và Y không ngồi gần nhau.

Trường hợp 1: Xếp X và Y bất kỳ.

Bước 1: Chọn 2 ghế trong 5 ghế để xếp X và Y, có A_5^2 cách.

Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 1, có 3! Cách xếp các phần tử trong X, và 2! Cách xếp các bạn nữ trong Y.

Theo quy tắc nhân có $A_5^2.3!.2!=240$ cách.

Trường hợp 2: Xếp X và Y ngồi cạnh nhau.

Vì X và Y ngồi cạnh nhau, nên gom 2 nhóm này thành nhóm A.

Bước 1: Xếp A vào 1 trong 4 ghế có 4 cách

Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 1, có 2! Cách xếp 2 nhóm X và Y.

Bước 3: Ứng với mỗi cách xếp bước 2, có 3! Cách xếp 3 bạn nam trong X, và 2! Cách xếp các bạn nữ trong Y.

Vậy có $4.2!.3!.2!=96$ cách xếp hai nhóm X và Y ngồi cạnh nhau.

Kết luận có 240 – 96 = 144 cách xếp thỏa yêu cầu.

Có 4 người đàn ông , 2 người đàn bà và một đứa trẻ . Có bao nhiêu cách xếp thành hàng ngang :
a). Sao cho 2 người đàn bà và đứa trẻ đứng cạnh nhau .
b). Sao cho đứa trẻ đứng giữa hai người đàn bà .
c). Sao cho đứa trẻ đứng giữa hai người đàn ông .
d). Đứa trẻ không đứng giữa hai người đàn bà .
e). Hai người đàn bà và đứa trẻ không ai đứng gần nhau .

LỜI GIẢI

a). Vì 2 người đàn bà và đứa trẻ đứng cạnh nhau nên gom 3 người này thành nhóm X .

Bước 1: Số cách xếp 4 người đàn ông và X là $P_5=5!=120$ cách xếp .

Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp trên có $3!=6$ cách xếp 2 người đàn bà và đứa trẻ .

Theo qui tắc nhân ta có $120.6=720$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán .

b). Vì đứa trẻ đứng giữa hai người đàn bà có nghĩa 3 người này cũng đứng cạnh nhau nên gom 3 người này thành nhóm X .

Bước 1: Số cách xếp 4 người đàn ông và X là $P_5=5!=120$ cách xếp .

Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp trên có $2!=2$ cách xếp 2 người đàn bà .

Theo qui tắc nhân ta có $120.2=240$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán .

c). Đầu tiên chọn 2 người đàn ông trong 4 người đàn ông có $C_4^2=6$ cách chọn .

Vì đứa trẻ đứng giữa hai người đàn ông có nghĩa 3 người này đứng cạnh nhau nên gom 3 người này thành nhóm X .
Số cách xếp 4 người gồm 2 đàn ông còn lại, 2 đàn bà và X là $P_5 = 5! = 120$ cách xếp .
Ứng với mỗi cách xếp trên có $2! = 2$ cách xếp 2 người đàn ông .
Theo qui tắc nhân ta có $120.2.6 = 1440$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán .
d). Bước 1 : Xắp sếp 7 người bất kỳ là 7!
Bước 2 : Xếp đứa trẻ đứng giữa hai người đàn bà là 240 cách
Suy ra số cách xếp hai đứa trẻ không đứng giữa hai người đàn bà : $7! - 240 = 4800$ cách.
e). Hai người đàn bà và đứa trẻ không ai đứng gần nhau .
Bước 1: Xếp 4 người đàn ông thành một hàng, có 4! Cách xếp.
Bước 2: Xem 4 người đàn ông là những vách ngăn, giữa 4 người có 3 vị trí và thêm 2 vị trí ở hai đầu, tổng cộng có 5 vị trí để xếp 2 phụ nữ và 1 trẻ em. Chọn 3 vị trí trong 4 vị trí để xếp, có A_4^3 cách chọn.
Theo quy tắc nhân có $4!.A_4^3 = 576$ cách xếp thỏa yêu cầu.

Xếp 6 bạn nam và 4 bạn nữ thành một hàng dọc . Hỏi có bao nhiêu cách xếp :
a). Nữ luôn đứng cạnh nhau .
b). Nam nữ đứng xen kẽ .
c). Không có 2 nữ nào đứng cạnh nhau .
d). Nữ luôn đứng thành 2 cặp và hai cặp này không đứng cạnh nhau .

LỜI GIẢI

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

a). Gọi 4 bạn nữ thành nhóm X . Cách xếp 6 bạn nam và X là 7! cách .
Ứng với mỗi cách xếp trên có 4! cách xếp bạn nữ .
Theo quy tắc nhân vậy có 7!.4! cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán .
c). Bước đầu tiên xếp 6 bạn nam có 6! cách .
Vì các bạn nữ không đứng cạnh nhau , nên phải xếp các bạn nữ xen giữa các bạn nam . giữa 6 bạn nam có 5 vị trí và thêm 2 vị trí ở hai đầu , tổng cộng có 7 vị trí để xếp 4 bạn nữ . Vậy có tất cả A_7^4 cách .
Theo qui tắc nhân có $6!.A_7^4 = 604800$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán .
d). Có $C_4^2 = 6$ cặp nữ . $a,b,c,d \Rightarrow \{a,b\},\{c,d\},\{a,c\},\{b,d\},\{a,d\},\{b,c\}$ trong 6 tập này có 3 cặp mà các phần tử trong mỗi tập đều khác nhau là $\{a,b\}$ và $\{c,d\}$, $\{a,c\}$ và $\{b,d\}$, $\{a,d\}$ và $\{b,c\}$
Bước đầu tiên xếp 6 bạn nam có 6! cách. Giữa 6 bạn nam có 5 vị trí và thêm 2 vị trí ở hai đầu , tổng cộng có 7 vị trí để xếp 2 cặp bạn nữ , vậy có A_7^2 cách xếp . Ứng với mỗi cách xếp 2 cặp bạn nữ có 2! cách xếp cặp bạn nữ thứ nhất và có 2! cách xếp cặp bạn nữ thứ hai .
Vì cách xếp các cặp là như nhau
Theo quy tắc nhân có $3.6!.A_7^2.2!.2! = 362880$ cách xếp .

Có 4 người đàn ông , 2 người đàn bà và một đứa trẻ . Có bao nhiêu cách xếp thành hàng ngang :
a). Sao cho 2 người đàn bà và đứa trẻ đứng cạnh nhau .
b). Sao cho đứa trẻ đứng giữa hai người đàn bà .
c). Sao cho đứa trẻ đứng giữa hai người đàn ông .
d). Đứa trẻ không đứng giữa hai người đàn bà .

LỜI GIẢI

a). Vì 2 người đàn bà và đứa trẻ đứng cạnh nhau nên gom 3 người này thành nhóm X .
Số cách xếp 4 người đàn ông và X là $P_5 = 5! = 120$ cách xếp .

Ứng với mỗi cách xếp trên có $3! = 6$ cách xếp 2 người đàn bà và đứa trẻ .
Theo qui tắc nhân ta có $120.6 = 720$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán .
b). Vì đứa trẻ đứng giữa hai người đàn bà có nghĩa 3 người này cũng đứng cạnh nhau nên gom 3 người này thành nhóm X .
Số cách xếp 4 người đàn ông và X là $P_5 = 5! = 120$ cách xếp .
Ứng với mỗi cách xếp trên có $2! = 2$ cách xếp 2 người đàn bà .
Theo qui tắc nhân ta có $120.2 = 240$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán .
c). Đầu tiên chọn 2 người đàn ông trong 4 người đàn ông có $C_4^2 = 6$ cách chọn .
Vì đứa trẻ đứng giữa hai người đàn ông có nghĩa 3 người này đứng cạnh nhau nên gom 3 người này thành nhóm X .
Số cách xếp 4 người gồm 2 đàn ông 2 đàn bà và X là $P_5 = 5! = 120$ cách xếp .
Ứng với mỗi cách xếp trên có $2! = 2$ cách xếp 2 người đàn ông .
Theo qui tắc nhân ta có $120.2.6 = 1440$ cách xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán .
d). Bước 1 : Xắp sếp 7 người bất kỳ là 7!
Bước 2 : Xếp đứa trẻ đứng giữa hai người đàn bà là 240 cách
Suy ra số cách xắp hai đứa trẻ không đứng giữa hai người đàn bà : $7! - 240 = 4800$

Có 6 nam, 6 nữ trong đó có ba bạn tên A, B, C. Hỏi có bao nhiêu cách xếp thành một hàng dọc để vào lớp sao cho:
a). Các bạn nữ không ai đứng cạnh nhau.
b). Đầu hàng và cuối hàng luôn là nam.
c). Đầu hàng và cuối hàng luôn cùng phái.
d). Đầu hàng và cuối hàng luôn khác phái.
e). A, B, C luôn đứng gần nhau.
f). A, B, C không ai đứng gần nhau.
g). A, B đứng cách nhau đúng 1 người.
h). A, B cách nhau đúng 2 người.

LỜI GIẢI

a). Các bạn nữ không ai đứng cạnh nhau.
Bước 1: Xếp 6 bạn nam thành 1 hàng có 6! cách.
Xem các bạn nam như các vách ngăn, giữa 6 bạn nam có 5 vách ngăn, và thêm 2 vị trí đầu và cuối tổng cộng có 7 vị trí để xếp các bạn nữ.
Bước 2: Xếp chọn 6 vị trí trống trong 7 vị trí để xếp 6 bạn nữ vào, có A_7^6 cách.
Theo quy tắc nhân có $6!.A_7^6 = 3628800$ cách xếp thỏa yêu cầu .
b). Đầu hàng và cuối hàng luôn là nam.
Bước 1: Chọn 2 trong 6 bạn nam xếp vào đầu hàng và cuối hàng có A_6^2 cách.
Bước 2: Xếp 6 bạn nữ và 4 bạn nam còn lại vào ở giữa có 10! Cách xếp.
Theo quy tắc nhân có $A_6^2.10! = 108864000$ cách xếp.
c). Đầu hàng và cuối hàng luôn cùng phái.
Trường hợp 1: Đầu hàng và cuối hàng luôn là nam. Theo câu b) có 108864000 cách xếp.
Trường hợp 1: Đầu hàng và cuối hàng luôn là nữ. Cách xếp hoàn toàn tương tự câu b) và số cách xếp cũng là 108864000 cách.
Theo quy tắc cộng có $108864000 + 108864000 = 217728000$ cách.
d). Đầu hàng và cuối hàng luôn khác phái.

Bước 1: Nếu đầu hàng là nam thì cuối hàng là nữ, còn nếu đầu hàng là nữ thì cuối hàng là nam. Vậy có 2 cách chọn giới ở đầu hàng. Có 6 cách chọn bạn nam để xếp vào đầu hàng hoặc cuối hàng, và có 6 cách chọn bạn nữ để xếp vào đầu hàng hoặc cuối hàng.
Bước 2: Còn lại 10 bạn xếp vào ở giữa có 10! Cách xếp.
Theo quy tắc nhân có $2.6.6.10! = 261273600$.
e). A, B, C luôn đứng gần nhau.
Vì nhóm A, B, C luôn đứng gần nhau, nên gọi nhóm này là X.
Bước 1: Xếp X và 9 người còn lại vào thành một hàng dọc có 10! cách xếp.
Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 1 có 3! cách xếp 3 bạn trong nhóm X.
Theo quy tắc nhân có $10!.3! = 21772800$ cách.
f). A, B, C không ai đứng gần nhau.
Bước 1: Xếp 9 bạn còn lại (không có bạn nào là A, B, C) vào thành 1 hàng có 9! cách xếp.
Xem 9 bạn ở trên như các vách ngăn, giữa 9 bạn có 8 vách ngăn, và thêm 2 vị trí đầu và cuối tổng cộng có 10 vị trí để xếp các 3 bạn A, B, C.
Bước 2: Có A_{10}^3 cách xếp 3 bạn A, B, C vào 10 vị trí.
Theo quy tắc nhân có $9!.A_{10}^3 = 261273600$ cách xếp thỏa yêu cầu.
g). A, B đứng cách nhau đúng 1 người.
Bước 1: Chọn 1 người trong 10 người còn lại, có 10 cách chọn, để tao thành nhóm X thỏa điều kiện AaB đứng kề nhau với a là người vừa chọn.
Bước 2: Xếp X và 9 người còn lại (bỏ người A, a, B) có 10! cách xếp.
Bước 3: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 2 có 2! cách xếp hai người A và B.
Theo quy tắc nhân có $10.10!.2! = 72576000$ cách xếp thỏa yêu cầu.
Cách 2:
Bước 1: Xếp 10 người (bỏ A, B) thành một hàng dọc có 10! cách xếp.
Bước 2: Ta xem 10 người là 10 vách ngăn, vậy có 11 khoảng trống kề nhau tức có 10 cặp khoảng trống để xếp 2 bạn A và B vào. Tức có 10 cách xếp.
Bước 3: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 2 có 2! cách xếp hai người A và B.
Theo quy tắc nhân có $10.10!.2! = 72576000$ cách xếp thỏa yêu cầu.
h). A, B cách nhau đúng 2 người.
Bước 1: Chọn 2 người trong 10 người còn lại, có C_{10}^2 cách chọn, để tao thành nhóm X thỏa điều kiện AabB đứng kề nhau với a và b là hai người vừa chọn.
Bước 2: Xếp X và 8 người còn lại (bỏ 4 người A, a, b, B) có 9! cách xếp.
Bước 3: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 2 có 2! cách xếp hai người A và B, có 2! cách xếp hai người a và b.
Theo quy tắc nhân có $C_{10}^2.9!.2!.2! = 65318400$ cách xếp thỏa yêu cầu.

Một trường tiểu học có 50 học sinh đạt danh hiệu cháu ngoan Bác Hồ trong đó có 4 cặp anh em sinh đôi. Cần chọn một nhóm 3 học sinh từ 50 học sinh trên đi dự đại hội cháu ngoan Bác Hồ sao cho trong nhóm được chọn không có cặp anh em sinh đôi nào. Hỏi có bao nhiêu cách chọn nhóm.

LỜI GIẢI
Bước 1: Chọn 3 em trong 50 em bất kỳ có C_{50}^3 cách.
Bước 2: Chọn 3 em trong đó có 1 cặp anh em sinh đôi. Đầu tiên chọn 1 cặp anh em sinh đôi có 4 cách chọn. sau đó chọn 1 em trong 48 em còn lại có 48 cách. Vậy có $4.48 = 192$ cách chọn 3 em trong đó có một cặp anh em sinh đôi.
Vậy có $C_{50}^3 - 192 = 19408$ cách chọn thỏa yêu cầu.

(ĐHQG TPHCM khối AB đợt 2 1999) Một bàn dài có hai dãy ghế đối diện nhau, mỗi dãy có 6 ghế. Người

ta muốn xếp chỗ ngồi cho 6 học sinh trường A và 6 học sinh trường B vào bàn nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách xếp trong mỗi trường hợp sau:
1. Bất cứ 2 học sinh nào ngồi cạnh nhau hoặc đối diện nhau thì khác trường với nhau.
2. Bất cứ 2 học sinh nào ngồi đối diện nhau thì khác trường với nhau.

LỜI GIẢI

1). Giai đoạn 1: Xếp chỗ ngồi cho hai nhóm học sinh, có 2 cách xếp:

A	B	A	B	A	B
B	A	B	A	B	A

B	A	B	A	B	A
A	B	A	B	A	B

Giai đoạn 2: Trong nhóm học sinh của trường A, có 6! cách xếp các em vào 6 chỗ.
Tượng tự, có 6! cách xếp 6 học sinh trường B vào 6 chỗ.
Kết luận: có 2.6!6! = 1036800 cách
2).Học sinh thứ nhất trường A ngồi trước: có 12 cách chọn ghế để ngồi.
Sau đó, chọn học sinh trường B ngồi đối diện với học sinh thứ nhất trường A: có 6 cách chọn học sinh trường B.
Học sinh thứ hai của trường A còn 10 chỗ để chọn, chọn học sinh trường B ngồi đối diện với học sinh thứ hai trường A: có 5 cách chọn, v.v…
Vậy: có 12.6.10.5.8.4.6.3.4.2.2.1 = 2^6.6!.6! = 33177600 cách.

Một đoàn tàu có ba toa chở khách : toa 1, toa 2, toa 3. Trên sân ga có 4 hành khách chuẩn bị đi tàu. Biết rằng mỗi toa có ít nhất một ghế trống. Hỏi có bao nhiêu :
a. cách sắp xếp cho 4 vị khách lên 3 toa tàu đó ?
b. cách sắp xếp cho 4 vị khách lên tàu để có 1 toa có 3 trong 4 vị khách trên ?

LỜI GIẢI

a . Mỗi vị khách có 3 cách lên toa. Vậy có $3^4 = 81$ cách xếp cho 4 vị khách lên 3 toa tàu đó.
b . Ta có :
∗ Chọn 3 vị khách trong 4 vị và xếp vào một toa : có $C_4^3.3$ cách ;
∗ Xếp vị khách còn lại lên một trong hai toa còn lại : có 2 cách.
Vậy có $C_4^3.3.2 = 4.6 = 24$ cách xếp thỏa yêu cầu bài toán.

Xếp 3 bi đỏ có bán kính khác nhau và 3 bi xanh giống nhau vào 1 hộc có 7 ô trống.
a). Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp khác nhau.
b). Có bao nhiêu cách xếp khác nhau sao cho 3 bi đỏ xếp cạnh nhau và 3 bi xanh xếp cạnh nhau.

LỜI GIẢI

a.
Bước 1: Xếp 3 bi đỏ khác nhau vào hộc có 7 ô trống có A_7^3 cách.
Bước 2: Xếp 3 bi xanh vào 4 ô trống còn lại,có C_4^3 cách.
Theo quy tắc nhân ta có $A_7^3C_4^3 = \frac{7!}{4!} \times \frac{4!}{3!1!} = 7.6.5.4 = 840$ cách.

b.
Vì 3 bi đỏ đứng cạnh nhau gọi nhóm 3 bi đỏ là X, và 3 bi xanh đứng cạnh nhau nên gọi nhóm 3 bi đỏ là Y.
Vì xếp vào hộc có 7 ô, có 3 viên bi đỏ chiếm 3 vị trí và 3 viên bi xanh chiếm 3 vị trí, còn lại 1 vị trí trống.

Bước 1: Ta xem chỉ có 3 vị trí để xếp X và Y, có A_3^2 cách.

Bước 2: Ứng với mỗi cách xếp ở bước 1, có 3! cách xếp 3 viên bi đỏ khác nhau, còn 3 viên bi xanh chỉ 1 cách xếp vì chúng giống nhau.

Theo quy tắc nhân có $A_3^2.3! = 36$ cách xếp thỏa yêu cầu.

TỔ HỢP

Một hộp có 6 quả cầu xanh đánh số từ 1 đến 6, 5 quả cầu đỏ đánh số từ 1 đến 5, 4 quả cầu vàng đánh số từ 1 đến 4.
a.Có bao nhiêu cách lấy 3 quả cầu cùng màu, 3 quả cầu cùng số.
b.Có bao nhiêu cách lấy 3 quả cầu khác màu? 3 quả cầu khác màu và khác số.

LỜI GIẢI

a.Số cách lấy 3 quả cầu cùng xanh: $C_6^3 = 20$ cách.

Số cách lấy 3 quả cầu cùng màu đỏ: $C_5^3 = 10$ cách.

Số cách lấy 3 quả cầu cùng vàng: $C_4^3 = 4$ cách.

Vậy số cách lấy 3 quả cầu cùng màu là: $20 + 10 + 4 = 34$ cách.
Số cách lấy 3 quả cầu cùng số 1 là 1.
Số cách lấy 3 quả cầu cùng số 2 là 1.
Số cách lấy 3 quả cầu cùng số 3 là 1.
Số cách lấy 3 quả cầu cùng số 4 là 1.
Vậy số cách lấy 3 quả cầu cùng số là:4
b.Số cách lấy 1 quả cầu xanh:6
Số cách lấy 1 quả cầu đỏ:5
Số cách lấy 1 quả cầu vàng:4
Vậy số cách lấy 3 quả cầu khác màu là $6 \times 5 \times 4 = 120$

$*$ Chọn bất kì 1 quả cầu vàng V_i $(I = 1, 2, 3, 4)$ có 4 cách.

$*$ Chọn 1 quả cầu đỏ G_j có 4 cách(vì $I \neq j$)

$*$ Chọn 1 quả cầu xanh X_k có 4 cách(vì $k \neq j, k \neq i$)

Do đó số cách chọn 3 bi khác màu, khác số là:
$4 \times 4 \times 4 = 64$ cách.

Một hộp đựng 15 viên bi khác nhau gồm 4 bi đỏ, 5 bi trắng và 6 bi vàng. Tính số cách chọn 4 viên bi từ hộp đó sao cho không có đủ 3 màu.

LỜI GIẢI

+ Trường hợp 1: chọn 4 bi đỏ hoặc trắng có $C_9^4 = 126$ cách.

+ Trường hợp 2: chọn 4 bi đỏ và vàng hoặc 4 bi vàng có $C_{10}^4 - C_4^4 = 209$ cách.

+ Trường hợp 3: chọn 4 bi trắng và vàng có $C_{11}^4 - \left(C_5^4 + C_6^4\right) = 310$ cách.

Vậy có 126 + 209 + 310 = 645 cách.
Cách khác:
+ Loại 1: chọn tùy ý 4 trong 15 viên bi có $C_{15}^4 = 1365$ cách.
+ Loại 2: chọn đủ cả 3 màu có 720 cách gồm các trường hợp sau:
- Chọn 2 bi đỏ, 1 bi trắng và 1 bi vàng có 180 cách.
- Chọn 1 bi đỏ, 2 bi trắng và 1 bi vàng có 240 cách.

- Chọn 1 bi đỏ, 1 bi trắng và 2 bi vàng có 300 cách.
Vậy có 1365 – 720 = 645 cách.

Bài 2: Có 8 bông đỏ, 9 bông trắng, 10 bông vàng. Hỏi có bao nhiêu cách tạo nên một bó hoa gồm 6 bông, trong đó có số bông vàng nhiều hơn số bông đỏ hay nhiều hơn số bông trắng?

LỜI GIẢI

Có các trường hợp sau xảy ra thỏa mãn yêu cầu bài toán:

Trường hợp 1: Có 4 bông vàng , 1 bông đỏ và 1 bông trắng, có $C_{10}^4.C_8^1.C_9^1$ cách.

Trường hợp 2: Có 3 bông vàng, 1 bông đỏ và 2 bông trắng, có $C_{10}^3.C_8^1.C_9^2$ cách.

Trường hợp 3: Có 3 bông vàng, 2 bông đỏ và 1 bông trắng, có $C_{10}^3.C_8^2.C_9^1$ cách.

Trường hợp 4: Có 5 bông vàng và 1 bông trắng, có $C_{10}^5.C_9^1$ cách.

Trường hợp 5: Có 4 bông vàng và 2 bông trắng, có $C_{10}^4.C_9^2$ cách.

Trường hợp 6: Có 5 bông vàng và 1 bông đỏ, có $C_{10}^5.C_8^1$ cách.

Trường hợp 7: Có 4 bông vàng và 2 bông đỏ, có $C_{10}^4.C_8^2$ cách.

Trường hợp 8: Cả 6 bông đều vàng, có C_{10}^6 cách.

Vậy có $C_{10}^4.C_8^1.C_9^1+C_{10}^3.C_8^1.C_9^2+C_{10}^3.C_8^2.C_9^1+C_{10}^5.C_9^1+C_{10}^4.C_9^2+C_{10}^5.C_8^1+C_{10}^4.C_8^2+C_{10}^6=97854$ cách chọn một bó bông thỏa yêu cầu của đề.

Bài 3: Một nhóm có 6 học sinh nữ và 7 học sinh nam. Có bao nhiêu cách chọn ra một tổ học tập có 5 học sinh, trong đó có một tổ trưởng, một tổ phó, một thủ quỹ và hai tổ viên, biết rằng tổ trưởng phải là nam và thủ quỹ phải là nữ.

LỜI GIẢI

Ta thực hiện các công đoạn sau:

Bước 1: Chọn 1 nam trong 7 nam làm tổ trưởng, có C_7^1 cách.

Bước 2: Chọn 1 nữ trong 6 nữ làm thủ quỹ, có C_6^1 cách.

Bước 3: Chọn 1 tổ phó trong 11 bạn còn lại (bỏ 2 bạn đã chọn ở bước 1 và bước 2), có C_{11}^1 cách.

Bước 4: Chọn 2 tổ viên trong 10 bạn còn lại (loại 3 bạn đã chọn ở trên), có C_{10}^2 cách.

Theo quy tắc nhân có $C_7^1.C_6^1.C_{11}^1.C_{10}^2=20790$ cách chọn một tổ thỏa yêu cầu.

Một lớp học có 40 học sinh gồm 25 nam và 15 nữ. Giáo viên chủ nhiệm muốn chọn 5 học sinh lập thành một đoàn đại biểu để tham gia tổ chức lễ khai giảng. Hỏi có bao nhiêu cách :
a. Chọn ra 5 học sinh, trong đó có không quá 3 nữ.
b. Chọn ra 5 học sinh, trong đó có 3 nam và 2 nữ.
c. Chọn ra 5 học sinh, trong đó có ít nhất một nam.
d. Chọn ra 5 học sinh, trong đó anh A và chị B không thể cùng tham gia cùng đoàn đại biểu.
e. Chọn ra 5 học sinh, trong đó anh X và chị Y chỉ có thể hoặc cùng tham gia đoàn đại biểu hoặc cùng không tham gia.

LỜI GIẢI

a . Ta thấy :

$*$ có $C_{15}^3.C_{25}^2$ cách chọn đoàn có 3 nữ và 2 nam ;

$*$ có $C_{15}^2.C_{25}^3$ cách chọn đoàn có 2 nữ và 3 nam ;

$*$ có $C_{15}^1.C_{25}^4$ cách chọn đoàn có 1 nữ và 4 nam ;

$*$ có $C_{15}^{0}.C_{25}^{5}$ cách chọn đoàn có 0 nữ và 5 nam.

Vậy có $C_{15}^{3}.C_{25}^{2}+C_{15}^{2}.C_{25}^{3}+C_{15}^{1}.C_{25}^{4}+C_{15}^{0}.C_{25}^{5}$ cách chọn.

b . Có $C_{15}^{2}.C_{25}^{3}$ cách chọn đoàn có 2 nữ và 3 nam.

c . Số cách chọn 5 học sinh trong 40 học sinh là C_{40}^{5} . Trong đó có C_{15}^{5} cách chọn đoàn gồm toàn nữ $\Rightarrow$ có $C_{40}^{5}-C_{15}^{5}$ cách chọn đoàn có ít nhất một học sinh nam.

d . Số cách chọn 5 học sinh trong 40 học sinh là C_{40}^{5} . Trong đó có C_{38}^{3} cách chọn đoàn mà A và B ở cùng một đoàn $\Rightarrow$ có $C_{40}^{5}-C_{38}^{3}$ cách chọn đoàn mà anh A và chị B không thể cùng tham gia một đoàn đại biểu.

e . Có C_{38}^{3} cách chọn đoàn mà X và Y ở cùng một đoàn. Có C_{38}^{5} cách chọn đoàn mà X và Y cùng vắng mặt $\Rightarrow$ có $C_{38}^{3}+C_{38}^{5}$ cách chọn thỏa yêu cầu bài toán.

Từ 1 nhóm học sinh gồm 7 nam và 6 nữ, thầy giáo cần chọn ra 5 em tham dự lễ mít tinh tại trường với yêu cầu có cả nam lẫn nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

LỜI GIẢI

TH1: 1 nam +4 nữ :ta có $C_{7}^{1}C_{6}^{4}$ cách.

TH2:2 nam +3 nữ :ta có $C_{7}^{2}C_{6}^{3}$ cách.

TH3:3 nam +2 nữ:ta có $C_{7}^{3}C_{6}^{2}$ cách.

TH4:4 nam+1 nữ:ta có $C_{7}^{4}C_{6}^{1}$ cách.

Vậy theo quy tắc cộng ta có:

$C_{7}^{1}C_{6}^{4}+C_{7}^{2}C_{6}^{3}+C_{7}^{3}C_{6}^{2}+C_{7}^{4}C_{6}^{1}=1260$ cách.

Cách 2: Bước 1: Chọn 5 em bất kỳ trong 15 em, có C_{13}^{5} cách.

Bước 2: Chọn 5 em đều là nam, có C_{7}^{5} cách.

Bước 3: Chọn 5 em đều là nữ, có C_{6}^{5} cách.

Chọn 5 em có cả nam và nữ: $C_{13}^{5}-\left(C_{7}^{5}+C_{6}^{5}\right)=1260$

Một nhóm học sinh có 10 em nam và 13 em nữ. Người ta cần chọn ra 8 em trong nhóm tham gia đồng diễn thể dục. Trong 8 em được chọn, yêu cầu không có quá 6 em nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

LỜI GIẢI

Trường hợp 1: Chọn 8 em đều nam, có C_{10}^{8} cách.

Trường hợp 2: Chọn 7 em nam và một em nữ, có $C_{10}^{7}.C_{13}^{1}$ cách.

Trường hợp 3: Chọn 6 em nam và 2 em nữ, có $C_{10}^{6}.C_{13}^{2}$ cách.

Trường hợp 4: Chọn 5 em nam và 3 em nữ, có $C_{10}^{5}.C_{13}^{3}$ cách.

Trường hợp 5: Chọn 4 em nam và 4 em nữ, có $C_{10}^{4}.C_{13}^{4}$ cách.

Trường hợp 6: Chon 3 em nam và 5 em nữ, có $C_{10}^{3}.C_{13}^{5}$ cách.

Trường hợp 7: Chọn 2 em nam và 6 em nữ, có $C_{10}^{2}.C_{13}^{6}$ cách.

Theo quy tắc cộng có:

$C_{10}^{8}+C_{10}^{7}.C_{13}^{1}+C_{10}^{6}.C_{13}^{2}+C_{10}^{5}.C_{13}^{3}+C_{10}^{4}.C_{13}^{4}+C_{10}^{3}.C_{13}^{5}+C_{10}^{2}.C_{13}^{6}=471867$

Cách 2: Sử dụng phương pháp gián tiếp:

Chọn 8 em trong 23 em bất kỳ, có C_{23}^{8} cách.

Chọn 7 em nữ và 1 em nam, có $C_{13}^{7}.C_{10}^{1}$ cách.

Chọn 8 em đều nữ, có C_{13}^{8} cách.

Vậy có : $C_{23}^{8}-\left(C_{13}^{7}.C_{10}^{1}+C_{13}^{8}\right)=471867$ cách chọn thỏa yêu cầu bài toán.

Nhận xét: sử dụng phương pháp gián tiếp giải đơn giản hơn phương pháp trực tiếp rất nhiều.

Một lớp học có 10 học sinh nam và 15 học sinh nữ.
a) Có bao nhiêu cách chọn từ đó ra một đội gồm 12 người.
b) Chọn từ đó ra một đội văn nghệ gồm 13 người sao cho có ít nhất là 10 nữ và phải có cả nam và nữ.

LỜI GIẢI

a). Chọn 12 người trong 25 người, có C_{25}^{12} cách chọn.

b). Có các trường hợp sau xảy ra theo yêu cầu:

Trường hợp 1: Chọn 10 nữ và 3 nam, có $C_{15}^{10}.C_{10}^{3}$ cách.

Trường hợp 2: Chọn 11 nữ và 2 nam, có $C_{15}^{11}.C_{10}^{2}$ cách.

Trường hợp 3: Chọn 12 nữ và 1 nam, có $C_{15}^{12}.C_{10}^{1}$ cách.

Theo quy tắc cộng có: $C_{15}^{10}.C_{10}^{3}+C_{15}^{11}.C_{10}^{2}+C_{15}^{12}.C_{10}^{1}=426335$ cách.

Một lớp có 8 học sinh nam và 12 học sinh nữ.
a). Chọn từ đó ra 6 học sinh sao cho có đủ nam và nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.
b). Chọn từ đó ra 10 học sinh sao cho có ít nhất 2 học sinh nam. Hỏi có bao nhiêu cách chọn.

LỜI GIẢI

a). Chọn 6 học sinh trong 20 học sinh bất kỳ, có C_{20}^{6} cách.

Chọn 6 học sinh đều nam, có C_{8}^{6} cách.

Chọn 6 học sinh đều nữ, có C_{12}^{6} cách.

Vậy có $C_{20}^{6}-\left(C_{8}^{6}+C_{12}^{6}\right)=37808$ cách.

b). Chọn 10 học sinh bất kỳ trong 20 học sinh, có C_{20}^{10} cách.

Chọn 10 học sinh đều là nữ, có C_{12}^{10} cách.

Chọn 10 học sinh trong đó có 9 nữ và 1 nam, có $C_{12}^{9}.C_{8}^{1}$ cách.

Vậy có $C_{20}^{10}-\left(C_{12}^{10}+C_{12}^{9}.C_{8}^{1}\right)=182930$ cách.

Một đôi thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ.

LỜI GIẢI

(Nhận xét vì 3 tỉnh không có tên nên không hoán vị)

Bước 1: Chọn 4 nam và 1 nữ cho tỉnh thứ nhất, có $C_{12}^{4}.C_{3}^{1}$ cách

Bước 2: Chọn 4 nam trong 8 nam còn lại và1 nữ trong 2 nữ còn cho tỉnh thứ hai, có $C_{8}^{4}.C_{2}^{1}$ cách.

Bước 3: 4 nam còn lại và 1 nữ còn lại về giúp cho tỉnh thứ 3, có 1 cách

Số cách chọn theo yêu cầu bài toán là $C_{12}^{4}.C_{3}^{1}.C_{8}^{4}.C_{2}^{1}.1=207900$ cách.

(ĐH khối B 2004) Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi

khác nhau và nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2.

LỜI GIẢI

Mỗi đề kiểm tra có số câu dễ là 2 hoặc 3, nên có các trường hợp sau:

* Đề có 2 câu dễ, 2 câu trung bình, 1 câu khó $\Rightarrow$ có $C_{15}^2.C_{10}^2.C_5^1$ đề.

* Đề có 2 câu dễ, 1 câu trung bình, 2 câu khó $\Rightarrow$ có $C_{15}^2.C_{10}^1.C_5^2$ đề.

* Đề có 3 câu dễ, 1 câu trung bình, 1 câu khó $\Rightarrow$ có $C_{15}^3.C_{10}^1.C_5^1$ đề.

Vậy tất cả có:

$C_{15}^2.C_{10}^2.C_5^1 + C_{15}^2.C_{10}^1.C_5^2 + C_{15}^3.C_{10}^1.C_5^1 = 23625 + 10500 + 22750 = 56875$ đề.

(ĐH khối D 2006) Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

LỜI GIẢI

Số cách chọn 4 học sinh từ 12 học sinh đã cho là: $C_{12}^4 = 495$

Số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một em được tính như sau:

• Lớp A có 2 học sinh, các lớp B, C mỗi lớp 1 học sinh. $\Rightarrow$ Số cách chọn là: $C_5^2C_4^1C_3^1 = 120$

• Lớp B có 2 học sinh, các lớp A, C mỗi lớp 1 học sinh: $\Rightarrow$ Số cách chọn là: $C_5^1C_4^2C_3^1 = 90$

• Lớp C có 2 học sinh, các lớp A, B mỗi lớp 1 học sinh: $\Rightarrow$ Số cách chọn là: $C_5^1C_4^1C_3^2 = 60$

Số cách chọn 4 học sinh mà mỗi lớp có ít nhất một học sinh là:120 + 90 + 60 = 270

Vậy số cách chọn phải tìm là: 495 – 270 = 225 cách.

Từ một nhóm 12 học sinh gồm 4 học sinh khối A, 4 học sinh khối B và 4 học sinh khối C chọn ra 5 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh. Tính số cách chọn.

LỜI GIẢI

+ Trường hợp 1: 1 khối có 3 học sinh và 2 khối còn lại mỗi khối có 1 học sinh.

- Bước 1: chọn 1 khối có 3 học sinh có 3 cách.

- Bước 2: trong khối đã chọn ta chọn 3 học sinh có $C_4^3 = 4$ cách.

- Bước 3: 2 khối còn lại mỗi khối có 4 cách chọn.

Suy ra có 3.4.4.4 = 192 cách.

+ Trường hợp 2: 2 khối có 2 học sinh và khối còn lại có 1 học sinh.

- Bước 1: chọn 2 khối có 2 học sinh có $C_3^2 = 3$ cách.

- Bước 2: trong 2 khối đã chọn ta chọn 2 học sinh có $C_4^2 = 6$ cách.

- Bước 3: khối còn lại có 4 cách chọn.

Suy ra có 3.6.6.4 = 432 cách.

Vậy có 192 + 432 = 624 cách.

Cách khác:

+ Chọn 5 học sinh tùy ý có $C_{12}^5 = 792$ cách.

+ Chọn 5 học sinh khối A và B (tương tự khối A và C, B và C) có $C_8^5 = 56$ cách.

Vậy có 792 – 3.56 = 624 cách.

Hội đồng quản trị của một công ty gồm 12 người, trong đó có 5 nữ. Từ hội đồng quản trị đó người ta bầu ra 1 chủ tịch hội đồng quản trị, 1 phó chủ tịch hội đồng quản trị và 2 ủy viên. Hỏi có mấy cách bầu sao cho trong 4 người được bầu phải có nữ.

LỜI GIẢI

+ Loại 1: bầu 4 người tùy ý (không phân biệt nam, nữ).

- Bước 1: bầu chủ tịch và phó chủ tịch có A_{12}^2 cách.

- Bước 2: bầu 2 ủy viên có C_{10}^2 cách.

Suy ra có $A_{12}^2.C_{10}^2$ cách bầu loại 1.

+ Loại 2: bầu 4 người toàn nam.

- Bước 1: bầu chủ tịch và phó chủ tịch có A_7^2 cách.

- Bước 2: bầu 2 ủy viên có C_5^2 cách.

Suy ra có $A_7^2.C_5^2$ cách bầu loại 2.

Vậy có $A_{12}^2.C_{10}^2 - A_7^2.C_5^2 = 5520$ cách.

Có 16 học sinh gồm 3 học sinh giỏi,5 học sinh khá,8 học sinh trung bình.Có bao nhiêu cách chia số học sinh đó thành 2 tổ, mỗi tổ có 8 học sinh sao cho mỗi tổ đều có học sinh giỏi và mỗi tổ có ít nhất 2 học sinh khá.

LỜI GIẢI

Vì chỉ có 3 học sinh giỏi và hai tổ đều phải có học sinh giỏi nên tổ có ít học sinh nhất phải có đúng 1 học sinh giỏi,gọi tổ có ít học sinh giỏi là tổ A.

Số cách lập tổ A

Bước 1:chọn một học sinh giỏi cho tổ A: có 3 cách.

Bước 2:chọn học sinh khá và trung bình.

TH1:Nếu A có 2 học sinh khá thì phải có 5 học sinh trung bình.Do đó ta có $C_5^2C_8^5$ cách chọn.

TH2:Nếu A có 3 học sinh khá thì phải có 4 học sinh trung bình.Do đó ta có $C_5^3C_8^4$ cách chọn.

Tóm lại ta có tất cả: $3(C_5^2C_8^5 + C_5^3C_8^4) = 3(10.56 + 10.70) = 3780$ cách.

Số cách chọn tổ A cũng chính là cách chia 6 học sinh ra làm 2 tổ theo yêu cầu bài toán.

Có 4 người. Mỹ, 4 người Pháp, 4 người Anh, 4 người Nhật. Cần chọn 6 người đi hôi nghị. Hỏi có mấy cách chọn sao cho.

a).Mỗi nước đều có đại biểu?

b). Không có nước nào có hơn 2 đại biểu.

LỜI GIẢI

a).Xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: Một nước có 3 đại biểu và các nước kia mỗi nước có đại biểu.

Chọn 1 trong 4 nước, được cử 3 đại biểu có C_4^1 cách, rồi chọn 3 người trong 4 người của nước đó là $C_4^3 = 4$ cách. Ba nước còn lại mỗi nước có C_4^1 cách chọn 1 đại biểu.

Vậy ta có $C_4^1.C_4^3.C_4^1.C_4^1C_4^1 = 4^5 = 1024$ cách.

Trường hợp 2: Hai nước mỗi nước 2 đại biểu và 2 nước kia mỗi nước 1 đại biểu.

Bước 1: Chọn 2 nước trong 4 nước có 2 đại biểu là C_4^2 cách.

Bước 2: Chọn 2 trong 4 người mỗi nước đó ta có $C_4^2 = 6$

Bước 3: Hai nước còn lại, mỗi nước chọn 1 người trong 4 người ta có C_4^1 cách.

Theo quy tắc nhân có $C_4^2.C_4^2.C_4^2.C_4^1.C_4^1 = 3456$ cách.

Kết luận theo quy tắc cộng ta có $1024 + 3456 = 4480$ cách chọn.

b).Xét 2 trường hợp

Trường hợp 1: 3 nước, mỗi nước 2 đại biểu:

Chọn 3 trong 4 nước để mỗi nước chọn 2 đại biểu có $C_4^3 = 4$ cách.Chọn 2 trong 4 người của mỗi nước đó có $C_4^2 = 6$ cách.ba nước có 6^3 cách.

Vậy ta có 4.6^3 cách.

Trường hợp 2: Có 2 nước, mỗi nước có 2 đại biểu và 2 nước kia mỗi nước có 1 đại biểu.

(đã có ở câu a, ta có $6^3.4^2$ cách)

Theo quy tắc cộng ta có $4.6^3 + 6^3.4^2 = 4320$ cách.

Cho tập A có 20 phần tử.
a. Có bao nhiêu tập con của tập hợp A ?
b. Có bao nhiêu tập hợp con khác rỗng của tập hợp A mà có số phần tử là chẵn ?

LỜI GIẢI

a . $*$ Có C_{20}^0 tập con không có phần tử ;

$*$ Có C_{20}^1 tập con có 1 phần tử ;

$*$ Có C_{20}^2 tập con có 2 phần tử ;

$*$ Có C_{20}^3 tập con có 3 phần tử ;

…….

$*$ Có C_{20}^{20} tập con có 20 phần tử.

Vậy có tất cả $C_{20}^0 + C_{20}^1 + ... + C_{20}^{20} = 2^{20}$ tập con của A.

b. $*$ Có C_{20}^2 tập con có 2 phần tử ;

$*$ Có C_{20}^4 tập con có 4 phần tử ;

$*$ Có C_{20}^6 tập con có 6 phần tử ;

……

$*$ Có C_{20}^{20} tập con có 20 phần tử .

Vậy có tất cả $C_{20}^2 + C_{20}^4 + ... + C_{20}^{20} = 2^{19} - 1$ tập con của A.

Thật vậy, ta có : $C_{20}^0 + C_{20}^1 x + C_{20}^2 x^2 + ... + C_{20}^{19} x^{19} + C_{20}^{20} x^{20} = (1+x)^{20}$.

Cho $x = \pm 1$ ta có : $C_{20}^0 + C_{20}^1 + C_{20}^2 + ... + C_{20}^{19} + C_{20}^{20} = 2^{20}$

Và $C_{20}^0 - C_{20}^1 + C_{20}^2 - ... - C_{20}^{19} + C_{20}^{20} = 0 \Rightarrow 2\left[C_{20}^0 + C_{20}^2 + ... + C_{20}^{18} + C_{20}^{20}\right] = 2^{20}$

$\Rightarrow C_{20}^2 + C_{20}^4 + ... + C_{20}^{20} = \dfrac{2^{20} - 2}{2} = 2^{19} - 1$.

Một bô bài tú lơ khơ có 52 quân bài , mỗi loại cơ , rô, chuồn, bích có 13 quân. Cần lấy từ bộ bài ra 8 quân trong đó có 1 cơ, 3 rô, không có quá 2 bích. Hỏi có bao nhiêu cách lấy.

LỜI GIẢI

Số cách chọn 1 quân cơ trong 13 quân: $C_{13}^1 = 13$ cách.

Số cách chọn 3 quân rô trong 13 quân, có C_{13}^3 cách.

Ta xét tiếp các trường hợp sau:

TH1: Không có quân bích nào, tức là 4 chuồn:có C_{13}^4 cách. Do đó số cách chọn $13C_{13}^3.C_{13}^4$

TH2: Có 1 quân bích, 2 chuồn, có $C_{13}^1.C_{13}^3$ cách. Do đó số cách chọn $13.C_{13}^1C_{13}^3C_{13}^3$

TH3: Có 2 quân bích, 2 chuồn, có $C_{13}^2C_{13}^2$ cách. Do đó số cách chọn $13.C_{13}^3C_{13}^2C_{13}^2$

Theo quy tắc cộng ta có: $13.C_{13}^3(C_{13}^4+C_{13}^1.C_{13}^3+C_{13}^2.C_{13}^2)=39102206$ cách.

Xét các biển số xe là dãy gồm hai chữ cái đứng trước và 4 chữ số đứng sau. Các chữ cái được lấy từ 26 chữ cái A, B, C, … , Z ; các chữ số được lấy từ 10 chữ số 0, 1, 2, … , 9.
a). Có bao nhiêu biển số xe trong đó ít nhất một chữ cái khác chữ cái O và các chữ số đôi một khác nhau ?
b). Có bao nhiêu biển số xe trong đó có hai chữ cái khác nhau, có đúng hai chữ số lẻ và hai chữ số lẻ đó giống nhau ?

LỜI GIẢI

a . Có 26^2 cách xếp hai chữ cái, trong đó có 1 cách xếp mà hai chữ cái đều là chữ O $\Rightarrow$ có 26^2-1 cách xếp hai chữ cái đứng trước trong đó ít nhất một chữ cái khác O.

Có A_{10}^4 cách xếp 4 chữ số đôi một khác nhau.

Vậy có tất cả là $(26^2-1).A_{10}^4=3402000$ biển số xe.

b . Có 26.25 cách xếp 2 chữ cái khác nhau.

Chọn một số lẻ và xếp vào 2 trong 4 vị trí của bốn chữ số có $5.C_4^2$ cách ;

Xếp 2 số chẵn vào 2 vị trí còn lại có 5^2 cách.

Vậy tất cả có $26.25.5.C_4^2.5^2=487500$ biển số.

53. Cho tập $M=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ và N là tập gồm 26 chữ cái trong bảng chữ cái tiếng Anh. Giả sử tại Hà Nội ta cần lập các biển số xe có dạng sau

29 – Xm
a b c d

trong đó $X\in N, m\in M\setminus\{0\}$ và $a,b,c,d\in M$ có thể trùng nhau.

a . Có bao nhiêu biển số xe được tạo thành ?
b . Có bao nhiêu biển số thỏa $a+b+c+d$ là một số có tận cùng là 9 ?

LỜI GIẢI

a . Ta thấy : có 26 cách chọn chữ X ; có 9 cách chọn số m ; có 10^4 cách xếp các số a, b, c, d.

Vậy ta có $26.9.10^4=2340000$ biển số xe được tạo thành.

b . Ta có : có 26 cách chọn chữ X ; có 9 cách chọn số m ; có 10^3 cách xếp các số a, b, c; có 1 cách chọn d (nếu $a+b+c$ là số có tận cùng là e thì ta chọn $d=9-e$).

Vậy có $26.9.10^3=234000$ biển số xe.

Một bảng xe gắn máy ở thành phố X có cấu tạo như sau:
-Phần đầu gồm 2 chữ cái phân biệt viết hoa trong bảng chữ cái.
-Phần sau gồm 4 chữ số trong các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Ví dụ: SA0979, EY 3535,...
Hỏi có bao nhiêu cách cấu tạo bảng số xe theo cấu tạo như trên (giả sử bảng chữ cái có tất cả 26 chữ cái).

LỜI GIẢI

Gọi bảng số xe có dạng $\overline{X_1X_2x_3x_4x_5x_6}$, trong đó X_1, X_2 là chữ, còn x_3, x_4, x_5, x_6 là các chữ số.

Bước 1: Có 26 cách chọn chữ cái cho X_1.
Bước 2: Có 25 cách chọn chữ cái cho X_2 (bỏ đi một chữ mà X_1 đã chọn).
Bước 3: Mỗi chữ số x_3, x_4, x_5, x_6 có 10 cách chọn do không có sự phân biệt.

Theo quy tắc nhân có $26.25.10^4=6500000$ bảng số xe thỏa yêu cầu.

TỔ HỢP LIÊN QUAN ĐẾN HÌNH HỌC

Cho đa giác lồi 10 cạnh (thập giác)
a). Có bao nhiêu đoạn thẳng mà hai đầu mút là 2 điểm thuộc các đỉnh của tam giác trên.
b). Có bao nhiêu đường chéo.
c). Có bao nhiêu véctơ khác $\vec{0}$ mà điểm đầu và điểm cuối là 2 điểm thuộc các đỉnh của đa giác trên.
d). Có bao nhiêu tam giác mà 3 đỉnh của tam giác là 3 điểm thuộc các đỉnh của đa giác trên.
e). Ta kẻ tất cả các đường chéo, biết rằng không có ba đường chéo nào đồng quy. Tìm số giao điểm của các đường chéo này.

LỜI GIẢI

a). Chọn 2 điểm trong 10 điểm sau đó nối hai điểm vừa chọn được 1 đoạn thẳng. Số đoạn thẳng cần tìm là: $C_{10}^2 = 45$ đoạn thẳng.

b). Tứ giác lồi 10 cạnh
Vậy có: $45 - 10 = 35$ đường chéo.

c). Số véctơ cần tìm là: $A_{10}^2 = 90$ véctơ.(vì 2 điểm phân biệt tạo thành 2 véctơ)

d) Cứ 3 điểm phân biệt tạo thành một tam giác. Vậy có $C_{10}^3 = 120$ tam giác.

e). Vì các đường chéo cắt nhau từng đôi một và không có ba đường chéo nào đồng qui, nên cứ hai đường chéo ta có 1 giao điểm. Vậy số giao điểm của đường chéo là: $C_{35}^2 = 595$ giao điểm.

10 đường thẳng song song lần lượt cắt 8 đường thẳng song song khác. Hỏi có bao nhiêu hình bình hành được tạo thành từ các đường thẳng trên.

LỜI GIẢI

Cứ hai đường thẳng song song trong nhóm A và hai đường thẳng song song trong nhóm B tạo thành một hình bình hành.

Chọn 2 đường trong 10 đường của nhóm A có C_{10}^2 cách.

Chọn 2 đường trong 8 đường của nhóm B có C_8^2 cách.

Vậy số hình bình hành tạo thành là $C_{10}^2.C_8^2 = 1260$ hình.

Cho 2 đường thẳng song song. Trên đường thứ nhất có 10 điểm, trên đường thứ hai có 15 điểm, có bao nhiêu tam giác được tạo thành từ các điểm đã cho.

LỜI GIẢI

Ta có ba điểm không thẳng hàng tạo thành một tam giác. Số tam giác thỏa mãn yêu cầu trên có các trường hợp sau xảy ra:

Trường hợp 1: Chọn 2 điểm phân biệt trong 10 điểm phân biệt của đường thứ nhất có C_{10}^2 cách. Chọn 1 điểm trong 15 điểm của đường thứ 2 có C_{15}^1 cách. Số tam giác tạo thành của trường hợp 1 là $C_{10}^2.C_{15}^1 = 675$ tam giác.

Trường hợp 2: Chọn 1 điểm trong 10 điểm phân biệt của đường thứ nhất có C_{10}^1 cách. Chọn 2 điểm trong 15 điểm của đường thứ hai có C_{15}^2 cách. Số tam giác tạo thành của trường hợp 2 là $C_{10}^1.C_{15}^2 = 1050$ tam giác.

Theo quy tắc cộng có $675 + 1050 = 1725$ tam giác.

Trong mặt phẳng cho đa giác đều H có 10 cạnh.
a). Có bao nhiêu tam giác tạo thành từ đỉnh các tam giác.
b). Có bao nhiêu tam giác có đúng 2 cạnh của đa giác.
c). Có bao nhiêu tam giác có đúng 1 cạnh của đa giác.

d). Có bao nhiêu tam giác không chứa cạnh nào của đa giác.

LỜI GIẢI

a). Cứ 3 đỉnh phân biệt của đa giác H ta tạo được một tam giác. Số tam giác được tạo thành có đỉnh là ba đỉnh của hình H là $C_{10}^3 = 120$ tam giác.

b). Để lập được tam giác có đúng hai cạnh là cạnh của hình H, ta thực hiện hai bước sau:
Bước 1: Chọn 1 đỉnh là đỉnh của hình H có 10 cách.
Bước 2: Chọn hai đỉnh còn lại là hai đỉnh liền kề với đỉnh đã chọn, có 1 cách chọn. Vậy có 10 tam giác thỏa yêu cầu.

c). Để lập được tam giác có đúng hai cạnh là cạnh của hình H, ta thực hiện hai bước sau:
Bước 1: Chọn 1 cạnh là cạnh của hình H có 10 cách.
Bước 2: Chọn đỉnh còn lại (không kề với 2 đỉnh của cạnh đã chọn) có 6 cách chọn.
Theo quy tắc nhân có $10.6 = 60$ tam giác thỏa yêu cầu bài toán.

b). Số tam giác không có cạnh nào là cạnh của hình H là: $120 - (10 + 60) = 50$ tam giác.

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH TỔ HỢP

Câu 1: Giải các phương trình sau:

1). $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} - 3 = 9n$ 2). $\frac{P_{x+3}}{A_x^5 P_{x-5}} = 720$ 3). $\frac{C_{x+1}^2}{C_x^2} = \frac{3}{10}x$

4). $72A_x^1 - A_{x+1}^3 = 72$ 5). $C_n^3 = 5C_n^1$ 6). $A_{x+1}^3 + C_{x+1}^{x-1} = 14(x+1)$

7). $3C_{n+1}^2 + nP_2 = 4A_n^2$ 8). $C_{n+1}^2 - A_n^2 - 4n^3 = \left(A_{2n}^1\right)^2$

9). $4C_{x-1}^4 - 4C_{x-1}^3 - 5A_{x-2}^2 = 0$ 10). $P_x A_x^2 + 12 = 6A_x^2 + 2P_x$

11). $A_{2x}^2 - A_x^2 = \frac{6}{x}C_x^3 + 10$. 12). $\frac{5}{C_5^x} - \frac{2}{C_6^x} = \frac{14}{C_7^x}$

13). $C_n^{n-2}C_n^2 + 2C_n^2C_n^3 + C_n^3C_n^{n-3} = 100$ 14). $C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 = 9x^2 - 14x$

LỜI GIẢI

1). $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} - 3 = 9n$. Điều kiện $n \ge -1, n \in ¢$

$\Leftrightarrow \frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} - 3 = 9n \Leftrightarrow (n+3)(n+2) - 3 = 9n \quad \Leftrightarrow n^2 - 4n + 3 = 0 \Leftrightarrow n = 3 \vee n = 1$.

So với điều kiện nhận $n = 3$ và $n = 1$

2). $\frac{P_{x+3}}{A_x^5 P_{x-5}} = 720$. Điều kiện $x \ge 5, x \in ¥$

$\Leftrightarrow P_{x+3} = 720A_x^5P_{x-5} \Leftrightarrow (x+3)! = 720.\frac{x!}{(x-5)!}.(x-5)!$

$\Leftrightarrow (x+3)(x+2)(x+1)x! = 720.x! \Leftrightarrow (x+3)(x+2)(x+1) = 720 \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 11x - 714 = 0 \Leftrightarrow x = 7$

So với điều kiện nhận $x = 7$

3). $\frac{C_{x+1}^2}{C_x^2} = \frac{3}{10}x$. Điều kiện $x \ge 2, x \in ¥$

$\Leftrightarrow C_{x+1}^2 = \frac{3}{10}x.C_x^2 \Leftrightarrow \frac{(x+1)!}{2!(x-1)!} = \frac{3}{10}x.\frac{x!}{2!(x-2)!} \Leftrightarrow \frac{(x+1)x!}{(x-1)(x-2)!} = \frac{3}{10}x.\frac{x!}{(x-2)!}$

$\Leftrightarrow \frac{(x+1)}{(x-1)} = \frac{3}{10}x \Leftrightarrow 10(x+1) = 3x(x-1) \Leftrightarrow 3x^2 - 13x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -\frac{2}{3}$.

So với điều kiện nhận $x = 5$.

4). $72A_x^1 - A_{x+1}^3 = 72$. Điều kiện $x \ge 2, x \in ¥$

$\Leftrightarrow 72.\frac{x!}{(x-1)!} - \frac{(x+1)!}{(x-2)!} = 72 \Leftrightarrow 72.\frac{x(x-1)!}{(x-1)!} - \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)!}{(x-2)!} = 72 \Leftrightarrow 72x - (x+1)x(x-1) = 72$

$\Leftrightarrow x^3 - 73x + 72 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -9 \vee x = 8$

So với điều kiện nhận $x = 8$

5). $C_n^3 = 5C_n^1$. Điều kiện $n \ge 3, n \in ¢$

$\Leftrightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} = 5.\frac{n!}{(n-1)!} \Leftrightarrow \frac{1}{3!(n-3)!} = 5.\frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)!} \Leftrightarrow \frac{1}{6} = \frac{5}{(n-1)(n-2)}$

$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 28 = 0 \Leftrightarrow n = 7 \vee n = -4$

So với điều kiện nhận $n = 7$

6). $A_{x+1}^3 + C_{x+1}^{x-1} = 14(x+1)$. Điều kiện $x \ge 2, x \in ¢$

$\Leftrightarrow \frac{(x+1)!}{(x-2)!} + \frac{(x+1)!}{2!(x-1)!} = 14(x+1)$

$\Leftrightarrow \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)!}{(x-2)!} + \frac{(x+1)x(x-1)!}{2!(x-1)!} = 14(x+1)$

$\Leftrightarrow (x+1)x(x-1) + \frac{(x+1)x}{2} = 14(x+1) \Leftrightarrow 2x^3 - 2x + x^2 + x = 28(x+1)$

$\Leftrightarrow 2x^3 + x^2 - 29x - 28 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{7}{2} \vee x = 4 \vee x = -1$.

So với điều kiện nhận nghiệm $x = 4$.

7). $3C_{n+1}^2 + nP_2 = 4A_n^2$. Điều kiện $n \ge 2, n \in ¢$.

$\Leftrightarrow 3.\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} + 2n = 4.\frac{n!}{(n-2)!} \Leftrightarrow 3.\frac{(n+1)n(n-1)!}{2!(n-1)!} + 2n = 4.\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}$

$\Leftrightarrow \frac{3(n+1)n}{2} + 2n = 4n(n-1) \Leftrightarrow 3n^2 + 3n + 4n = 8n^2 - 8n$

$\Leftrightarrow 5n^2 - 15n = 0 \Leftrightarrow n = 0 \vee n = 3$

So với điều kiện nhận $n = 3$.

8). $C_{n+1}^2 - A_n^2 - 4n^3 = \left(A_{2n}^1\right)^2$. Điều kiện $n \ge 2, n \in ¢$

$\Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} - \frac{n!}{(n-2)!} - 4n^3 = \left[\frac{(2n)!}{(2n-1)!}\right]^2$

$\Leftrightarrow \frac{(n+1)n(n-1)!}{2!(n-1)!} - \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} - 4n^3 = \left[\frac{(2n)(2n-1)!}{(2n-1)!}\right]^2$

$\Leftrightarrow \frac{(n+1)n}{2} - n(n-1) - 4n^3 = 4n^2 \Leftrightarrow \frac{(n+1)}{2} - (n-1) - 4n^2 = 4n$

$\Leftrightarrow n+1-2n+2-8n^2 = 8n \Leftrightarrow 8n^2+9n-3=0$

9). $4C_{x-1}^4 - 4C_{x-1}^3 - 5A_{x-2}^2 = 0$. Điều kiện $x \ge 5, x \in ¢$

$\Leftrightarrow 4.\frac{(x-1)!}{4!(x-5)!} - 4.\frac{(x-1)!}{3!(x-4)!} - 5\frac{(x-2)!}{(x-4)!} = 0$

$\Leftrightarrow 4.\frac{(x-1)(x-2)!}{4!(x-5)!} - 4.\frac{(x-1)(x-2)!}{3!(x-4)(x-5)!} - 5\frac{(x-2)!}{(x-4)(x-5)!} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{x-1}{6} - \frac{2(x-1)}{3(x-4)} - \frac{5}{x-4} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4) - 4(x-1) - 30 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x - 22 = 0 \Leftrightarrow x = 11 \vee x = -2$.

So với điều kiện nhận $x = 11$

10). $P_x A_x^2 + 12 = 6A_x^2 + 2P_x$. Điều kiện $x \ge 2, x \in ¢$

$\Leftrightarrow (P_x A_x^2 - 2P_x) + (12 - 6A_x^2) = 0 \Leftrightarrow P_x(A_x^2 - 2) - 6(A_x^2 - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (A_x^2 - 2)(P_x - 6) = 0 \Leftrightarrow A_x^2 - 2 = 0 \vee P_x - 6 = 0$

Với $A_x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x!}{(x-2)!} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-1)(x-2)!}{(x-2)!} - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$.

Với $P_x - 6 = 0 \Leftrightarrow x! = 6 \Leftrightarrow x! = 3! \Rightarrow x = 3$

So với điều kiện nhận $x = 2 \vee x = 3$.

11). $A_{2x}^2 - A_x^2 = \frac{6}{x}C_x^3 + 10$. Điều kiện $x \ge 3, x \in ¢$.

$\Leftrightarrow \frac{(2x)!}{(2x-2)!} - \frac{x!}{(x-2)!} = \frac{6}{x}.\frac{x!}{3!(x-3)!} + 10$

$\Leftrightarrow \frac{(2x)(2x-1)(2x-2)!}{(2x-2)!} - \frac{x(x-1)(x-2)!}{(x-2)!} = \frac{6}{x}.\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)!}{3!(x-3)!} + 10$

$\Leftrightarrow (2x)(2x-1) - x(x-1) = (x-1)(x-2) + 10 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -2$.

So với điều kiện nhận $x = 3$.

12). $\frac{5}{C_5^x} - \frac{2}{C_6^x} = \frac{14}{C_7^x}$. Điều kiện $x \le 5, x \in ¥$

$\Leftrightarrow \frac{5}{\frac{5!}{x!(5-x)!}} - \frac{2}{\frac{6!}{x!(6-x)!}} = \frac{14}{\frac{7!}{x!(7-x)!}} \Leftrightarrow \frac{5(5-x)!}{5!} - \frac{2(6-x)!}{6!} = \frac{14(7-x)!}{7!}$

$\Leftrightarrow \frac{5(5-x)!}{5!} - \frac{2(6-x)(5-x)!}{6.5!} = \frac{14(7-x)(6-x)(5-x)!}{7.6.5!}$

$\Leftrightarrow 5 - \frac{6-x}{3} = \frac{(7-x)(6-x)}{3} \Leftrightarrow x^2 - 14x + 33 = 0 \Leftrightarrow x = 11 \vee x = 3$.

So với điều kiện nhận $x = 3$.

13). $C_n^{n-2}C_n^2 + 2C_n^2C_n^3 + C_n^3C_n^{n-3} = 100$ (1). Điều kiện $n \ge 3, n \in ¥$.

Ta có $C_n^{n-2}=C_n^2$ và $C_n^{n-3}=C_n^3$. Do đó (1) $\Leftrightarrow \left(C_n^2\right)^2+2C_n^2C_n^3+\left(C_n^3\right)^2=100$

$\Leftrightarrow \left(C_n^2+C_n^3\right)^2=10^2 \Rightarrow C_n^2+C_n^3=10 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{2!(n-2)!}+\dfrac{n!}{3!(n-3)!}=10$

$\Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!}+\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{3!(n-3)!}=10 \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)}{2}+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}=10$

$\Leftrightarrow n^3-n-60=0 \Rightarrow n=4$

So với điều kiện $n=4$ thỏa.

14). $C_x^1+6C_x^2+6C_x^3=9x^2-14x$ (1). Điều kiện $x\ge 3, x\in ¥$

$$\frac{x!}{(x-1)!}+6\frac{x!}{2!(x-2)!}+6.\frac{x!}{3!(x-3)!}=9x^2-14x$$

$$\Leftrightarrow x+3x(x-1)+x(x-1)(x-2)=9x^2-14x$$

$$\Leftrightarrow x^3-9x^2+14x=0 \Leftrightarrow x=7 \vee x=2 \vee x=0$$

So với điều kiện nhận x = 7.

Câu 2: Giải các bất phương trình:

a). $\dfrac{P_{x+3}}{A_x^5P_{x-5}}<720$ b) $72A_x^1-A_{x+1}^3>73$ c) $C_n^3\le 5C_n^1$

d) $C_{n+1}^2-A_n^2-4n^3\ge A_{2n}^1$ e) $3C_{n+1}^2+nP_2<4A_n^2$ f) $P_xA_x^2+72\le 6\left(A_x^2+2P_x\right)$

g) $A_{n+1}^3+C_{n+1}^{n-1}<14n+1$ h) $23A_n^4\le 24A_{n+1}^3-C_n^{n-4}$ i) $\dfrac{C_{n+1}^2}{C_n^2}\ge\dfrac{3n}{10}$

j) $4C_{x-1}^4-4C_{x-1}^3-5A_{x-2}^2\le 0$ k) $\dfrac{A_{n+1}^4}{n+2!}<\dfrac{143}{4P_n}$ l) $\dfrac{1}{2}A_{2x}^2-A_x^2\le\dfrac{6}{x}C_X^3+10$

LỜI GIẢI

a). $\dfrac{P_{x+3}}{A_x^5P_{x-5}}<720$. Điều kiện $x\ge 5, x\in ¥$

$\Leftrightarrow P_{x+3}<720A_x^5P_{x-5} \Leftrightarrow (x+3)!<720.\dfrac{x!}{(x-5)!}.(x-5)!$

$\Leftrightarrow (x+3)(x+2)(x+1)x!<720.x! \Leftrightarrow (x+3)(x+2)(x+1)<720$

$\Leftrightarrow x^3+6x^2+11x-714<0 \Leftrightarrow x<7$. So với điều kiện nghiệm của bất phương trình là $x=5 \vee x=6$.

b) $72A_x^1-A_{x+1}^3>72$. Điều kiện $x\ge 2, x\in ¥$

$\Leftrightarrow 72.\dfrac{x!}{(x-1)!}-\dfrac{(x+1)!}{(x-2)!}>72 \Leftrightarrow 72.\dfrac{x(x-1)!}{(x-1)!}-\dfrac{(x+1)x(x-1)(x-2)!}{(x-2)!}>72$

$\Leftrightarrow 72x-(x+1)x(x-1)>72 \Leftrightarrow 72x-\left(x^3-x\right)>72 \Leftrightarrow x^3-73x+72<0$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty;-9) \cup (1;8)$.

So với điều kiện nghiệm của bất phương trình $S = \{2,3,4,5,6,7\}$

c) $C_n^3 \le 5C_n^1$. Điều kiện $n \ge 3, n \in ¢$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} \le 5.\frac{n!}{(n-1)!} \Leftrightarrow \frac{1}{3!(n-3)!} \le 5.\frac{1}{(n-1)(n-2)(n-3)!} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \le \frac{5}{(n-1)(n-2)}$$

$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 28 \le 0 \Leftrightarrow -4 \le n \le 7$

So với điều kiện nghiệm của bất phương trình $S = \{3,4,5,6,7\}$

d) $C_{n+1}^2 - A_n^2 - 4n^3 \ge A_{2n}^1$

$C_{n+1}^2 - A_n^2 - 4n^3 = A_{2n}^1$. Điều kiện $n \ge 2, n \in ¢$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} - \frac{n!}{(n-2)!} - 4n^3 = \frac{(2n)!}{(2n-1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)(n-1)!}{2!(n-1)!} - \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} - 4n^3 = \frac{(2n)(2n-1)!}{(2n-1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)}{2} - n(n-1) - 4n^3 = 2n \Leftrightarrow n + 1 - 2n^2 + 2n - 8n^3 = 2n \Leftrightarrow 8n^3 + 2n^2 - n - 1 = 0$$

e) $3C_{n+1}^2 + nP_2 < 4A_n^2$. Điều kiện $n \ge 2, n \in ¢$

$$\Leftrightarrow 3.\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} + 2n < 4.\frac{n!}{(n-2)!} \Leftrightarrow 3.\frac{(n+1)n(n-1)!}{2!(n-1)!} + 2n < 4.\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(n+1)n}{2} + 2n < 4n(n-1) \Leftrightarrow \frac{3(n+1)}{2} + 2 < 4(n-1) \Leftrightarrow n > 3$$

So với điều kiện nghiệm bất phương trình $n > 3, n \in ¢$.

f) $P_xA_x^2 + 72 \le 6(A_x^2 + 2P_x)$. Điều kiện $x \ge 2, x \in ¢$ $\Leftrightarrow P_xA_x^2 - 6A_x^2 + 72 - 12P_x \le 0$

$\Leftrightarrow A_x^2(P_x - 6) - 12(P_x - 6) \le 0 \Leftrightarrow (P_x - 6)(A_x^2 - 12) \le 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_x - 6 \le 0 \\ A_x^2 - 12 \ge 0 \end{cases} \vee \begin{cases} P_x - 6 \ge 0 \\ A_x^2 - 12 \le 0 \end{cases}.$$

Giải $\begin{cases} P_x - 6 \le 0 \\ A_x^2 - 12 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_x \le 6 \\ A_x^2 \ge 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x! \le 3! \\ x^2 - x - 12 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ x \le -3 \vee x \ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \le -3$, so với điều kiện trường hợp này bị loại.

Giải $\begin{cases} P_x - 6 \ge 0 \\ A_x^2 - 12 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_x \ge 6 \\ A_x^2 \le 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x! \ge 3! \\ x^2 - x - 12 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ -3 \le x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \le x \le 4$. So với điều kiện nghiệm của bất phương trình $S = \{3;4\}$

g) $A_{n+1}^3 + C_{n+1}^{n-1} < 14(n+1)$. Điều kiện $n \ge 2, n \in ¥$.

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} < 14(n+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} + \frac{(n+1)n(n-1)!}{2!(n-1)!} < 14(n+1)$$

$\Leftrightarrow (n+1)n(n-1)+\frac{(n+1)n}{2}<14(n+1) \Leftrightarrow n(n-1)+\frac{n}{2}<14 \Leftrightarrow 2n^2-n-28<0 \Leftrightarrow -\frac{7}{2}<n<4$. So với điều kiện nghiệm bất phương trình $S=\{2,3\}$

h) $23A_n^4 \le 24\left(A_{n+1}^3-C_n^{n-4}\right)$. Điều kiện $n\ge 4, n\in ¢$

$\Leftrightarrow 23.\frac{n!}{(n-4)!}\le 24\left[\frac{(n+1)!}{(n-2)!}-\frac{n!}{4!(n-4)!}\right]$

$\Leftrightarrow \frac{23.n!}{(n-4)!}\le 24\left[\frac{(n+1)n!}{(n-2)(n-3)(n-4)!}-\frac{n!}{4!(n-4)!}\right]$

$\Leftrightarrow 23\le \frac{24(n+1)}{(n-2)(n-3)}-1 \Leftrightarrow 24(n-2)(n-3)\le 24(n+1) \Leftrightarrow n^2-6n+5\le 0$

$\Leftrightarrow 1\le n\le 5$. So với điều kiện nghiệm bất phương trình $S=\{4,5\}$

i) $\frac{C_{n+1}^2}{C_n^2}\ge \frac{3n}{10}$. Điều kiện $n\ge 2, n\in ¢$

$\Leftrightarrow C_{n+1}^2\ge \frac{3n}{10}C_n^2 \Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}\ge \frac{3n}{10}.\frac{n!}{2!(n-2)!} \Leftrightarrow \frac{(n+1)n!}{2!(n-1)(n-2)!}\ge \frac{3n}{10}.\frac{n!}{2!(n-2)!}$

$\Leftrightarrow \frac{(n+1)}{(n-1)}\ge \frac{3n}{10} \Leftrightarrow 3n^2-13n-10\le 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}\le n\le 5$. So với điều kiện nghiệm bất phương trình $S=\{2;3;4;5\}$.

j) $4C_{x-1}^4-4C_{x-1}^3-5A_{x-2}^2\le 0$

$C_{n-1}^4-C_{n-1}^3-\frac{5}{4}A_{n-2}^2<0 \quad (1)$. Điều kiện $n\ge 5, n\in ¥$

$(1)\Leftrightarrow \frac{(n-1)!}{4!(n-5)!}-\frac{(n-1)!}{3!(n-4)!}-\frac{5}{4}.\frac{(n-2)!}{(n-4)!}<0 \Leftrightarrow \frac{n-1}{24}-\frac{n-1}{6(n-4)}-\frac{5}{4}.\frac{1}{n-4}<0$

$\Leftrightarrow n^2-9n-22<0 \Leftrightarrow -2<n<11$

So với điều kiện nhận $n=5, n=6, n=7, n=8, n=9, n=10$

k) $\frac{A_{n+1}^4}{n+2!}<\frac{143}{4P_n} \qquad \frac{A_{n+2}^4}{P_{n+2}}-\frac{143}{4P_{n-1}}<0$. Điều kiện $n\ge 2, n\in ¢$

$\Leftrightarrow A_{n+1}^4 4P_n<143.(n+2)! \Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{(n-3)!}.4.n!<143.(n+2)!$

$\Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{(n-3)!}.4.n(n-1)(n-2)(n-3)!<143.(n+2)(n+1)!$

$\Leftrightarrow 4.n(n-1)(n-2)<143.(n+2)$

l). $\frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \le \frac{6}{x}C_x^3 + 10 \quad (1)$. Điều kiện $x \ge 3, x \in ¢$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}.\frac{(2x)!}{(2x-2)!} - \frac{x!}{(x-2)!} \le \frac{6}{x}.\frac{x!}{3!(x-3)!} + 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.\frac{2x(2x-1)(2x-2)!}{(2x-2)!} - \frac{x(x-1)(x-2)!}{(x-2)!} \le \frac{6}{x}.\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)!}{6(x-3)!} + 10$$

$$\Leftrightarrow x(2x-1) - x(x-1) \le (x-1)(x-2) + 10 \Leftrightarrow x \le 4$$

So với điều kiện nghiệm của bất phương trình $x = 3, x = 4$.