TÓM TẮT LÝ THUYẾT CHƯƠNG LƯỢNG GIÁC

I). TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ:

1). Hàm số chẵn, hàm số lẻ:

- Hàm số $y=f(x)$ với tập xác định D gọi là hàm số chẵn nếu: với mọi $x\in D$ thì $-x\in D$ và $f(-x)=f(x)$.
- Hàm số $y=f(x)$ với tập xác định D gọi là hàm số lẻ nếu: với mọi $x\in D$ thì $-x\in D$ và $f(-x)=-f(x)$.

Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.
Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

2). Hàm số đơn điệu:

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập $(a;b)\subset\mathbb{R}$.

- Hàm số $y=f(x)$ gọi là đồng biến (hay hàm số tăng) trên $(a;b)$ nếu $\forall x_1,x_2\in(a;b)$ có $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.
- Hàm số $y=f(x)$ gọi là nghịch biến (hay hàm số giảm) trên $(a;b)$ nếu $\forall x_1,x_2\in(a;b)$ có $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

3). Hàm số tuần hoàn:

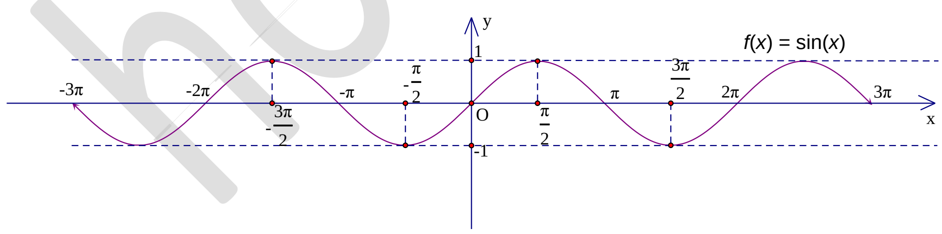
Hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập hợp D, được gọi là hàm số tuần hoàn nếu có số $T\neq 0$ sao cho với mọi $x\in D$ ta có $(x+T)\in D$ và $(x-T)\in D$ và $f(x+T)=f(x)$.

Nếu có số dương T nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên thì T gọi là chu kì của hàm tuần hoàn f.

II). HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC:

1). Hàm số sin: $y=\sin x$

Tính chất:
Tập xác định $\mathbb{R}$.
Tập giá trị: $[-1;1]$,có nghĩa là $-1\le\sin x\le 1,\forall x\in\mathbb{R}$.
Hàm số tuần hoàn với chu kì 2π, có nghĩa $\sin(x+k2\pi)=\sin x$ với $k\in\mathbb{Z}$.
Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right),k\in\mathbb{Z}$.
$y=\sin x$ là hàm số lẻ, đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O là tâm đối xứng (Hình 1).



Hình 1.

Một số giá trị đặc biệt:
$\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

$\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

$\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

2). Hàm số côsin: $y=\cos x$

Tính chất:

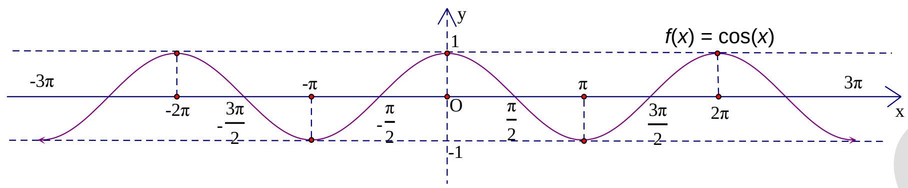
Tập xác định $\mathbb{R}$.

Tập giá trị: $\left[-1;1\right]$,có nghĩa là $-1\le\cos x\le 1,\forall x\in\mathbb{R}$.

Hàm số tuần hoàn với chu kì 2π, có nghĩa $\cos\left(x+k2\pi\right)=\cos x$ với $k\in\mathbb{Z}$.

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\pi+k2\pi;k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(k2\pi;\pi+k2\pi\right),k\in\mathbb{Z}$.

$y=\cos x$ là hàm số chẵn, đồ thị hàm số nhận Oy làm trục đối xứng (Hình 2).



Hình 2.

Một số giá trị đặc biệt:

$\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

$\cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

$\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

3). Hàm số tang: $y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

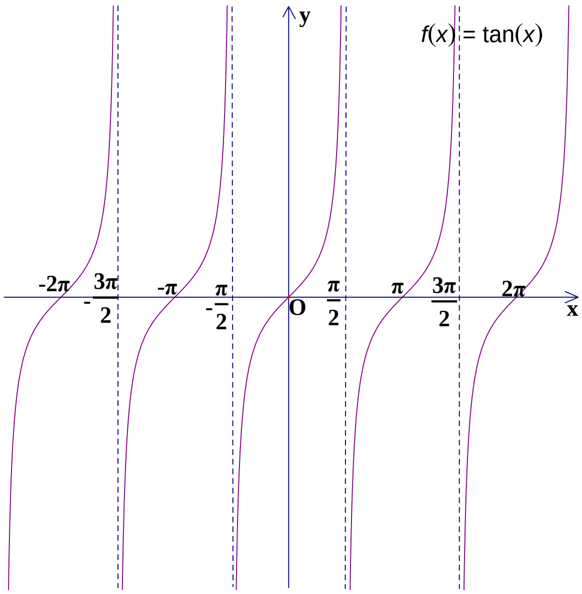
Tập xác định: $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}$

Tập giá trị là R.

Hàm số tuần hoàn với chu kì π, có nghĩa $\tan\left(x+k\pi\right)=\tan x,(k\in\mathbb{Z})$.

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right),\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

$y=\tan x$ là hàm số lẻ, đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng và nhận mỗi đường thẳng $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$ làm đường tiệm cận.(Hình 3)



Hình 3.

Một số giá trị đặc biệt :

$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

4). Hàm số cotang: $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$.

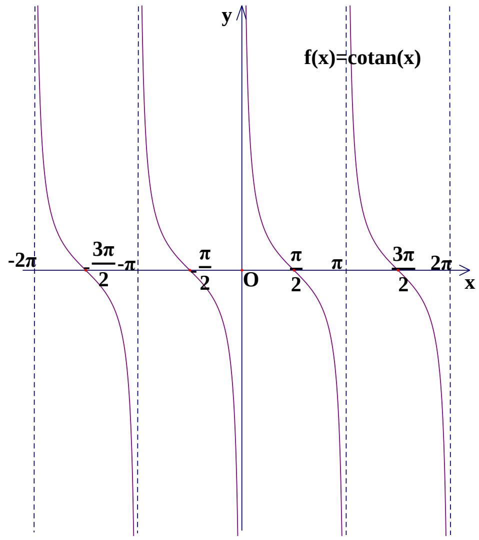
Tập giá trị: $\mathbb{R}$.

Tính chất:

Hàm số tuần hoàn với chu kì π, có nghĩa $\cot\left(x + k\pi\right) = \cot x, (k \in \mathbb{Z})$.

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(k\pi; \pi + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

$y = \cot x$ là hàm số lẻ, đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng và nhận mỗi đường thẳng $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ làm đường tiệm cận (Hình 4).



Hình 4

Một số giá trị đặc biệt :

$\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

ÔN TẬP: CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

HỆ THỨC CƠ BẢN

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ **2.** $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ **3.** $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

4. $\tan x.\cot x = 1$ **5.** $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ **6.** $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

Điều kiện tồn tại:

- tanx là $(x \neq \pi/2 + k\pi, k \in Z)$ • cotx là $(x \neq k\pi, k \in Z)$
- sinx là $-1 \leq \sin x \leq 1$ • cosx là $-1 \leq \cos x \leq 1$

chú ý:

- $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ • $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

CÔNG THỨC CỘNG

7. $\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$ **8.** $\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$

9. $\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$ **10.** $\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b$

11. $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$ **12.** $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}$

13. $\cot(a+b) = \frac{\cot a.\cot b - 1}{\cot a + \cot b}$ **14.** $\cot(a-b) = \frac{\cot a \cot b + 1}{\cot a - \cot b}$

CÔNG THỨC NHÂN

NHÂN ĐÔI

15. $\sin 2a = 2\sin a.\cos a$ **16.** $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a = \cos^2 a - \sin^2 a$

17. $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

NHÂN BA

18. $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$ **19.** $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$ **20.** $\tan 3a = \dfrac{3\tan a - \tan^3 a}{1-3\tan^2 a}$

HẠ BẬC

21. $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$ $\Rightarrow 1-\cos 2a = 2\sin^2 a$

22. $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$ $\Rightarrow 1+\cos 2a = 2\cos^2 a$

23. $\sin^3 a = \dfrac{3\sin a - \sin 3a}{4}$

24. $\cos^3 a = \dfrac{3\cos a + \cos 3a}{4}$

GÓC CHIA ĐÔI: với $t = \tan\dfrac{x}{2}$

25. $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ **26.** $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ **27.** $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$

TỔNG THÀNH TÍCH

28. $\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$ **29.** $\cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$

30. $\sin a + \sin b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$ **31.** $\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$

32. $\tan a + \tan b = \dfrac{\sin(a+b)}{\cos a\cos b}$ **33.** $\tan a - \tan b = \dfrac{\sin(a-b)}{\cos a\cos b}$

34. $\cot a + \cot b = \dfrac{\sin(a+b)}{\sin a\sin b}$ **35.** $\cot a - \cot b = \dfrac{-\sin(a-b)}{\sin a\sin b}$

TÍCH THÀNH TỔNG

36. $\cos a\cos b = \dfrac{1}{2}\left[\cos\left(a-b\right)+\cos(a+b)\right]$

37. $\sin a\sin b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$

38. $\sin a\cos b = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right]$

CUNG LIÊN KẾT

Góc đối nhau	**Góc bù nhau**	**Góc phụ nhau**
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cot\alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$	$\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \tan\alpha$

Góc hơn kém π	**Góc hơn kém $\frac{\pi}{2}$**
$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\alpha$
$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$
$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cot\alpha$
$\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\tan\alpha$

Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$ 2π
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	180^0	
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	||	$-\sqrt{3}$	-1	0	||
cot	||	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	||	||

CHÚ Ý:

- $1+\sin 2x=\left(\sin x+\cos x\right)^2$; $1-\sin 2x=(\sin x-\cos x)^2$;
- $1+\sin x=(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2$; $1-\sin x=\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2$
- $1-\cos 2x=2\sin^2 x$; $1+\cos 2x=2\cos^2 x$.
- $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$; $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$
- $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.
- $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.
- $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$
- $\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$; $\sin^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$

CÁC DẠNG TOÁN

VẤN ĐỀ 1: TÌM TẬP XÁC ĐỊNH, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA MỘT BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC.

DẠNG 1: TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA MỘT BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC :

PHƯƠNG PHÁP: Sử dụng các mệnh đề tương đương sau:

$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ xác định $\Leftrightarrow g(x)\neq 0$

$y=\sqrt[2n]{f(x)}, n\in\mathbb{N}^*$ xác định $\Leftrightarrow f(x)\geq 0$.

$y=\sin[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định.

$y=\cos[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định.

$y=\tan[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định và $u(x)\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

$y=\cot[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định và $u(x)\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Ví dụ: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a). $y=\sqrt{3-2\cos x}$ b). $y=\sin\dfrac{\pi^2}{2x-1}$ c). $y=\sin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}\right)$

d). $y=3\cot(2x+3)$ e). $y=2\sin 3x+\tan(1-4x)$ f). $y=\dfrac{\sin x}{\sin^2 x-\cos^2 x}$

LỜI GIẢI

a). $y=\sqrt{3-2\cos x}$, hàm số xác định khi $3-2\cos x\geq 0\Leftrightarrow \cos x\leq\dfrac{3}{2}$ (đúng $\forall x\in\mathbb{R}$), vì $-1\leq\cos x\leq 1, \forall x\in\mathbb{R}$. Suy ra tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

b). $y=\sin\dfrac{\pi^2}{2x-1}$ hàm số xác định $\Leftrightarrow \dfrac{\pi^2}{2x-1}$ xác định $\Leftrightarrow 2x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{1}{2}$. Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

c). $y=\sin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}\right)$ hàm số xác định $\Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ xác định $\Leftrightarrow x^2-4>0\Leftrightarrow x^2>4 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. Tập xác định của hàm số $D=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

d). $y=3\cot(2x+3)=\dfrac{3\cos(2x+3)}{\sin(2x+3)}$ hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin(2x+3)\neq 0 \Leftrightarrow 2x+3\neq k\pi$

$\Leftrightarrow x\neq-\dfrac{3}{2}+\dfrac{k\pi}{2}, (k\in\mathbb{Z})$.

Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{3}{2}+\dfrac{k\pi}{2}\middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

e). $y=2\sin 3x+\tan(1-4x)=2\sin 3x+\dfrac{\sin(1-4x)}{\cos(1-4x)}$ hàm số xác định $\Leftrightarrow \cos(1-4x)\neq 0\Leftrightarrow 1-4x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

$\Leftrightarrow x\neq\dfrac{1}{4}-\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{k\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}$. Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{4}-\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{k\pi}{4}\middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

f). $y=\dfrac{\sin x}{\sin^2 x-\cos^2 x}=\dfrac{\sin x}{-\cos 2x}=-\dfrac{\sin x}{\cos 2x}$ hàm số xác định $\Leftrightarrow \cos 2x\neq 0 \Leftrightarrow 2x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

$\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$. Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

DẠNG 2: TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT NHỎ NHẤT

Ví dụ: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a). $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ b). $y=\sqrt{4-2\sin^5(2x)}-8$ c). $y=\sin^6x+\cos^6x$

d). $y=\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos2x$ e). $y=\cos2x+4\sin x$ f). $y=\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}$

g). $y=3\cos x+2$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ h). $y=\tan x, x\in\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{6}\right]$

k). $y=\tan^2x-\tan x+2, x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ l). $y=2\sin^2x-\sin2x+7$

LỜI GIẢI

a). Ta có $-1\le\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\le1\Leftrightarrow-2\le2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\le2\Leftrightarrow-2\le y\le2$. Vậy:

- $\text{Min}y=-2$ khi $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.
- $\text{Max}y=2$ khi $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=-1\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

b). Ta có $-1\le\sin2x\le1\Leftrightarrow-1\le\sin^5(2x)\le1\Leftrightarrow2\ge-2\sin^5(2x)\ge-2\Leftrightarrow4+2\ge4-2\sin^5(2x)\ge4-2$

$\Leftrightarrow6\ge4-2\sin^5(2x)\ge2\Leftrightarrow\sqrt{6}\ge\sqrt{4-2\sin^5(2x)}\ge\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{6}-8\ge\sqrt{4-2\sin^5(2x)}-8\ge\sqrt{2}-8$

$\Leftrightarrow\sqrt{6}-8\ge y\ge\sqrt{2}-8$. Vậy :

- $\text{Min}y=\sqrt{2}-8$ khi $\sin2x=1\Leftrightarrow2x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.
- $\text{Max}y=\sqrt{6}-8$ khi $\sin2x=-1\Leftrightarrow2x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

c). $y=\sin^6x+\cos^6x=1-\frac{3}{4}\sin^22x$. Do $0\le\sin^22x\le1\Leftrightarrow-\frac{3}{4}.0\ge-\frac{3}{4}\sin^22x\ge-\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow1\ge1-\frac{3}{4}\sin^22x\ge1-\frac{3}{4}\Leftrightarrow1\ge y\ge\frac{1}{4}$. Vậy :

- $\text{Min}y=\frac{1}{4}$ khi $\sin^22x=1\Leftrightarrow\cos2x=0\Leftrightarrow2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.(vì $\sin^22x+\cos^22x=1$).
- $\text{Max}y=1$ khi $\sin^22x=0\Rightarrow\sin2x=0\Leftrightarrow2x=k\pi\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

d). $y=\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos2x=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

Vì $-1\le\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\le1\Leftrightarrow-1\le y\le1$.

e). $y=\cos2x+4\sin x=1-2\sin^2x+4\sin x=-2\left(\sin^2x-2\sin x+1\right)+3=3-2\left(\sin x-1\right)^2$

Ta có $-2\le\sin x-1\le0\Rightarrow4\ge\left(\sin x-1\right)^2\ge0\Leftrightarrow-8\le-2\left(\sin x-1\right)^2\le0\Leftrightarrow3-8\le3-2\left(\sin x-1\right)^2\le3+0$

$\Leftrightarrow-5\le y\le3$. Vậy :

- $\text{Min}y=-5$ khi $\sin x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.
- $\text{Max}y=3$ khi $\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

f). $y=\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}$

Vì $0 \le \sqrt{\sin x} \le 1$ và $0 \le \sqrt{\cos x} \le 1$ Do đó $-1 \le y \le 1$.

Lại có : Khi $x = 0$ thì $y = -1$.

Khi $x = \frac{\pi}{2}$ thì $y = 1$

Kết luận $\text{Max}y = 1$ và $\text{Min}y = -1$

g). $y = 3\cos x + 2$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Khi $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ thì $0 \le \cos x \le 1$ nên $2 \le 3\cos x + 2 \le 5 \Leftrightarrow 2 \le y \le 5$.

Vậy : $\text{Min}y = 2$ khi $x = \pm\frac{\pi}{2}$. $\text{Max}y = 5$ khi $x = 0$.

h). $y = \tan x, x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right]$

Ta có hàm số tanx đồng biến và xác định trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ mà $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right] \subset \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ do đó hàm số tanx đồng biến và xác định trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right]$. Từ đó ta có $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \le \tan x \le \tan\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow -\sqrt{3} \le \tan x \le \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} \le y \le \frac{\sqrt{3}}{3}$. Vậy :

$\text{Min}y = -\sqrt{3}$ khi $x = -\frac{\pi}{3}$. $\text{Max}y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ khi $x = \frac{\pi}{6}$.

k). Ta có $y = \tan^2 x - \tan x + 2 = \left(\tan x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$

Ta có hàm số tanx đồng biến và xác định trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ mà $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \subset \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ do đó hàm số tanx đồng biến và xác định trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$. Từ đó ta có $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \le \tan x \le \tan\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow -1 \le \tan x \le 1 \Rightarrow -1 - \frac{1}{2} \le \tan x - \frac{1}{2} \le 1 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \le \tan x - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \le \left(\tan x - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{7}{4} \le \left(\tan x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \le \frac{9}{4} + \frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{7}{4} \le y \le 4$.

- $\text{Min}y = \frac{7}{4}$ khi $\tan x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \arctan\frac{1}{2}$.
- $\text{Max}y = 4$ khi $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

l). $y = 2\sin^2 x - \sin 2x + 7 = 2.\frac{1 - \cos 2x}{2} - \sin 2x + 7 = -\cos 2x - \sin 2x + 8$

$= -2(\cos 2x + \sin 2x) + 8 = -2\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 8$.

Có $-1 \le \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} \ge -2\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \ge -2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}+8 \ge -2\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+8 \ge -2\sqrt{2}+8 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}+8 \ge y \ge -2\sqrt{2}+8$. Vậy :

- $\mathrm{Min}y = -2\sqrt{2}+8$ khi $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.
- $\mathrm{Max}y = 2\sqrt{2}+8$ khi $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\pi+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{4}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau trên khoảng đã chỉ ra:

$y=\sin x+\frac{1}{\sin x}$ trên khoảng $(0;\pi)$

$y=\frac{(\sin x+\cos x)^3}{\cos x\sin^2 x}$ trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

VẤN ĐỀ 2: TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

DẠNG 1: XÉT TÍNH CHẴN, LẺ CỦA HÀM SỐ

Ví dụ: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số lượng giác sau :

a). $y=f(x)=\tan x+\cot x$ b). $y=f(x)=\sin\left(2x+\frac{9\pi}{2}\right)$

c). $y=-2\cos^3\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$ d). $y=\tan^7 2x.\sin 5x$

e). $y=\sin^3(3x+5\pi)+\cot(2x-7\pi)$ f). $y=\cot(4x+5\pi)\tan(2x-3\pi)$

g). $y=\sin\sqrt{x^2-16}$ h). $y=\sin^2 2x+\cos 3x$

LỜI GIẢI

a). Để hàm số có nghĩa $\Leftrightarrow \begin{cases}\cos x\ne 0\\ \sin x\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ne \frac{\pi}{2}+k\pi\\ x\ne l\pi\end{cases}$ (với $k,l\in\mathbb{Z}$). Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, l\pi \middle| k,l\in\mathbb{Z}\right\}$

, là một tập đối xứng. Do đó $\forall x\in D$ thì $-x\in D$

Ta có $f(-x)=\tan(-x)+\cot(-x)=-\tan x-\cot x=-(\tan x+\cot x)=-f(x)$. Vậy hàm số f(x) là hàm số lẻ. Đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

b). Tập xác định $D=\mathbb{R}$, là một tập đối xứng. Do đó $\forall x\in D$ thì $-x\in D$.

Ta có $f(x)=\sin\left(2x+\frac{9\pi}{2}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}+4\pi\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$.

Có $f(-x)=\cos(-2x)=\cos 2x=f(x)$. Vậy hàm số f(x) là hàm số chẵn. Đồ thị hàm số nhận trung tung Oy làm trục đối xứng.

d). $y=f(x)=\tan^7 2x.\sin 5x$. Hàm số có nghĩa khi $\cos 2x\ne 0 \Leftrightarrow 2x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x\ne\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$. Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$, là một tập đối xứng. Do đó $\forall x\in D$ thì $-x\in D$. Ta có

$f(-x)=\tan^7(-2x).\sin(-5x)=\tan^7 2x.\sin 5x=f(x)$. Vậy hàm số f(x) là hàm số chẵn. Đồ thị hàm số nhận trung tung Oy làm trục đối xứng.

e). $y=f(x)=\sin^3(3x+5\pi)+\cot(2x-7\pi)=-\sin^3 3x+\cot 2x$. Hàm số có nghĩa khi

$\sin 2x\ne 0 \Leftrightarrow 2x\ne k\pi \Leftrightarrow x\ne\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$. Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}$, là một tập đối xứng. Do đó

$\forall x \in D$ thì $-x \in D$. Ta có $f\left(-x\right) = -\sin^3(-3x) + \cot(-2x) = \sin^3 3x - \cot 2x = -\left(-\sin^3 3x + \cot 2x\right) = -f\left(x\right)$.
Vậy hàm số f(x) là hàm số lẻ. Đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng.
f). $y = f\left(x\right) = \cot\left(4x + 5\pi\right)\tan\left(2x - 3\pi\right) = \cot 4x.\tan 2x$. Hàm số có nghĩa khi

$\begin{cases} \sin 4x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \neq k\pi \\ 2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{k\pi}{4} \\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \dfrac{k\pi}{4}$. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, là một tập đối xứng. Do đó $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.

Ta có $f\left(-x\right) = \cot(-4x).\tan(-2x) = \cot 4x.\tan 2x = f\left(x\right)$. Vậy hàm số f(x) là hàm số chẵn. Đồ thị hàm số nhận trung tung Oy làm trục đối xứng.

g). $y = \sin\sqrt{x^2 - 16}$. Hàm số có nghĩa khi $x^2 - 16 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -4\right] \cup \left[4; +\infty\right)$. Tập xác định $D = \left(-\infty; -4\right] \cup \left[4; +\infty\right)$, là một tập đối xứng. Do đó $\forall x \in D$ thì $-x \in D$. Ta có $f\left(-x\right) = \sin\sqrt{(-x)^2 - 16} = \sin\sqrt{x^2 - 16} = f\left(x\right)$. Vậy hàm số f(x) là hàm số chẵn. Đồ thị hàm số nhận trung tung Oy làm trục đối xứng.

h). $y = \sin^2 2x + \cos 3x$. Tập xác định $D = \mathbb{R}$, là một tập đối xứng. Do đó $\forall x \in D$ thì $-x \in D$. Ta có $f\left(-x\right) = \sin^2(-2x) + \cos(-3x) = \sin^2 2x + \cos 3x = f\left(x\right)$. Vậy hàm số f(x) là hàm số chẵn. Đồ thị hàm số nhận trung tung Oy làm trục đối xứng.

DẠNG 2: TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

PHƯƠNG PHÁP :
Vẽ vòng tròn lượng giác.
Biểu diễn các cung lượng giác trên vòng tròn lượng giác.
Dựa vào định nghĩa của các hàm số lượng giác để xét các khoảng đồng biến nghịch biến của hàm số lượng giác.

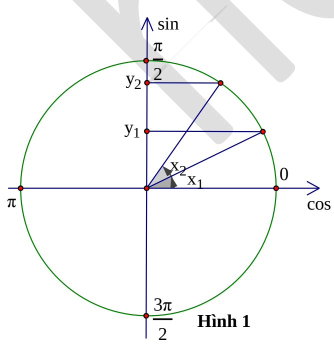
Ví dụ : Xét tính tăng giảm và lập bảng biến thiên của các hàm số lượng giác sau :

a). $y = 2\sin x$ trên $\left(0; \pi\right)$ b). $y = \sin 2x$ trên $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$

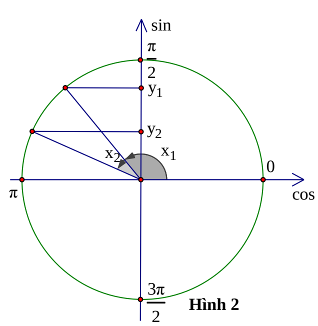
c). $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ trên $\left[-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}\right]$ d). $y = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ trên $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$

LỜI GIẢI

a).



Hình 1



Hình 2

$\forall x_1, x_2 \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right)$ (Hình 1). Suy ra hàm số f(x) đồng biến trên $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

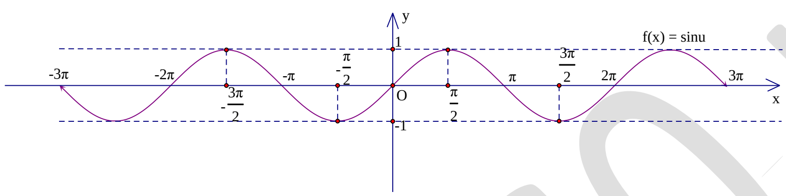
$\forall x_1, x_2 \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right)$ (Hình 2). Suy ra hàm số f(x) nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

Bảng biến thiên :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

b). $y = \sin 2x$ trên $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Vì $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 2x \in \left[-\pi;\pi\right]$. Đặt $u = 2x$, đồ thị hàm số $y = \sin u$ như sau :



Khi x biến thiên trong $\left(-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4}\right)$ thì 2x biến thiên trong $\left(-\pi;-\frac{\pi}{2}\right)$, nên hàm số $y = \sin 2x$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4}\right)$.

Khi x biến thiên trong $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$ thì 2x biến thiên trong $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, nên hàm số $y = \sin 2x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$.

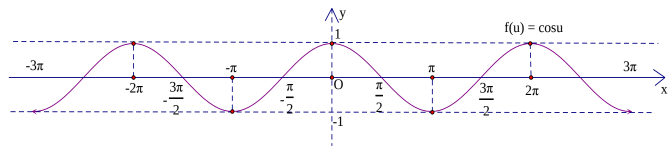
Khi x biến thiên trong $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ thì 2x biến thiên trong $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, nên hàm số $y = \sin 2x$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = \sin 2x$:

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$		$\nearrow$	1	$\searrow$	0

c). $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ trên $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$

Vì $x \in \left[-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right] \Rightarrow \left(x - \frac{\pi}{3}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Đặt $u = \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, đồ thị hàm số $y = \cos u$ như sau :



Khi x biến thiên trong $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$ thì $\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ biến thiên trong $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$, nên hàm số $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right)$.

Khi x biến thiên trong $\left(\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right)$ thì $\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ biến thiên trong $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, nên hàm số $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{6}\right)$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ trên $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$

x	$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$
f(x)	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

d). $y=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

vì hàm $y=\frac{\pi}{4}-x$ nghịch biến trên R và hàm số $y=\tan u$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định. Do đó hàm số $y=\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

Lại có khi $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ thì $\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$ và trong khoảng này hàm số không xác định $\Leftrightarrow \frac{\pi}{4}-x=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}$. Suy ra bảng biến thiên của hàm số như sau :

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f(x)	-1	$\searrow$	||	$\searrow$	-1

DẠNG 3: TÍNH TUẦN HOÀN CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Ví dụ : Chứng minh các hàm số lượng giác sau đây là hàm tuần hoàn và tìm chu kì (nếu có) của chúng :

a). $y=\sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)$ b). $y=2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1$ c). $y=3\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

d). $y=\frac{2}{\sin x}$ f). $y=\frac{1}{\cos 2x}$ g). $y=4\cos^3\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

LỜI GIẢI

a). $y=\sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)$. Tập xác định $D=\mathbb{R}$

Cách 1 : Ta có $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} (x \pm \pi) \in \mathbb{R} \\ f(x+\pi) = \sin\left[4(x+\pi)+\frac{\pi}{4}\right] = \sin\left(4x+\frac{\pi}{4}+4\pi\right) = \sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right) = f(x) \end{cases}$

Vậy f(x) là hàm tuần hoàn.

Tìm chu kì của f(x) : Giả sử L là chu kì của hàm số $f(x) = \sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)$ thì L là số dương nhỏ nhất thỏa

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+L) = f(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sin\left[4(x+L)+\frac{\pi}{4}\right] = \sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sin\left(4x+\frac{\pi}{4}+4L\right) = \sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)$ (1)

Mặt khác số dương T nhỏ nhất thỏa $\forall u \in \mathbb{R}, \begin{cases} (u \pm T) \in \mathbb{R} \\ \sin(u+T) = \sin u \end{cases}$ chính là 2π (2).

Từ (1) và (2) suy ra $4L = 2\pi \Leftrightarrow L = \frac{\pi}{2}$.

Cách 2 :

Giả sử $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+L) = f(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sin\left[4(x+L)+\frac{\pi}{4}\right] = \sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sin\left(4x+\frac{\pi}{4}+4L\right) = \sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)$ (1).

Với $x = \frac{\pi}{16}$ thì (1) phải đúng, có nghĩa ta có $\sin\left(4.\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{4}+4L\right) = \sin\left(4.\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}+4L\right) = \sin\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}+4L\right) = 1 \Leftrightarrow \cos 4L = 1 \Leftrightarrow 4L = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow L = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Ngược lại với $L = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ta có:

$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} (x \pm \frac{k\pi}{2}) \in \mathbb{R} \\ f\left(x+\frac{k\pi}{2}\right) = \sin\left[4\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{4}\right] = \sin\left(4x+\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) = \sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right) = f(x) \end{cases}$

Vậy $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} (x \pm L) \in \mathbb{R} \\ f(x+L) = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow L = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ (*).

Từ (*) chứng tỏ hàm số f(x) là hàm tuần hoàn.

Mặt khác trong các số $L = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ thì $L = \frac{\pi}{2}$ là số nguyên dương nhỏ nhất. Vậy chu kì của hàm số f(x) là $\frac{\pi}{2}$.

b). $y = f(x) = 2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1 = 2+\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$. Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Cách 1 : Ta có $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $(x \pm \pi) \in \mathbb{R}$ và $f(x+\pi) = 2 + \cos\left(2(x+\pi) + \frac{2\pi}{3}\right)$

$= 2 + \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3} + 2\pi\right) = 2 + \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = f(x)$.

Vậy f(x) là hàm tuần hoàn.

Tìm chu kì của f(x) : Giả sử L là chu kì của hàm số $f(x) = 2 + \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ thì L là số dương nhỏ nhất thỏa $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+L) = f(x)$ $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2 + \cos\left[2(x+L) + \frac{2\pi}{3}\right] = 2 + \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3} + 2L\right) = \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ (1)

Mặt khác số dương T nhỏ nhất thỏa $\forall u \in \mathbb{R}, \begin{cases} (u \pm T) \in \mathbb{R} \\ \cos(u+T) = \cos u \end{cases}$ chính là 2π (2).

Từ (1) và (2) suy ra $2L = 2\pi \Leftrightarrow L = \pi$. Kết luận chu kì của f(x) là π.

Cách 2 :

Giả sử $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+L) = f(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 2 + \cos\left(2(x+L) + \frac{2\pi}{3}\right) = 2 + \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3} + 2L\right) = \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$ (1).

Với $x = -\frac{\pi}{3}$ thì (1) phải đúng, có nghĩa ta có

$\cos\left(2(-\frac{\pi}{3}) + \frac{2\pi}{3} + 2L\right) = \cos\left(2(-\frac{\pi}{3}) + \frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \cos 2L = 1 \Leftrightarrow 2L = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow L = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ngược lại với $L = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ta có $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} (x \pm k\pi) \in \mathbb{R} \\ f(x+k\pi) = 2 + \cos\left[2(x+k\pi) + \frac{2\pi}{3}\right] = 2 + \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3} + k2\pi\right) = 2 + \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = f(x) \end{cases}$$

Vậy $\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} (x \pm L) \in \mathbb{R} \\ f(x+L) = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow L = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (*). Từ (*) chứng tỏ hàm số f(x) là hàm tuần hoàn.

Mặt khác trong các số $L = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ thì $L = \pi$ là số dương nhỏ nhất. Vậy chu kì của hàm số f(x) là π.

c). $y = 3\tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

Hàm số xác định khi $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Giả sử $\forall x \in D, f(x+L) = f(x) \Leftrightarrow \forall x \in D, 3\tan\left[2(x+L) + \frac{\pi}{4}\right] = 3\tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ (1).

Với $x = -\frac{\pi}{6}$ thì (1) phải đúng, có nghĩa ta phải có :

$3\tan\left[2(-\frac{\pi}{8}+L)+\frac{\pi}{4}\right]=3\tan\left(2(-\frac{\pi}{8})+\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow \tan 2L=\tan 0 \Leftrightarrow 2L=k\pi,k\in\mathbb{Z}\Rightarrow L=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

Ngược lại với $L=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$, ta có:

$\forall x\in D,\begin{cases}\left(x\pm\frac{k\pi}{2}\right)\in D\\ f\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)=3\tan\left[2\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=3\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}+k\pi\right)=3\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=f(x)\end{cases}$ Vậy

$\forall x\in D,\begin{cases}(x\pm L)\in D\\ f(x+L)=f(x)\end{cases}\Leftrightarrow L=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$ (*).

Từ (*) chứng tỏ rằng f(x) là hàm tuần hoàn.

Mặt khác trong các số $L=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$ thì $L=\frac{\pi}{2}$ là số dương nhỏ nhất. Vậy chu kì của hàm số f(x) là $\frac{\pi}{2}$.

d). Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$

Ta xét đẳng thức $f(x+T)=f(x)\Leftrightarrow\frac{1}{\sin(x+T)}=\frac{1}{\sin x}\Leftrightarrow\sin(x+T)=\sin x$

chọn $x=\frac{\pi}{2}$ thì $\sin x=1$ và do đó $\sin\left(\frac{\pi}{2}+T\right)=1\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}+T=\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow T=k2\pi,k\in\mathbb{Z}$. Số dương nhỏ nhất trong các số T là 2π.

Rõ ràng $\forall x\in D,(x\pm k2\pi)\in D$ và $f(x+k2\pi)=\frac{1}{\sin(x+k2\pi)}=\frac{1}{\sin x}=f(x)$. Do đó f là hàm số tuần hoàn với chu kì $T=2\pi$.

VẤN ĐỀ 3: VẼ ĐỒ THỊ CỦA MỘT HÀM SỐ SUY RA TỪ MỘT ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ ĐÃ BIẾT

PHƯƠNG PHÁP:

Giả sử hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là (C).

Đồ thị (C') của hàm số $y=k.f(x),k\in\mathbb{R}$ được suy ra từ (C) bằng cách biến mỗi điểm $(x;y)$ của (C) thành điểm $(x;ky)$ của (C′).

Đồ thị (C') của hàm số $y=f(kx),k\in\mathbb{R}$ được suy ra từ (C) bằng cách biến mỗi điểm $(x;y)$ của (C) thành điểm $\left(\frac{1}{|k|}x;y\right)$ của (C′) nếu $k>0$ hoặc thành điểm $\left(\frac{1}{|k|}x;-y\right)$ của (C′) nếu $k<0$.

Đồ thị (C') của hàm số $y=f(x+k),k\in\mathbb{R}$ được suy ra từ (C) bằng cách biến mỗi điểm $(x;y)$ của (C) thành điểm $(x-k;y)$ của (C′) hoặc thực hiện phép tịnh tiến đồ thị (C) theo véc tơ $\vec{u}=(-k;0)$.

Đồ thị (C') của hàm số $y=f(x)+k,k\in\mathbb{R}$ được suy ra từ (C) bằng cách biến mỗi điểm $(x;y)$ của (C) thành điểm $(x;y+k)$ của (C′) hoặc thực hiện phép tịnh tiến đồ thị (C) theo véc tơ $\vec{u}=(0;k)$.

Đồ thị của hai hàm số $y=f(x)$ và $y=-f(x)$ đối xứng với nhau qua trục hoành.

Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

Ví dụ: Từ đồ thị hàm số $y=\sin x$ hãy suy ra đồ thị của mỗi hàm số sau:

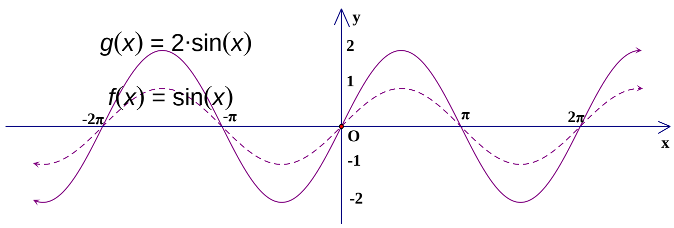
a). $y = 2\sin x$ b). $y = -\frac{1}{2}\sin x$ c). $y = \sin 3x$ d). $y = \sin\left(-\frac{1}{2}x\right)$

e). $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ f). $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ g). $y = \sin x + 2$ h). $y = 2\cos^2 x + 1$.

LỜI GIẢI

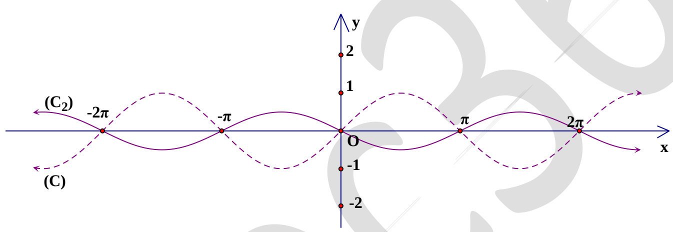
Gọi đồ thị của hàm số $y = \sin x$ là (C)

a). Đồ thị (C_1) của hàm số $y = 2\sin x$ được suy ra từ (C) bằng cách biến mỗi điểm $(x;y)$ của (C) thành điểm $(x;2y)$ của (C_1), hay nói cách khác đồ thị (C_1) nhận được bằng cách thực hiện phép giãn đồ thị (C) theo phương trục tung hai lần (hình 1).



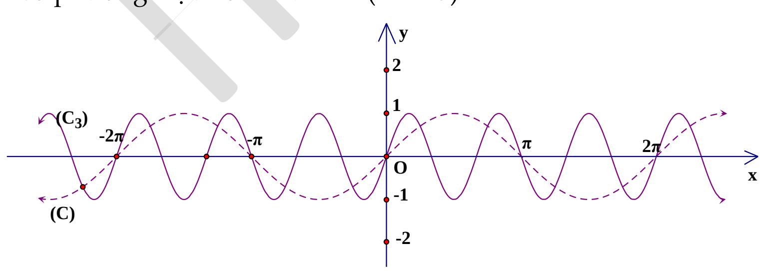
Hình 1

b). Đồ thị (C_2) của hàm số $y = -\frac{1}{2}\sin x$ được suy ra từ (C) bằng cách biến mỗi điểm $(x;y)$ của (C) thành điểm $\left(x;-\frac{1}{2}y\right)$ của (C_2), hay nói cách khác đồ thị (C_2) nhận được bằng cách thực hiện phép giãn đồ thị (C) theo phương trục tung hai lần (hình 2).



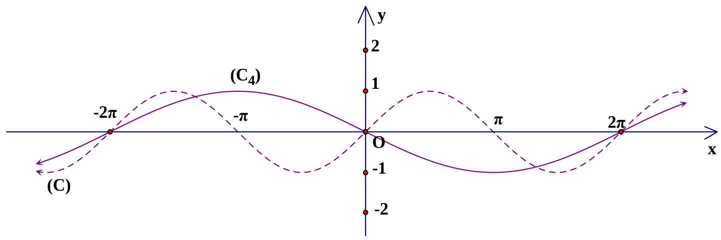
Hình 2

c). Đồ thị (C_3) của hàm số $y = \sin 3x$ được suy ra từ (C) bằng cách biến mỗi điểm $(x;y)$ của (C) thành điểm $\left(\frac{x}{3};y\right)$ của (C_3), hay nói cách khác đồ thị (C_3) nhận được bằng cách thực hiện phép co đồ thị (C) theo phương trục hoành ba lần (hình 3).



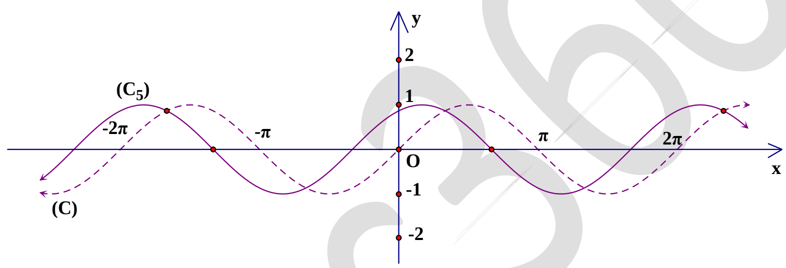
Hình 3

d). Đồ thị $\left(C_4\right)$ của hàm số $y=\sin\left(-\frac{1}{2}x\right)$ được suy ra từ (C) bằng cách biến mỗi điểm $\left(x;y\right)$ của (C) thành điểm $\left(2x;-y\right)$ của $\left(C_4\right)$, hay nói cách khác đồ thị $\left(C_4\right)$ nhận được bằng cách thực hiện phép giãn đồ thị (C) theo phương trục hoành hai lần để được đồ thị (C′) và sau đó thực hiện phép đối xứng (C′) qua trục hoành được $\left(C_4\right)$ (hình 4).



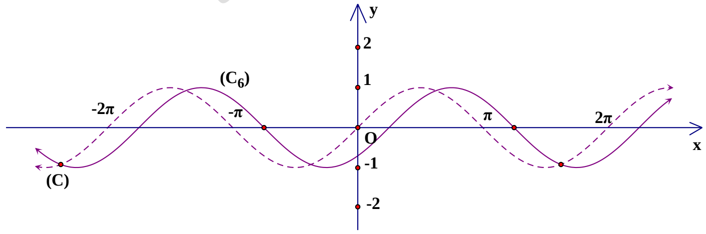
Hình 4

e). Đồ thị $\left(C_5\right)$ của hàm số $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ được suy ra từ (C) bằng cách biến mỗi điểm $\left(x;y\right)$ của (C) thành điểm $\left(x-\frac{\pi}{3};y\right)$ của $\left(C_5\right)$, hay nói cách khác đồ thị $\left(C_5\right)$nhận được bằng cách thực hiện phép tịnh tiến (C) theo véctơ $\vec{u}=\left(-\frac{\pi}{3};0\right)$ tức là tịnh tiến (C) theo phương trục hoành sang trái một đoạn $\frac{\pi}{3}$ đơn vị (hình 5).



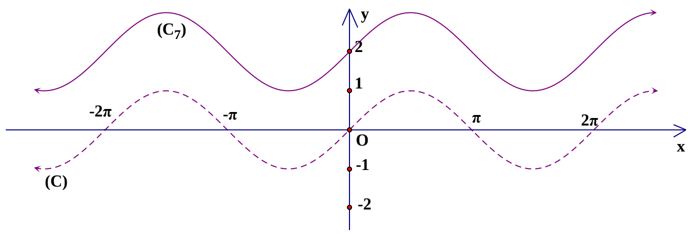
Hình 5

f). Đồ thị $\left(C_6\right)$ của hàm số $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ được suy ra từ (C) bằng cách biến mỗi điểm $\left(x;y\right)$ của (C) thành điểm $\left(x+\frac{\pi}{4};y\right)$ của $\left(C_6\right)$, hay nói cách khác đồ thị $\left(C_6\right)$nhận được bằng cách thực hiện phép tịnh tiến (C) theo véctơ $\vec{u}=\left(\frac{\pi}{4};0\right)$ tức là tịnh tiến (C) theo phương trục hoành sang phải một đoạn $\frac{\pi}{4}$ đơn vị (hình 6).



Hình 6

g). Đồ thị $\left(C_7\right)$ của hàm số $y=\sin x+2$ được suy ra từ (C) bằng cách biến mỗi điểm $\left(x;y\right)$ của (C) thành điểm $\left(x;y+2\right)$ của $\left(C_7\right)$, hay nói cách khác đồ thị $\left(C_7\right)$ nhận được bằng cách thực hiện phép tịnh tiến (C) theo véctơ $\vec{u}=\left(0;2\right)$ tức là tịnh tiến (C) theo phương trục tung lên trên một đoạn 2 đơn vị (hình 7).



Hình 7

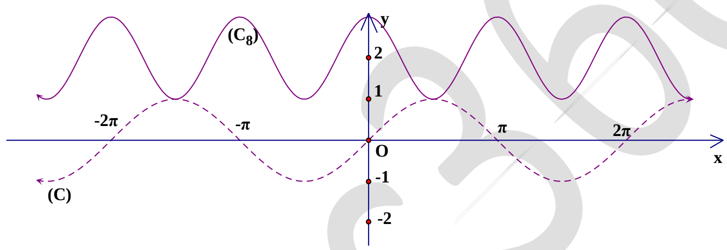
h). Ta có $y=2\cos^2 x+1=\cos 2x+2=\sin\left(-2x+\frac{\pi}{2}\right)+2$.

Đồ thị $\left(C_8\right)$ của hàm số $y=2\cos^2 x+1$ được suy ra từ đồ thị (C) bằn cách thực hiện các phép biến đổi sau:

Phép co đồ thị $\left(C\right)$ hai lần theo phương trục hoành được đồ thị (C′) và lấy đối xứng (C′) qua trục hoành được (C′′).

Tịnh tiến (C′′) theo phương trục hoành sang trái một đoạn $\frac{\pi}{4}$ đơn vị được (C′′′).

Tịnh tiến (C′′′) theo phương trục tung lên trên một đoạn 2 đơn vị được đồ thị $\left(C_8\right)$ cần tìm (Hình 8).



Hình 8

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Câu 1: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a). $y=\tan\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)$ b). $y=\cos x+\frac{1}{\cos x}$ c). $y=\tan 2x\cot 8x$

d). $y=\sqrt{2\cos x-\sqrt{3}}$ e). $y=\frac{2+3\sin 2x}{\cos 2x-1}$ f). $y=\frac{3\sin 3x}{\sqrt{1-\cos x}}$

g). $y=\sqrt{2+3\tan^2 2x}$ h). $y=\frac{1}{\sqrt{1+\sin^3 x}}$. k). $y=\frac{\sin x}{\tan^2\frac{x}{2}}$

LỜI GIẢI

a). $y=\tan\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)}$ hàm số xác định $\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)\neq 0$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}\cos x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow \cos x\neq 1+2k$

b). $y=\cos x+\frac{1}{\cos x}$ hàm số xác định $\Leftrightarrow \cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi$. Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

c). $y=\tan 2x\cot 8x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\frac{\cos 8x}{\sin 8x}$ hàm số xác định

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x\neq 0\\ \sin 8x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi\\ 8x\neq k\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\\ x\neq \frac{k\pi}{8}\end{cases} \Leftrightarrow x\neq \frac{k\pi}{8}, k\in\mathbb{Z}.$$

Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{k\pi}{8}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

e). $y=\frac{2+3\sin 2x}{\cos 2x-1}$ hàm số xác định $\cos 2x-1\neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x\neq 1 \Leftrightarrow 2x\neq k2\pi \Leftrightarrow x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\backslash\{k\pi | k\in\mathbb{Z}\}$.

f). $y=\frac{3\sin 3x}{\sqrt{1-\cos x}}$ hàm số xác định $\Leftrightarrow 1-\cos x>0 \Leftrightarrow \cos x\neq 1 \Leftrightarrow x\neq k2\pi, k\in\mathbb{Z}$.
Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\backslash\{k2\pi | k\in\mathbb{Z}\}$.

g). $y=\sqrt{2+3\tan^2 2x}$ hàm số xác định $\Leftrightarrow \cos 2x\neq 0 \Leftrightarrow 2x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x\neq \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$. Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

h). $y=\frac{1}{\sqrt{1+\sin^3 x}}$ hàm số xác định $\Leftrightarrow 1+\sin^3 x>0 \Leftrightarrow \sin x\neq -1 \Leftrightarrow x\neq -\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$. Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{\pi}{2}+k2\pi \middle| k\in\mathbb{Z}\right\}$.

k). $y=\frac{\sin x}{\tan^2\frac{x}{2}}$ hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases}\tan\frac{x}{2}\neq 0\\ \cos\frac{x}{2}\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x}{2}\neq k\pi\\ \frac{x}{2}\neq \frac{\pi}{2}+k\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq k2\pi\\ x\neq \pi+k2\pi\end{cases} \Leftrightarrow x\neq k\pi, (k\in\mathbb{Z})$. Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\backslash\{k\pi | k\in\mathbb{Z}\}$.

Câu 2: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a). $y=4\tan^2 x, x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ b). $y=\sin x-\cos x$ trên $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

c). $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right), x\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$ d). $y=\cot\left(x+\frac{\pi}{4}\right), x\in\left[-\frac{3\pi}{4};-\frac{\pi}{3}\right]$

e). $y=4\cos^2 x+4\cos x-1$ trên R f). $y=|\sin x-\cos 2x|$ trên R g). $y=|\sin x|+|\cos x|$

h). $y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$

k). $y=-5\cos^2 x+2\sin x+8$ trên $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$ l). $y=2\sin x+2\cos x-2\sin 2x$ trên R m). $y = 4\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) - 6\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right) - \sin^2 4x$

LỜI GIẢI

a). Ta có hàm số tanx đồng biến và xác định trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ mà $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right] \subset \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ do đó hàm số tanx đồng biến và xác định trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$. Từ đó ta có $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \le \tan x \le \tan\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow -1 \le \tan x \le 1 \Rightarrow 0 \le \tan^2 x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le y \le 4$. Vậy: $\underset{\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]}{\operatorname{Max}} y = 4$ khi $x = \pm\frac{\pi}{4}$; $\underset{\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]}{\min} y = 0$ khi $x = 0$.

b). Ta có $y = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x - \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Vì $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \le x - \frac{\pi}{4} \le 0$. Ta có hàm số sinx đồng biến trên $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$. Do đó

$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \le \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le \sin 0 \Leftrightarrow -1 \le \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le 0 \Rightarrow -\sqrt{2} \le y \le 0$.

Vậy: $\underset{\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]}{\max} y = 0$ khi $x = \frac{\pi}{4}$ $\underset{\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]}{\min} y = -\sqrt{2}$ khi $x = -\frac{\pi}{4}$.

c). $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right), x \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$. Do $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \le 2x \le \frac{\pi}{2}$ $\Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \le 2x + \frac{\pi}{4} \le \frac{3\pi}{4}$. Vì $\sin u$ đồng biến trên $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ và nghịch biến trên $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right]$ và có $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Bảng biến thiên:

$2x + \frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
y	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\nearrow$	1	$\searrow$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Do đó $\underset{\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]}{\max} y = 1$ khi $x = \frac{\pi}{8}$ và $\underset{\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]}{\min} y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ khi $x = -\frac{\pi}{4}$.

d). $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right), x \in \left[-\frac{3\pi}{4};-\frac{\pi}{3}\right]$. Do $-\frac{3\pi}{4} \le x \le -\frac{\pi}{3} \Rightarrow$

e). Ta có $y = 4\cos^2 x + 4\cos x - 1 = 4\left(\cos^2 x + \cos x - \frac{1}{4}\right) = 4\left(\cos x + \frac{1}{2}\right)^2 - 2$

Ta có $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \le \cos x + \frac{1}{2} \le \frac{3}{2}$, do đó $0 \le \left(\cos x + \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{9}{4}$ nên $-2 \le y \le 7$. Vậy $\max\limits_{\mathbb{R}} y = 7$ khi $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $\min\limits_{\mathbb{R}} y = -2$ khi $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

f). $y = \left|\sin x - \cos 2x\right| = \left|2\sin^2 x + \sin x - 1\right| = \left|2\left(\sin^2 x + 2.\frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{16} - \frac{9}{16}\right)\right| = \left|2\left(\sin x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}\right|$.

Ta có $-1\le \sin x\le 1\Leftrightarrow -\frac{3}{4}\le \sin x+\frac{1}{4}\le \frac{5}{4}\Leftrightarrow 0\le \left(\sin x+\frac{1}{4}\right)^2\le \frac{25}{16}$

$\Rightarrow -\frac{9}{8}\le 2\left(\sin x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}\le 2\Rightarrow 0\le \left|2\left(\sin x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}\right|\le 2\Leftrightarrow 0\le y\le 2$. Vậy:

$\max\limits_{\mathbb{R}} y=2$ khi $2\left(\sin x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}=2\Leftrightarrow \left|\sin x+\frac{1}{4}\right|=\frac{5}{4}\Leftrightarrow \sin x=1\ \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

$\min\limits_{\mathbb{R}} y=0$ khi $2\left(\sin x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}=0\Leftrightarrow \left|\sin x+\frac{1}{4}\right|=\frac{3}{4}\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}\vee \sin x=-1$.

g). $y=|\sin x|+|\cos x|$

Ta có $y^2=\left(|\sin x|+|\cos x|\right)^2=1+|\sin 2x|$. Từ đó suy ra

$\min\limits_{\mathbb{R}} y^2=1$ khi $\sin 2x=0\Leftrightarrow 2x=k\pi\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

$\max\limits_{\mathbb{R}} y^2=2$ khi $|\sin 2x|=1\Leftrightarrow \cos 2x=0\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

Kết luận $\min\limits_{\mathbb{R}} y=1$ khi $x=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$, $\max\limits_{\mathbb{R}} y=\sqrt{2}$ khi $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$.

h). Ta có $y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x=\cos^2 x+\cos x-\frac{1}{2}=\left(\cos^2 x+2.\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{4}\ =\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$.

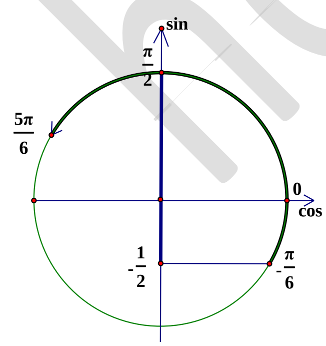
Vì $-1\le \cos x\le 1\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le \cos x+\frac{1}{2}\le \frac{3}{2}\Rightarrow 0\le \left(\cos x+\frac{1}{2}\right)^2\le \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}\le \left(\cos x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\le \frac{3}{2}\Leftrightarrow -\frac{3}{4}\le y\le \frac{3}{2}$. Vậy :

$\min\limits_{\mathbb{R}} y=-\frac{3}{4}$ khi $\cos x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

$\max\limits_{\mathbb{R}} y=\frac{3}{2}$ khi $\cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi,k\in\mathbb{Z}$.

k).Ta có $y=-5\cos^2 x+2\sin x+8=-5\left(1-\sin^2 x\right)+2\sin x+8=5\left(\sin^2 x+\frac{2}{5}\sin x+\frac{3}{5}\right)\ =5\left(\sin x+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{14}{5}$.



Khi $-\frac{\pi}{6}\le x\le \frac{5\pi}{6}\Rightarrow -\frac{1}{2}\le \sin x\le 1\Leftrightarrow -\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\le \sin x+\frac{1}{5}\le 1+\frac{1}{5}\Leftrightarrow -\frac{3}{10}\le \sin x+\frac{1}{5}\le \frac{6}{5}$

Do đó $0 \le \left(\sin x + \frac{1}{5}\right)^2 \le \frac{36}{25} \Rightarrow 0 \le 5\left(\sin x + \frac{1}{5}\right)^2 \le \frac{36}{5} \Leftrightarrow \frac{14}{5} \le 5\left(\sin x + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{14}{5} \le \frac{36}{5} + \frac{14}{5} \Leftrightarrow \frac{14}{5} \le y \le 10$.

Vậy: $\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]} y = 10$ khi $x = \frac{\pi}{2}$ và $\min\limits_{\left[-\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]} y = \frac{14}{5}$ khi $x = 0$.

l). $y = 2\sin x + 2\cos x - 2\sin 2x = 2(\sin x + \cos x) - 2\sin 2x$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$

$= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Vì $-1 \le \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le 1$ nên điều kiện $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$.

Ta có $t^2 = (\sin x + \cos x)^2 \Leftrightarrow t^2 = 1 + \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$.

Từ đó có $y = 2t - 2(t^2 - 1) = -2t^2 + 2t + 2$ (1).

Bảng biến thiên của hàm số (1)

t	$-\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$
$y(t)$	$-2-2\sqrt{2}$ ↗	$\frac{5}{2}$	↘ $-2+2\sqrt{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\operatorname{Max}\limits_{\mathbb{R}} y = \frac{5}{2}$ và $\operatorname{Min}\limits_{\mathbb{R}} y = -2 - 2\sqrt{2}$.

m). $y = 4(\sin^4 x + \cos^4 x) - 6(\sin^6 x + \cos^6 x) - 2\sin^4 x$

$y = 4\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) - 6\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) - 2\sin^4 x$

Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a). $y = 3\sin|x| - \cos x$ b). $y = \cos x + 2\sin x$ c). $y = \sqrt{\frac{1 - 2\cos 2x}{3 + \cos 4x}}$

d). $y = 4\tan 2x + 3\tan x - \cot x$ e). $y = \sin^5 x\cos 3x + \tan 2x$

LỜI GIẢI

Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a). $y = |\sin x|$ b). $y = \tan 2x$ c). $y = \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

LỜI GIẢI

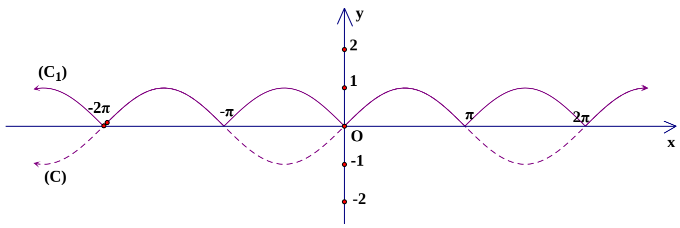
a). $y = |\sin x| = \begin{cases} \sin x, & \text{khi } \sin x \ge 0 \\ -\sin x, & \text{khi } \sin x < 0 \end{cases}$

do đó đồ thị hàm số $y = |\sin x|$ được vẽ dựa vào đồ thị $y = \sin x$ như sau:

giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = \sin x$ nằm phía trên trục Ox được đồ thị (C_1')

Lấy đối xứng qua trục Ox phần đồ thị của hàm số $y = \sin x$ nằm phía dưới trục Ox được đồ thị (C_1'').

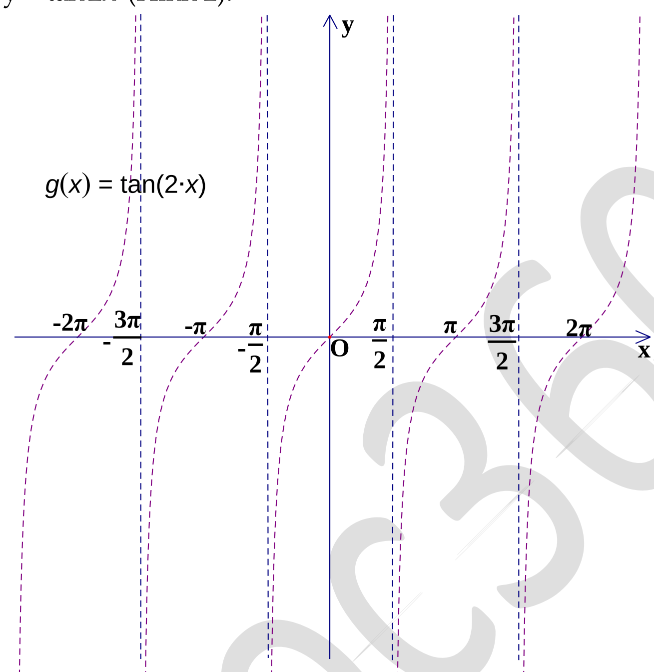
Đồ thị cần vẽ hợp của hai đồ thị (C_1') và (C_1'').



Hình 1

b). $y = \tan 2x$

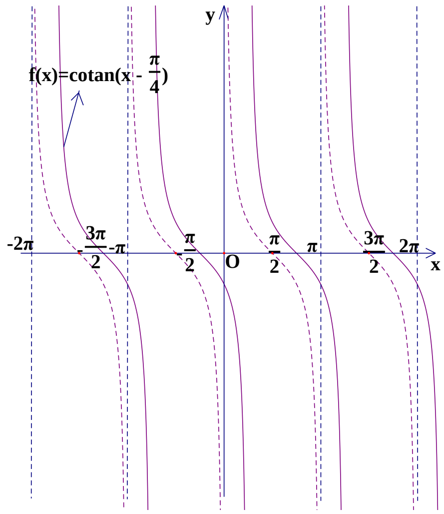
hàm số $y = \tan 2x$ có chu kì $\frac{\pi}{2}$, do đó trước tiên ta vẽ đồ thị hàm số $y = \tan 2x$ trên một đoạn có độ dài $\frac{\pi}{2}$, rồi tịnh tiến phần đồ thị ấy dọc theo trục Ox các đoạn có độ dài $\frac{\pi}{2}$ thì sẽ được toàn bộ đồ thị hàm số $y = \tan 2x$ (Hình 2).



Hình 2.

c). $y = \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

đồ thị hàm số $y = \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = \cot x$ bằng cách tịnh tiến sang phải dọc theo trục Ox một đoạn bằng $\frac{\pi}{4}$ (Hình 3).



Hình 3.