PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CÓ CÁCH GIẢI ĐẶC BIỆT

Giải các phương trình sau:

1). $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x+\cos 5x=-\frac{1}{2}$

2). $4\sin 3x\cos 2x=1+6\sin x-8\sin^3 x$

3). $\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=\frac{1}{16}$

4). $\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin x\ (1)$

5). $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{7}{8}\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cot\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$

6). $\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\sin 3x=\sin x+\sin 2x$

7). $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

8). $8\cos^3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 3x$

9). $\sqrt{2}\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\sin x$

10). $\cos\frac{4}{3}x=\cos^2 x$

LỜI GIẢI

1). $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x+\cos 5x=-\frac{1}{2}\quad (*)$

Ta thấy $\sin x=0\Leftrightarrow x=m\pi, m\in ¢$ không phải là nghiệm của $(*)$

Nhân hai vế của phương trình $(*)$ cho $\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq m\pi, m\in ¢$, được:

$$\sin x(\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x+\cos 5x)=-\frac{1}{2}\sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin x\cos x+\sin x\cos 2x+\sin x\cos 3x+\sin x\cos 4x+\sin x\cos 5x=-\frac{1}{2}\sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x-\sin x+\sin 3x-\sin 2x+\sin 4x-\sin 3x+\sin 5x-\sin 4x+\sin 6x=-\sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin 5x+\sin 6x=0\Leftrightarrow \sin 6x=\sin(-5x)\ \Leftrightarrow x=\frac{k2\pi}{11}\vee x=\pi+h2\pi, k,h\in ¢$$

Điều kiện $\begin{cases} \dfrac{k2\pi}{11} \neq m\pi \\ \pi + h2\pi \neq n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq \dfrac{11m}{2} \\ h \neq \dfrac{n-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 11m' \\ h \neq n' \end{cases}$ với $m' = 2m, n' = 2n+1$ và $m, n, m', n' \in ¢$

Kết luận nghiệm phương trình $x = \dfrac{k2\pi}{11}, x = \pi + h2\pi; k \neq 11m', h \neq n', k, h \in ¢$

2). $4\sin 3x \cos 2x = 1 + 6\sin x - 8\sin^3 x \quad (*)$

$\Leftrightarrow 4\sin 3x.\cos 2x = 1 + 2\left(3\sin x - 4\sin^3 x\right)$

$\Leftrightarrow 2\sin x + 2\sin 5x = 1 + 2\sin 3x$

Ta thấy $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + m\pi, m \in ¢$ không phải là nghiệm của $(*)$

Nhân hai vế của phương trình $(*)$ cho $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + m\pi, m \in ¢$, được:

$\Leftrightarrow \left(2\sin x + 2\sin 5x\right)\cos x = \left(1 + 2\sin 3x\right)\cos x$

$\Leftrightarrow \sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = \cos x + \sin 2x + \sin 4x$

$\sin 6x = \cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{k2\pi}{7}$ hoặc $x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{h2\pi}{5}; k, h \in ¢$

Điều kiện $\begin{cases} \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{k2\pi}{7} \neq \dfrac{\pi}{2} + m\pi \\ \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{h2\pi}{5} \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq \dfrac{3+7m}{2} \\ h \neq \dfrac{2+5n}{2} \end{cases}$ với m là số nguyên lẻ, và n là số nguyên chẵn.

3). $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \dfrac{1}{16} \quad (*)$

Ta thấy $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = m\pi, m \in ¢$ không phải là nghiệm của $(*)$

Nhân hai vế của phương trình $(*)$ cho $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq m\pi, m \in ¢$, được:

$16\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \sin x$

$\Leftrightarrow 8\sin 2x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \sin x$

$\Leftrightarrow 4\sin 4x \cos 4x \cos 8x = \sin x \Leftrightarrow 2\sin 8x \cos 8x = \sin x \Leftrightarrow \sin 16x = \sin x$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{k2\pi}{15} \vee x = \dfrac{\pi}{17} + \dfrac{h2\pi}{17}; k, h \in ¢$

Điều kiện $\begin{cases} \dfrac{k2\pi}{15} \neq m\pi \\ \dfrac{\pi}{17} + \dfrac{h2\pi}{17} \neq n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq \dfrac{15m}{2} \\ h \neq \dfrac{17n-1}{2} \end{cases}$ với m là số nguyên chẵn và n là số nguyên lẻ.

4). $\sin^3\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin x \ (1)$

Đặt $t = x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = t - \frac{\pi}{4}$

$(1) \Leftrightarrow \sin^3 t = \sqrt{2}\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin^3 t = \sin t - \cos t$

$\Leftrightarrow \sin^3 t - \sin t - \cos t = 0 \Leftrightarrow \sin t\left(\sin^2 t - 1\right) + \cos t = 0$

$\Leftrightarrow -\cos^2 t.\sin t + \cos t = 0 \Leftrightarrow \cos t\left(1 - \sin t.\cos t\right) = 0 \Leftrightarrow \cos t = 0 \ \vee 1 - \sin t.\cos t = 0$

Với: $\cos t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Với $1 - \sin t.\cos t = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2t = 1 \Leftrightarrow \sin 2t = 2$ (vô nghiệm).

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

5). $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8}\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cot\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \qquad (*)$

ĐK: $\begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \neq 0 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\cdot$

Có: $\cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cot\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cot\left[\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1.$

$(*) \Leftrightarrow \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \frac{3 + \cos 4x}{4} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \cos 4x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$: (thỏa đk).

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của phương trình là $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ với $k \in \mathbb{Z}$.

6). $\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\sin 3x=\sin x+\sin 2x \qquad (*)$

Điều kiện: $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\neq 0,\ \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$, với $k\in ¢$. Ta có:

$$\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\right]\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cot\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-1.$$

$(*)\Leftrightarrow -\sin 3x=\sin x+\sin 2x\Leftrightarrow (\sin 3x+\sin x)+\sin 2x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos x+\sin 2x=0\Leftrightarrow \sin 2x(2\cos x+1)=0\Leftrightarrow \sin 2x=0\ \vee\ \cos x=-0,5$

$\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}$ hoặc $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi$ với $k\in ¢$ (thỏa mãn điều kiện).

Kết luận: Các tập nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\frac{k\pi}{2},\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi.$

7). $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \qquad (*)$

Nhận thấy: $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=-\sin\left[\pi-\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)\right]=-\sin 3\cdot\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Đặt $t=x+\frac{\pi}{4}$, suy ra: $x=t-\frac{\pi}{4}$ nên phương trình đã cho:

$(*)\Leftrightarrow -\sin 3t=\sin\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin t\Leftrightarrow 4\sin^3 t-3\sin t+\cos 2t\sin t=0$

$\Leftrightarrow 4\sin^3 t-3\sin t+(1-2\sin^2 t)\sin t=0\Leftrightarrow \sin t=0$ hoặc $\sin^2 t=1$

$\Leftrightarrow \sin t=0$ hoặc $\cos t=0\Leftrightarrow t=k\pi$ hoặc $t=\frac{\pi}{2}+k\pi$ với $k\in ¢$.

Suy ra: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{4}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ với $k\in ¢$.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của phương trình là $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, với $k\in ¢$.

8). $8\cos^3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 3x \qquad (*)$

Nhận thấy: $\cos 3x = -\cos(\pi + 3x) = -\cos\left[3\cdot\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\right]\cdot$ Đặt $t = x + \dfrac{\pi}{3}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow 8\cos^3 t = -\cos 3t = -4\cos^3 t + 3\cos t \Leftrightarrow 12\cos^3 t - 3\cos t = 0$

$\Leftrightarrow \cos t = 0$ hoặc $4\cos^2 t - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos t = 0$ hoặc $\cos 2t = -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ hoặc $t = \dfrac{\pi}{3} + k\pi.$ Suy ra: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ hoặc $x = k\pi$ với $k \in$ ¢.

Kết luận: Các tập nghiệm cần tìm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ x = k\pi.$

9). $\sqrt{2}\sin^3\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sin x$ $(*)$. Đặt $t = x + \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow x = t - \dfrac{\pi}{4}\cdot$

$(*) \Leftrightarrow \sin^3 t = \sqrt{2}\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin^3 t = \sin t - \cos t = (\sin t - \cos t)(\sin^2 t + \cos^2 t)$

$\Leftrightarrow \cos t(-\sin^2 t + \sin t\cos t - \cos^2 t) = 0 \Leftrightarrow \cos t(\sin 2t - 2) \Leftrightarrow \cos t = 0 \vee \sin 2t = 2$

$\Leftrightarrow t = \dfrac{\pi}{2} + k\pi.$ Suy ra: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ với $k \in$ ¢.

Kết luận: Tập nghiệm cần tìm của phương trình là $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ với $k \in$ ¢.

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐẶC BIỆT

Giải các phương trình sau:

1). $3\tan^2 x + 4\sin^2 x - 2\sqrt{3}\tan x - 4\sin x + 2 = 0$

2). $\sin 4x - \cos 4x = 1 + 4\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

3). $\sin 3x\left(\cos x - 2\sin 3x\right) + \cos 3x\left(1 + \sin x - 2\cos 3x\right) = 0$

4). $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x - \sqrt{3}\sin x - \cos x + 4 = 0$.

5). $\cos 2x = \cos^2 x\sqrt{1+\tan x}$.

6). $\cos 3x + \sqrt{2-\cos^2 3x} = 2(1+\sin^2 2x)$

7). $\sin^{1996} x + \cos^{1996} x = 1$

8). $\sin^4 x + \cos^{15} x = 1$

9). $2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\cos^2 x\right) = 1 + \cos\left(\pi \sin 2x\right)$

LỜI GIẢI

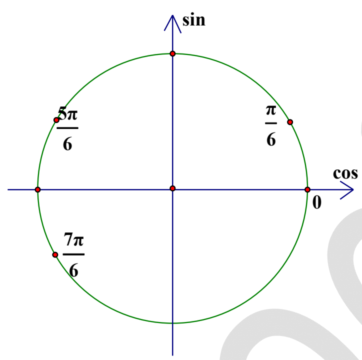
1). $3\tan^2 x + 4\sin^2 x - 2\sqrt{3}\tan x - 4\sin x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(3\tan^2 x - 2\sqrt{3}\tan x + 1\right) + \left(4\sin^2 x - 4\sin x + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}\tan x - 1\right)^2 + \left(2\sin x - 1\right)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}\tan x - 1 = 0 \\ 2\sin x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \end{cases}$$

Biểu diễn nghiệm trên vòng tròn lượng giác:



Nghiệm của $\sqrt{3}\tan x - 1 = 0$ được biểu diễn hai đầu mút là $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}$.

Nghiệm của $2\sin x - 1 = 0$ được biểu diễn hai đầu mút là $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}$.

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$

2). $\sin 4x - \cos 4x = 1 + 4\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin 4x - \left(1 + \cos 4x\right) = 4\left(\sin x - \cos x\right)$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x\cos 2x - 2\cos^2 2x = 4\left(\sin x - \cos x\right)$

$\Leftrightarrow \left(\cos x - \sin x\right)\left(\cos x + \sin x\right)\left(\sin 2x - \cos 2x\right) = 2\left(\sin x - \cos x\right)$

$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)\left[(\cos x + \sin x)(\sin 2x - \cos 2x) + 2\right] = 0$

$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0$ hoặc $(\cos x + \sin x)(\sin 2x - \cos 2x) + 2 = 0$ (2)

Giải (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in ¢$

Giải $(2) \Leftrightarrow -2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x + \sin 3x = 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{m2\pi}{3} \end{cases}; m, k \in ¢$. Hệ (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$k2\pi = \frac{\pi}{6} + \frac{m2\pi}{3} \Leftrightarrow 12k - 4m = 1$ phương trình này vô nghiệm vì vế trái luôn là một số nguyên chẵn, còn vế phải là số nguyên lẻ. Kết luận (2) vô nghiệm.

Nghiệm phương trình $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in ¢$

3). $\sin 3x(\cos x - 2\sin 3x) + \cos 3x(1 + \sin x - 2\cos 3x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin 3x\cos x + \cos 3x\sin x) - 2(\sin^2 3x + \cos^2 3x) + \cos 3x = 0$

$\Leftrightarrow \sin 4x - 2 + \cos 3x = 0$

$\Leftrightarrow \sin 4x + \cos 3x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x = 1 \\ \cos 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 3x = m2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{m2\pi}{3} \end{cases}, (k, m \in ¢)$

Nếu phương trình có nghiệm thì tồn tại các giá trị k, m sao cho :
$\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} = \frac{m2\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{k}{2} - \frac{2m}{3} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{3k + 4m}{6} = \frac{1}{8} = 12k + 16m = 3$

$\Leftrightarrow 2(6k + 8m) = 3$ (không thỏa). Phương trình vô nghiệm vì: Vế trái là một số chẵn, còn vế phải là một số lẻ .

Kết luận phương trình vô nghiệm.

4). $\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x - \sqrt{3}\sin x - \cos x + 4 = 0$. Chia 2 vế cho 2 ta được :

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-1 \\ \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ \left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\pi}{2}+l2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{12}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{3}+l2\pi \end{cases}$. Phương trình có nghiệm khi :

$\frac{\pi}{12}+k\pi=-\frac{\pi}{3}+l2\pi \Leftrightarrow 1+12k=-4+24l \Leftrightarrow 12k-24l=-5$. Vô nghiệm với mọi $k, l \in$ ¢ vì VT là một số chẵn, còn VP là một số lẻ .

5). $\cos 2x=\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}$. Điều kiện : $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \geq -1 \end{cases} (*)$.

Đặt $t=\tan x$, điều kiện $t \geq 0$

Khi đó phương trình trở thành :

$\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{1}{1+t^2}\sqrt{1+t} \Leftrightarrow 1-t^2=\sqrt{1+t}$, điều kiện $1-t^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1$.

$\Leftrightarrow \left(1-t^2\right)^2=1+t \Leftrightarrow (1+t)\left[(1+t)(1-t)^2-1\right]=0$.

$\Leftrightarrow (1+t)(1-t)^2-1=0 \Rightarrow t^3-t^2-t=0 \Leftrightarrow t=0 \vee t=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

So với điều kiện nhận $t=0 \Leftrightarrow \tan x=0 \Leftrightarrow x=k\pi,(k \in$ ¢ $)$

6). $\cos 3x+\sqrt{2-\cos^2 3x}=2(1+\sin^2 2x)$ Ta có nhận xét sau :

Bất đẳng thức Bunhiacopxki: $\left|\cos 3x+\sqrt{2-\cos^2 3x}\right| \leq \sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left(\cos^2 3x+\left(\sqrt{2-\cos^2 3x}\right)^2\right)}$

$\Leftrightarrow \left|\cos 3x+\sqrt{2-\cos^2 3x}\right| \leq 2$

Suy ra vế trái đạt giá trị lớn nhất bằng 2 khi $\cos 3x=\sqrt{2-\cos^2 3x}$

$VP=2(1+\sin^2 2x) \geq 2$

Vậy chỉ xảy ra khi : $\begin{cases} \cos 3x=\sqrt{2-\cos^2 3x} \\ \sin^2 2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 3x=1 \\ \sin 2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 6x=-1 \\ \sin 2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3} \\ x=\frac{l\pi}{2} \end{cases}$.

Nếu phương trình có nghiệm thì tồn tại k,l thuộc Z sao cho :

$-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}=\frac{l\pi}{2} \Leftrightarrow -1+2k=3l \Leftrightarrow k=\frac{3l+1}{2}=l+\frac{l+1}{2}$.

Để k là nguyên thì ta chọn : $l+1=2n \Rightarrow l=2n-1$.

Thay vào (2) nghiêm : $x=\frac{(2n+1)\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+n\pi \quad (n\in Z)$

7). $\sin^{1996}x+\cos^{1996}x=1$

$\sin^{1996}x+\cos^{1996}x=\sin^2x+\cos^2x \Leftrightarrow \sin^{1996}x-\sin^2x=\cos^2x-\cos^{1996}x$

$\Leftrightarrow \sin^2x\left(\sin^{1994}-1\right)=\cos^2x\left(1-\cos^{1994}x\right) \quad (2)$

Ta thấy $\begin{cases}\sin^2x\ge 0\\ \sin^{1994}-1\le 1\end{cases} \Rightarrow \sin^2x\left(\sin^{1994}-1\right)\le 0,\forall x$

Ngoài ra có $\begin{cases}\cos^2x\ge 0\\ 1-\cos^{1994}x\ge 0\end{cases} \Rightarrow \cos^2x\left(1-\cos^{1994}x\right)\ge 0,\forall x$.

Do đó $(2)\Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2x\left(\sin^{1994}-1\right)=0\\ \cos^2x\left(1-\cos^{1994}x\right)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=\pm1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=\pm1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=m\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+m\pi\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+n\pi\\ x=n\pi\end{array}\right.\end{cases},(m,n\in ¢)$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\frac{k\pi}{2},(k\in ¢)$.

8). $\sin^4x+\cos^{15}x=1$

$\sin^4x+\cos^{15}x=\sin^2x+\cos^2x \Leftrightarrow \sin^4x-\sin^2x=\cos^2x-\cos^{15}x$

$\Leftrightarrow \sin^2x\left(\sin^2x-1\right)=\cos^2x\left(1-\cos^{13}x\right)(1)$

Vì $\begin{cases}\sin^2x\ge 0\\ \sin^2x-1\le 0\end{cases} \Rightarrow \sin^2x\left(\sin^2x-1\right)\le 0,\forall x$,

và $\begin{cases}\cos^2x\ge 0\\ 1-\cos^{13}x\ge 0\end{cases} \Rightarrow \cos^2x\left(1-\cos^{13}x\right)\ge 0,\forall x$

Từ đó $(1)\Leftrightarrow \begin{cases}\sin^2x\left(\sin^2x-1\right)=0\\ \cos^2x\left(1-\cos^{13}x\right)=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin^2x=0\\ \sin^2x=1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\cos^2x=0\\ \cos^{13}x=1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=\pm1\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=m\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+m\pi\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+n\pi\\ x=n2\pi\end{array}\right.\end{cases},(m,n\in ¢).$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, x=k2\pi, \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

9). $2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right)=1+\cos\left(\pi\sin 2x\right)$

$\Leftrightarrow 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2 x\right)-1=\cos\left(\pi\sin 2x\right)$

$\Leftrightarrow \cos\left(\pi\cos^2 x\right)=\cos\left(\pi\sin 2x\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\pi\cos^2 x=\pi\sin 2x+k2\pi\\ \pi\cos^2 x=-\pi\sin 2x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos^2 x=\sin 2x+k2\\ \cos^2 x=-\sin 2x+k2\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{1+\cos 2x}{2}=\sin 2x+k2\\ \dfrac{1+\cos 2x}{2}=-\sin 2x+k2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x-2\sin 2x=4k-1\ \ (1)\\ \cos 2x+2\sin 2x=4k-1\ \ (2)\end{array}\right.$

Điều kiện để phương trình (1) hoặc phương trình (2) có nghiệm là:

$1^2+2^2\geq\left(4k-1\right)^2\Leftrightarrow 16k^2-8k-4\leq 0\Leftrightarrow\frac{1-\sqrt{5}}{4}\leq k\leq\frac{1+\sqrt{5}}{4}$, vì $k\in\mathbb{Z}$ nên chọn $k=0$

Thay $k=0$ vào (1) được $\cos 2x-2\sin 2x=-1\Leftrightarrow 1+\cos 2x-2\sin 2x=0\Leftrightarrow 2\cos^2 x-4\sin x\cos x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos x\left(\cos x-2\sin x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=2\sin x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \tan x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)+k\pi\end{array}\right.$

Thay $k=0$ vào (1) được $\cos 2x+2\sin 2x=-1\Leftrightarrow 1+\cos 2x+2\sin 2x=0\Leftrightarrow 2\cos^2 x+4\sin x\cos x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos x\left(\cos x+2\sin x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x=-2\sin x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \tan x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\arctan\left(-\dfrac{1}{2}\right)+k\pi\end{array}\right.$