PHƯƠNG TRÌNH THUẦN NHẤT ĐỐI VỚI sin VÀ cos

$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d(1)$

Cách giải.Xét 2 trường hợp :

- **Trường hợp 1 :Xét** $\cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \pm 1$ **.Thay vào (1) xem thoả hay không thoả.Kết luận**
- **Trường hợp 2:Xét** $\cos x \neq 0$. **Chia hai vế của (1) cho** $\cos^2 x$ **,rồi đưa về phương trình bậc hai theo** $\tan x$ **,giải bình thường.**

$(1) \Leftrightarrow (a-d)\tan^2 x + b\tan x + c - d = 0.$

Bài 1: Giải các phương trình sau:

1). $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin\cos x - \cos^2 x = 4$.

2). $3\sin^2 2x - \sin 2x\cos 2x - 4\cos^2 2x = 2$.

3). $2\sin^2 x + \left(3+\sqrt{3}\right)\sin x\cos x + \left(\sqrt{3}-1\right)\cos^2 x = -1$.

4). $3\sin^2\frac{x}{2} + 4\sin x + \left(8\sqrt{3}-9\right)\cos^2\frac{x}{2} = 0$.

5). $\sqrt{3}\sin^2 x + \left(1-\sqrt{3}\right)\sin x\cos x - \cos^2 x + 1 - \sqrt{3} = 0$.

6). $9\sin^2 x - 30\sin x\cos x + 25\cos^2 x = 25$.

7). $\sin 2x - 2\sin^2 x = 2\cos 2x$.

8). $\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}$.

LỜI GIẢI

1). $2\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin\cos x - \cos^2 x = 4\ (1)$

Trường hợp 1: $\cos x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 1$: $(1) \Leftrightarrow 2 = 4$ (vô lý).

Trường hợp 2: $\cos x \neq 0$. Chia hai vế của (1) cho $\cos^2 x$ được

$$\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{3\sqrt{3}\sin\cos x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{4}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 2\tan^2 x + 3\sqrt{3}\tan x - 1 = 4\left(1+\tan^2 x\right)$$

$\Leftrightarrow 2\tan^2 x - 3\sqrt{3}\tan x + 5 = 0$ phương trình vô nghiệm

2). $3\sin^2 2x - \sin 2x\cos 2x - 4\cos^2 2x = 2(1)$

Trường hợp 1: $\cos 2x = 0 \Rightarrow \sin^2 2x = 1$: $(1) \Leftrightarrow 3 = 2$ (vô lý).

Trường hợp 2: $\cos 2x \neq 0$. Chia hai vế của (1) cho $\cos^2 2x$ được

$$\frac{3\sin^2 2x}{\cos^2 2x} - \frac{\sin 2x\cos 2x}{\cos^2 2x} - \frac{4\cos^2 2x}{\cos^2 2x} = \frac{2}{\cos^2 2x} \Leftrightarrow 3\tan^2 2x - \tan 2x - 4 = 2\left(1+\tan^2 2x\right)$$

$\Leftrightarrow \tan^2 x - \tan 2x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \tan 2x = -2 \vee \tan 2x = 3$

$\circ \tan 2x = -2 \Leftrightarrow 2x = \arctan(-2) + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\arctan(-2) + \frac{k\pi}{2}, (k\in\mathbb{Z})$

$\circ \tan 2x = 3 \Leftrightarrow 2x = \arctan 3 + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\arctan 3 + k\pi, (k\in\mathbb{Z})$

3). $2\sin^2 x + \left(3+\sqrt{3}\right)\sin x\cos x + \left(\sqrt{3}-1\right)\cos^2 x = -1$

Trường hợp 1: $\cos x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 1$: $(1) \Leftrightarrow 2 = -1$ (vô lý).

Trường hợp 2: $\cos x \neq 0$. Chia hai vế của (1) cho $\cos^2 x$ được:

$2\tan^2 x+\left(3+\sqrt{3}\right)\tan x+\left(\sqrt{3}-1\right)=-\left(1+\tan^2 x\right)\Leftrightarrow 3\tan^2 x+\left(3+\sqrt{3}\right)\tan x+\sqrt{3}=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ \tan x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

4). $3\sin^2\frac{x}{2}+4\sin x+\left(8\sqrt{3}-9\right)\cos^2\frac{x}{2}=0\ (1)$

$(1)\Leftrightarrow 3\sin^2\frac{x}{2}+8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\left(4\sqrt{3}-9\right)\cos^2\frac{x}{2}=0\,(1')$

Trường hợp 1: $\cos\frac{x}{2}=0\Rightarrow\sin^2\frac{x}{2}=1$: $(1')\Leftrightarrow 3=0$ (vô lý).

Trường hợp 2: $\cos\frac{x}{2}\neq 0$. Chia hai vế của (1') cho $\cos^2\frac{x}{2}$ được:

$\Leftrightarrow 3\tan^2\frac{x}{2}+8\tan\frac{x}{2}+8\sqrt{3}-9=0$

$\Delta'=16-3.\left(8\sqrt{3}-9\right)=16-24\sqrt{3}+27=\left(3\sqrt{3}-4\right)^2$

$\tan\frac{x}{2}=\frac{-4-3\sqrt{3}+4}{3}=-\sqrt{3}$ hoặc $\tan\frac{x}{2}=\frac{-4+3\sqrt{3}-4}{3}=\frac{3\sqrt{3}-8}{3}$

$\circ\tan\frac{x}{2}=-\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{3}+k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$\circ\tan\frac{x}{2}=\frac{3\sqrt{3}-8}{3}\Leftrightarrow\frac{x}{2}=\arctan\frac{3\sqrt{3}-8}{3}+k\pi\Leftrightarrow x=2\arctan\frac{3\sqrt{3}-8}{3}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy nghiệm của phương trình $x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi$, $x=2\arctan\frac{3\sqrt{3}-8}{3}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

5). $\sqrt{3}\sin^2 x+\left(1-\sqrt{3}\right)\sin x\cos x-\cos^2 x+1-\sqrt{3}=0\,(1)$

Trường hợp 1: $\cos x=0\Rightarrow\sin^2 x=1$: $(1)\Leftrightarrow 1=0$ (vô lý).

Trường hợp 2: $\cos x\neq 0$. Chia hai vế của (1) cho $\cos^2 x$ được:

$\sqrt{3}\tan^2 x+\left(1-\sqrt{3}\right)\tan x-1+\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\tan^2 x\right)=0\Leftrightarrow\tan^2 x+\left(1-\sqrt{3}\right)\tan x-\sqrt{3}=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \tan x=\sqrt{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Nghiệm của phương trình đã cho: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, x=\frac{\pi}{3}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

6). $9\sin^2 x-30\sin x\cos x+25\cos^2 x=25\,(1)$

Trường hợp 1: $\cos x=0\Rightarrow\sin^2 x=1$: $(1)\Leftrightarrow 9=25$ (vô lý).

Trường hợp 2: $\cos x\neq 0$. Chia hai vế của (1) cho $\cos^2 x$ được:

$9\tan^2 x-30\tan x+25=25\left(1+\tan^2 x\right)\Leftrightarrow 16\tan^2 x+30\tan x=0$

$$\left[\begin{array}{l}\tan x=0\\ \tan x=-\frac{15}{8}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\arctan\left(-\frac{15}{8}\right)+k\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$$

Phương trình đã cho có các nghiệm: $x=k\pi, x=\arctan\left(-\frac{15}{8}\right)+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

7). $\sin 2x-2\sin^2 x=2\cos 2x$ (1)

$(1)\Leftrightarrow 2\sin x\cos x-2\sin^2 x=2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\Leftrightarrow \cos^2 x-\sin x\cos x=0$

$$\Leftrightarrow \cos x(\cos x-\sin x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos x-\sin x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$$

Nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, x=\frac{\pi}{4}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

8). $\sin^2 x+\sin 2x-2\cos^2 x=\frac{1}{2}$ (1)

$(1)\Leftrightarrow \sin^2 x+2\sin x\cos x-2\cos^2 x=\frac{1}{2}(1')$

Trường hợp 1: $\cos x=0\Rightarrow \sin^2 x=1$: $(1')\Leftrightarrow 1=\frac{1}{2}$ (vô lý).

Trường hợp 2: $\cos x\neq 0$. Chia hai vế của (1') cho $\cos^2 x$ được:

$\tan^2 x+2\tan x-2=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2 x\right)\Leftrightarrow \tan^2 x+4\tan x-5=0\Leftrightarrow \tan x=1\vee \tan x=-5$

Với $\tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Với $\tan x=-5\Leftrightarrow x=\arctan(-5)+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Nghiệm của phương trình $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=\arctan(-5)+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

1). $2\sin^3 x=\cos x$.

2). $3\sin^3 x+2\sin^2 x\cos x=\sin x\cos^2 x$.

3). $6\sin x+2\cos^3 x=5\sin 2x\cos x$.

4). $\sin x-4\sin^3 x+\cos x=0$.

5). $3\cos^4 x-4\sin^2 x\cos^2 x+\sin^4 x=0$

6). $\left(\sin x-\sin^2 x\right)(\sin x+2\cos x)=\sqrt{3}(1+\sin x)(1-\sin x)^2$.

7). $\sin^3 x-\cos^3 x=\sin x+\cos x$.

8). $6\sin x-2\cos^3 x=\dfrac{5\sin 4x\cos x}{2\cos 2x}$.

LỜI GIẢI

1). $2\sin^3 x=\cos x$ (1)

Trường hợp 1: $\cos x=0\Rightarrow \sin x=\pm 1$: $(1')\Leftrightarrow \pm 1=0$ (vô lý).

Trường hợp 2: $\cos x\neq 0$. Chia hai vế của (1') cho $\cos^3 x$ được: $2.\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow 2\tan^3 x=1+\tan^2 x\Leftrightarrow 2\tan^3 x-\tan^2 x-1=0\Leftrightarrow \tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$

2). $3\sin^3 x+2\sin^2 x\cos x=\sin x\cos^2 x$ (1)

Trường hợp 1: $\cos x=0\Rightarrow \sin x=\pm 1$: $(1)\Leftrightarrow \pm 3=0$ (vô lý).

Trường hợp 2: $\cos x\ne 0$. Chia hai vế của (1) cho $\cos^3 x$ được:

$$3.\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}+2.\frac{\sin^2 x\cos x}{\cos^3 x}=\frac{\sin x\cos^2 x}{\cos^3 x}\Leftrightarrow 3\tan^3 x+2\tan^2 x=\tan x$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^3 x+2\tan^2 x-\tan x=0\Leftrightarrow \tan x=0\vee \tan x=\frac{1}{3}\vee \tan x=-1$$

Với $\tan x=0\Leftrightarrow x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Với $\tan x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=\arctan\frac{1}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Với $\tan x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

3). $6\sin x+2\cos^3 x=5\sin 2x\cos x$ (1)

$\Leftrightarrow 6\sin x+2\cos^3 x=10\sin x\cos^2 x$ $(1')$

Trường hợp 1: $\cos x=0\Rightarrow \sin x=\pm 1$: $(1')\Leftrightarrow \pm 6=0$ (vô lý).

Trường hợp 2: $\cos x\ne 0$. Chia hai vế của (1') cho $\cos^3 x$ được:

$$6\frac{\sin x}{\cos^3 x}+2\frac{\cos^3 x}{\cos^3 x}=10\frac{\sin x\cos^2 x}{\cos^3 x}\quad\Leftrightarrow 6\tan x\left(1+\tan^2 x\right)+2=10\tan x$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^3 x-2\tan x+1=0\qquad\Leftrightarrow \tan x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}.$$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

4). $\sin x-4\sin^3 x+\cos x=0(1)$

Trường hợp 1: $\cos x=0\Rightarrow \sin x=\pm 1$: $(1)\Leftrightarrow \pm 3=0$ (vô lý).

Trường hợp 2: $\cos x\ne 0$. Chia hai vế của (1) cho $\cos^3 x$ được:

$$\frac{\sin x}{\cos^3 x}-\frac{4\sin^3 x}{\cos^3 x}+\frac{\cos x}{\cos^3 x}=0\qquad\Leftrightarrow \tan x\left(1+\tan^2 x\right)-4\tan^3 x+\left(1+\tan^2 x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -3\tan^3 x+\tan^2 x+\tan x+1=0\qquad\Leftrightarrow \tan x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

5). $3\cos^4 x-4\sin^2 x\cos^2 x+\sin^4 x=0$

Ta thấy $\cos x=0$ không thỏa (1), chia hai vế (1) cho $\cos^4 x$ được:

$3-4\tan^2 x+\tan^4 x=0\Leftrightarrow \tan x=\pm 1,\tan x=\pm\sqrt{3}$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi,x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

6). $\left(\sin x-\sin^2 x\right)\left(\sin x+2\cos x\right)=\sqrt{3}\left(1+\sin x\right)\left(1-\sin x\right)^2$ (1)

$(1)\Leftrightarrow \sin x\left(1-\sin x\right)\left(\sin x+2\cos x\right)=\sqrt{3}\left(1+\sin x\right)\left(1-\sin x\right)^2$

$$\left(1-\sin x\right)\left(\left(1+\sqrt{3}\right)\sin^2 x+2\sin x\cos x-\sqrt{3}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=1\quad(2)\\ \left(1+\sqrt{3}\right)\sin^2 x+2\sin x\cos x-\sqrt{3}=0\quad(3)\end{array}\right.$$

Giải (2): $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$

Giải (3): Ta thấy $\cos x=0$ không phải là nghiệm của (3), chia hai vế (3) cho $\cos^2 x$ được:

$\left(1+\sqrt{3}\right)\tan^2 x+2\tan x-\sqrt{3}\left(1+\tan^2 x\right)=0\Leftrightarrow \tan^2 x+2\tan x-\sqrt{3}=0$

7). $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin x + \cos x \quad (1)$

Trường hợp 1: $\cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \pm 1$, $(1) \Leftrightarrow \pm 1 = \pm 1$ (đúng).

Vậy $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ là một họ nghiệm của phương trình.

Trường hợp 2: $\cos x \neq 0$. Chia hai vế của (1) cho $\cos^3 x$ được:

$\tan^3 x - 1 = \tan x\left(1 + \tan^2 x\right) + 1 + \tan^2 x \Leftrightarrow \tan^2 x + \tan x + 2 = 0$ phương trình vô nghiệm.

8). $6\sin x - 2\cos^3 x = \frac{5\sin 4x \cos x}{2\cos 2x}(1)$

Điều kiện $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

$(1) \Leftrightarrow 6\sin x - 2\cos^3 x = \frac{10\sin 2x \cos 2x \cos x}{2\cos 2x} \Leftrightarrow 6\sin x - 2\cos^3 x = 10\sin x \cos^2 x \; (1')$.

Trường hợp 1: $\cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \pm 1$, $(1') \Leftrightarrow \pm 6 = 0$ (vô lý)

Trường hợp 2: $\cos x \neq 0$. Chia hai vế của (1) cho $\cos^3 x$ được:

$6\tan x\left(1 + \tan^2 x\right) - 2 = 10\tan x \Leftrightarrow 6\tan^3 x - 4\tan x - 2 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

So với điều kiện phương trình vô nghiệm.

Giải các phương trình sau:

1). $4\left(\sin^3 x + \cos^3 x\right) = \cos x + 3\sin x$ [Dự bị 1 ĐH B04]

2). $2\sqrt{2}\cos^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3\cos x - \sin x = 0$ [Dự bị 2 ĐH A05]

3). $\tan x.\sin^2 x - 2\sin^2 x = 3\left(\cos 2x + \sin x.\cos x\right)$

4). $8\cos^3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x$

5). $\sin^3 x - 4\sin^2 x \cos x + 5\sin x \cos^2 x - 2\cos^3 x = 0$

LỜI GIẢI

1). $4\left(\sin^3 x + \cos^3 x\right) = \cos x + 3\sin x$

Trường hợp 1: Xét $\cos x = 0 \Rightarrow \sin x = \pm 1$ thay vào (1) được $\pm 4 = \pm 3$ (vô lý).

Trường hợp 2: $\cos x \neq 0$, chia hai vế của (1) cho $\cos^3 x$:

$4\left(\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} + \frac{\cos^3 x}{\cos^3 x}\right) = \frac{\cos x}{\cos^3 x} + 3\frac{\sin x}{\cos^3 x} \Leftrightarrow 4\left(\tan^3 x + 1\right) = \left(1 + \tan^2 x\right) + 3\tan x\left(1 + \tan^2 x\right)$

$\Leftrightarrow \tan^3 x - \tan^2 x - 3\tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \vee \tan x = \pm\sqrt{3}$

Với $\tan x = 1 \Leftrightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Với $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Với $\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

2). $2\sqrt{2}\cos^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3\cos x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^3-3\cos x-\sin x=0 \Leftrightarrow (\cos x+\sin x)^3-3\cos x-\sin x=0$ (2)

Trường hợp 1: Xét $\cos x=0 \Rightarrow \sin x=\pm 1$, thay vào (2) được $0=0$ (đúng).

Vậy $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$ là một họ nghiệm của phương trình.

Trường hợp 2: Xét $\cos x\neq 0$, chia hai vế của (2) cho $\cos^3 x$:

$$\frac{(\cos x+\sin x)^3}{\cos^3 x}-3\frac{\cos x}{\cos^3 x}-\frac{\sin x}{\cos^3 x}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\right)^3-3.\frac{1}{\cos^2 x}-\tan x.\frac{1}{\cos^2 x}=0$$

$$\Leftrightarrow (1+\tan x)^3-3(1+\tan^2 x)-\tan x(1+\tan^2 x)=0 \Leftrightarrow \tan x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

3). $\tan x.\sin^2 x-2\sin^2 x=3(\cos 2x+\sin x.\cos x)$

$\Leftrightarrow \tan x.\sin^2 x-2\sin^2 x=3(2\cos^2 x-1+\sin x\cos x)$

$$\Leftrightarrow \tan x.\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x}=3\left(\frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}\right)$$

$\Leftrightarrow \tan x.\tan^2 x-2\tan^2 x=3\left(2-(1+\tan^2 x)+\tan x\right)$

$\Leftrightarrow \tan^3 x-2\tan^2 x=6-3-3\tan^2 x+3\tan x$

$\Leftrightarrow \tan^3 x+\tan^2 x-3\tan x-3=0 \Leftrightarrow \tan x=\sqrt{3} \vee \tan x=-1 \vee \tan x=-\sqrt{3}$

$\circ \tan x=\sqrt{3} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\circ \tan x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$

$\circ \tan x=-\sqrt{3} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$.

4). $8\cos^3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 3x$

e) $8\cos^3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 3x$ (1)

Đặt $t=x+\frac{\pi}{3} \Rightarrow x=t-\frac{\pi}{3}$

$(1) \Leftrightarrow 8\cos^3 t=\cos 3\left(t-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 8\cos^3 t=\cos(3t-\pi) \Leftrightarrow 8\cos^3 t=\sin 3t$

$\Leftrightarrow 8\cos^3 t=3\sin t-4\sin^3 t \quad (*)$

Ta thấy $\cos t=0$ không phải là nghiệm của phương trình $(*)$

Chia hai vế của $(*)$ cho $\cos^3 t$ được: $8=3\tan t(1+\tan^2 t)-4\tan^3 t$

$\Leftrightarrow 8=3\tan t+3\tan^3 t-4\tan^3 t \Leftrightarrow \tan^3 t-3\tan t+8=0.$

5). $\sin^3 x-4\sin^2 x\cos x+5\sin x\cos^2 x-2\cos^3 x=0$ (1)

Trường hợp 1: $\cos x=0 \Rightarrow \sin x=\pm 1 \quad (1) \Leftrightarrow \pm 1=0$ (vô lý)

Trường hợp 2: $\cos x \neq 0$, chia hai vế của (1) cho $\cos^3 x$ được:

$$\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} - 4\frac{\sin^2 x\cos x}{\cos^3 x} + \frac{5\sin x\cos^2 x}{\cos^3 x} - 2\frac{\cos^3 x}{\cos^3 x} = 0$$

$\Leftrightarrow \tan^3 x - 4\tan^2 x + 5\tan x - 2 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 2 \quad \vee \quad \tan x = 1$

Với $\tan x = 2 \Leftrightarrow x = \arctan 2 + k\pi \ (k \in z)$

Với $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in z)$