LỜI GIẢI

Câu : Giải các phương trình sau:

1). $4\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)=\sqrt{3}\sin\left(\cos 2x+\cos x\right)\left(1+\cot^2 x\right)$

2). $2\sin^3 x-3=\left(3\sin^2 x+2\sin x-3\right)\tan x$

3). $\left(2\tan^2 x-1\right)\cos x=2-\cos 2x$

4). $5\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)-3(1-\cos x)\cot^2 x=2$

5). $(\tan x-1)\sin^2 x+3\cos^2 x-\frac{3}{2}\sin 2x=0$

6). $\frac{\left(\sin x+\cos x\right)^2-2\sin^2 x}{1+\cot^2 x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)\right]$

LỜI GIẢI

1). $4\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)=\sqrt{3}\sin\left(\cos 2x+\cos x\right)\left(1+\cot^2 x\right)\ (*)$

Điều kiện: $\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi, k\in ¢$

Các bạn để ý góc ở vế trái, nên ý tưởng biến đổi tích thành tổng ở vế trái

$$(*)\Leftrightarrow 2\left(\cos x-\cos\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin x\left(2\cos^2 x-1+\cos x\right)\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\Leftrightarrow\left(2\cos x-1\right)=\sqrt{3}\left(2\cos^2 x+\cos x-1\right)\frac{1}{\sin x}$$

Phân tích $2\cos^2 x+\cos x-1=\left(\cos x+1\right)\left(2\cos x-1\right)$ *và quy đồng mẫu được:*

$$\Leftrightarrow\sin x\left(2\cos x-1\right)=\sqrt{3}\left(\cos x+1\right)\left(2\cos x-1\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(2\cos x-1\right)\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x-\sqrt{3}\right)=0$$

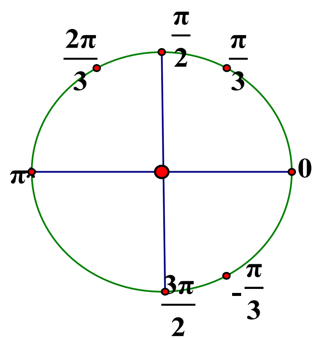
$$\Leftrightarrow 2\cos x-1=0\quad\vee\quad\sin x-\sqrt{3}\cos x-\sqrt{3}=0$$

Với $2\cos x-1=0\Leftrightarrow\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,\left(k\in Z\right).$

Với $\sin x-\sqrt{3}\cos x=\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\sin x.\cos\frac{\pi}{3}-\cos x.\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi$ hoặc $x=\pi+k2\pi,(k\in Z)$

Biểu diễn nghiệm trên vòng tròn lượng giác :



Vậy nghiệm $x=\pi+k2\pi$ loại

Kết luận nghiệm phương trình: $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$, $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi$ $(k\in Z)$

2). $2\sin^3 x-3=\left(3\sin^2 x+2\sin x-3\right)\tan x(*)$

Ý tưởng: Đổi tanx thành sin chia cos, sau đó quy đồng mẫu...

Điều kiện $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in ¢$

$(*)\Leftrightarrow 2\sin^3 x-3=\left[3\left(\sin^2 x-1\right)+2\sin x\right]\frac{\sin x}{\cos x}$

$\Leftrightarrow \cos x\left(2\sin^3 x-3\right)=\left(-3\cos^2 x+2\sin x\right)\sin x$

Phân phối sau đó chuyển các phần tử vế phải qua vế trái được:

$\Leftrightarrow 2\cos x\sin^3 x-3\cos x+3\cos^2 x\sin x-2\sin^2 x=0$

$\Leftrightarrow \left(2\cos x.\sin^3 x-2\sin^2 x\right)+\left(3\cos^2 x\sin x-3\cos x\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x\left(\sin x\cos x-1\right)+3\cos x\left(\sin x\cos x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sin x\cos x-1\right)\left(2\sin^2 x+3\cos x\right)=0$

$\Leftrightarrow \sin x\cos x-1=0 \quad \vee \quad 2\sin^2 x+3\cos x=0$

Với $\sin x\cos x-1=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin 2x=1\Leftrightarrow\sin 2x=2$ (loại)

Với $2\sin^2 x+3\cos x=0\Leftrightarrow 2\left(1-\cos^2 x\right)+3\cos x=0$

$\Leftrightarrow -2\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad \cos x = 2$ (loại)

So với điều kiện thì $\cos x = -\frac{1}{2}$ (nhận) $\Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in Z)$

Nghiệm phương trình: $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in Z)$

$\boxed{3).\ (2\tan^2 x - 1)\cos x = 2 - \cos 2x(*)}$

Điều kiện: $\cos x \neq 0$.

$(*) \Leftrightarrow \left[2\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) - 1\right]\cos x = 2 - (2\cos^2 x - 1)(**)$

Đặt $t = \cos x$. Điều kiện: $t \in [-1,1]/\{0\}$.

$(**) \Leftrightarrow \left(\frac{2}{t^2} - 3\right)t = 3 - 2t^2 \Leftrightarrow \frac{2}{t} - 3t + 2t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 2t^3 - 3t^2 - 3t + 2 = 0$

$\Leftrightarrow t = -1$ (nhận) $\vee t = \frac{1}{2}$ (nhận) $\vee t = 2$ (loại).

Với $t = -1 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, (k \in Z)$.

Với $t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in Z)$.

Vậy nghiệm của phương trình $x = \pi + k2\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in Z)$.

$\boxed{4).\ 5\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) - 3(1 - \cos x)\cot^2 x = 2 \quad (1)}$

Điều kiện $\sin x \neq 0$

Ta có : $\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$(1) \Leftrightarrow 5\cos x - 3(1 - \cos x).\frac{\cos^2 x}{\sin x} = 2$

$\Leftrightarrow 5\cos x - 3(1 - \cos x)\frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x} = 2$

$\Leftrightarrow 5\cos x - 3(1 - \cos x)\frac{\cos^2 x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = 2$

$\Leftrightarrow\ 5\cos x(1+\cos x)-3\cos^2 x=2(1+\cos x)$

$\Leftrightarrow\ 2\cos^2 x+3\cos x-2=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}$ hoặc $\cos x=-2$ (loại)

$\Leftrightarrow\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\ \ (k\in ¢)$

Kết luận nghiệm của phương trình : $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\ \ (k\in ¢)$

5). $(\tan x-1)\sin^2 x+3\cos^2 x-\frac{3}{2}\sin 2x=0$ (1)

Điều kiện $\cos x\neq 0$

(1) $\Leftrightarrow\ (\tan x-1)\sin^2 x+3\cos^2 x-2\sin x.\cos x=0$

Chia hai vế cho $\cos^2 x$ ta được : $(\tan x-1)\tan^2 x+3-3\tan x=0$

$\Leftrightarrow\ \tan^3 x-\tan^2 x-3\tan x+3=0 \Leftrightarrow \tan x=\pm\sqrt{3}$ hoặc $\tan x=1$

$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in ¢)$

Kết luận nghiệm của phương trình $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi, x=\frac{\pi}{4}+k\pi, (k\in ¢)$

6). $\frac{(\sin x+\cos x)^2-2\sin^2 x}{1+\cot^2 x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)\right]$ $(*)$

Điều kiện $\sin x\neq 0 \Rightarrow x\neq k\pi, (k\in Z)$

$(*) \Leftrightarrow (\cos 2x+\sin 2x)\sin^2 x=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\sin x$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\sin x=\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)(1-\sin x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \sin x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right. \ (k\in Z)$$

Cả hai họ nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện , vậy phương trình có hai họ nghiệm

$x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}; x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\ \ (k\in Z)$.

Câu : Giải các phương trình sau:

1). $\tan^4 x + 1 = \dfrac{\left(2-\sin^2 2x\right)\sin 3x}{\cos^4 x}$ [Dự bị 3 ĐH02]

2). $\tan x + \cos x - \cos^2 x = \sin x\left(1+\tan x.\tan\dfrac{x}{2}\right)$ [Dự bị 4 ĐH02]

3). $\sin^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)\tan^2 x - \cos^2\dfrac{x}{2} = 0$ [ĐH D03]

4). $3 - \tan x\left(\tan x + 2\sin x\right) + 6\cos x = 0$ [Dự bị 1 ĐH A03]

5). $\cos 2x + \cos x\left(2\tan^2 x - 1\right) = 2$ [Dự bị 2 ĐH A03]

6). $5\sin x - 2 = 3(1-\sin x)\tan^2 x$ [ĐH B04]

6). $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right) - 3\tan^2 x = \dfrac{\cos 2x - 1}{\cos^2 x}$ [Dự bị 2 ĐH B05]

7). $\tan\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right) + \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = 2$ [Dự bị 1 ĐH D05]

8). $\cot x + \sin x\left(1+\tan x\tan\dfrac{x}{2}\right) = 4$ [ĐH B06]

9). $\sin 2x + \sin x - \dfrac{1}{2\sin x} - \dfrac{1}{\sin 2x} = 2\cot 2x$ [Dự bị 1 ĐH A07]

10). $\dfrac{\sin 2x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} = \tan x - \cot x$ [Dự bị 2 ĐH B07]

11). $(1-\tan x)(1+\sin 2x) = 1 + \tan x$ [Dự bị 2 ĐH D07]

LỜI GIẢI

1). $\tan^4 x + 1 = \dfrac{\left(2-\sin^2 2x\right)\sin 3x}{\cos^4 x}$ (1)

Điều kiện : $\cos x \neq 0$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} + 1 = \frac{\left(2-\sin^2 2x\right)\sin 3x}{\cos^4 x} \Leftrightarrow \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\cos^4 x} = \frac{\left(2-\sin^2 2x\right)\sin 3x}{\cos^4 x}$$

$$\Leftrightarrow \sin^4 x + \cos^4 x = (2-\sin^2 2x)\sin 3x$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{\sin^2 2x}{2}=(2-\sin^2 2x)\sin 3x \Leftrightarrow 2-\sin^2 2x=2(2-\sin^2 2x)\sin 3x$$

$$\Leftrightarrow (2-\sin^2 2x)(1-2\sin 3x)=0 \Leftrightarrow \sin 3x=\frac{1}{2} \text{ hoặc } \sin^2 2x=2 \text{ (vô nghiệm)}$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x=\sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3} \text{ hoặc } x=\frac{5\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3},(k\in ¢)$$

2). $\tan x+\cos x-\cos^2 x=\sin x\left(1+\tan x.\tan\frac{x}{2}\right)$ (1).

Điều kiện : $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \cos\frac{x}{2}\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq\pi+k2\pi\end{cases},k\in ¢$

Ta có: $1+\tan x.\tan\frac{x}{2}=1+\dfrac{\sin x\sin\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}}=\dfrac{\cos x\cos\frac{x}{2}+\sin x\sin\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}}=\dfrac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos x\cos\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{\cos x}$

$(1)\Leftrightarrow \tan x+\cos x-\cos^2 x=\dfrac{\sin x}{\cos x}\Leftrightarrow \cos x(1-\cos x)=0\Leftrightarrow \cos x=1 \quad \Leftrightarrow x=k2\pi,(k\in ¢)$

So với điều kiện nghiệm của phương trình $x=k2\pi,(k\in ¢)$

3). $\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\tan^2 x-\cos^2\frac{x}{2}=0$ (1)

Điều kiện : $\cos x\neq 0\Leftrightarrow \sin x\neq\pm 1$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[1-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{1}{2}(1+\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\sin x).\frac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x}-(1+\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\sin x)\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}-(1+\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\sin x}-(1+\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos x)(1+\cos x)-(1+\cos x)(1+\sin x)=0$$

$$\Leftrightarrow (1+\cos x)(\sin x+\cos x)=0\Leftrightarrow 1+\cos x=0 \text{ hoặc } \sin x+\cos x=0$$

$\Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$ hoặc $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

So với điều kiện nghiệm phương trình $x = \pi + k2\pi$, $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

4). $3 - \tan x\left(\tan x + 2\sin x\right) + 6\cos x = 0$ (1)

Điều kiện : $\cos x \neq 0$

$$(1) \Leftrightarrow 3 - \frac{\sin x}{\cos x}\left(\frac{\sin x + 2\sin x\cos x}{\cos x}\right) + 6\cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\cos^2 x - \sin^2 x\left(1 + 2\cos x\right) + 6\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\cos^2 x\left(1 + 2\cos x\right) - \sin^2 x\left(1 + 2\cos x\right) = 0 \Leftrightarrow \left(1 + 2\cos x\right)\left(3\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + 2\cos x\right)\left(4\cos^2 x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 + 2\cos x = 0 \\ 4\cos^2 x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -\dfrac{1}{2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

So với điều kiện nghiệm phương trình $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$

5). $\cos 2x + \cos x\left(2\tan^2 x - 1\right) = 2$ (1)

Điều kiện : $\cos x \neq 0$

$$(1) \Leftrightarrow \cos 2x + \frac{2\sin^2 x}{\cos x} - \cos x = 2 \quad \Leftrightarrow \frac{2\sin^2 x}{\cos x} - \cos x = 2 - \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin^2 x}{\cos x} - \cos x = 1 + 2\sin^2 x \quad \Leftrightarrow \frac{2\sin^2 x}{\cos x} - 2\sin^2 x = 1 + \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right) = 1 + \cos x \quad \Leftrightarrow 2(1 - \cos^2 x)(1 - \cos x) = (1 + \cos x)\cos x$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \cos x\right)\left[2(1 - \cos x)^2 - \cos x\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + k\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., \left(k \in \mathbb{Z}\right)$$

So với điều kiện nghiệm phương trình $x = \pi + k\pi, x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in ¢)$

6). $5\sin x - 2 = 3(1-\sin x)\tan^2 x$ (1)

Điều kiện : $\cos x \neq 0$

$(1) \Leftrightarrow 5\sin x - 2 = \frac{3\sin^2 x}{1-\sin^2 x}(1-\sin x) \Leftrightarrow (5\sin x - 2)(1+\sin x) = 3\sin^2 x$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$ hoặc $\sin x = -2$ (loại)

Với $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in ¢)$

So với điều kiện nghiệm phương trình $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in ¢)$

6). $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3\tan^2 x = \frac{\cos 2x - 1}{\cos^2 x}$ (1)

Điều kiện : $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, (k \in ¢)$

$(1) \Leftrightarrow -\cot x - 3\tan^2 x = -\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \frac{1}{\tan x} + \tan^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \tan^3 x = -1 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in ¢)$.

So với điều kiện nghiệm của phương trình: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in ¢)$

7). $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \frac{\sin x}{1+\cos x} = 2$ (1)

Ta có $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$

(1) $\Leftrightarrow \cot x + \frac{\sin x}{1+\cos x} = 2 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1+\cos x} = 2$

Điều kiện : $\sin x \neq 0$

$\Leftrightarrow \cos x(1+\cos x) + \sin^2 x = 2\sin x(1+\cos x) \quad \Leftrightarrow \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x = 2\sin x(1+\cos x)$

$\Leftrightarrow \cos x + 1 = 2\sin x(1+\cos x)$

$\Leftrightarrow (1+\cos x)(1-2\sin x) = 0 \Leftrightarrow 1+\cos x = 0$ hoặc $1 - 2\sin x = 0$

Với $1+\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x=-1$ (so với điều kiện loại).

Với $1-2\sin x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ hoặc $x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

So với điều kiện nghiệm của phương trình: $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

8). $\cot x+\sin x\left(1+\tan x\tan\dfrac{x}{2}\right)=4$ (1)

Điều kiện : $\begin{cases}\sin 2x\neq 0\\ \cos\dfrac{x}{2}\neq 0\end{cases}$. Ta có : $1+\tan x.\tan\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{\cos x}$

$(1)\Leftrightarrow \dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{\sin x}{\cos x}=4\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sin x\cos x}=4 \Leftrightarrow 2\sin 2x=1$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi$ hoặc $x=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

So với điều kiện nghiệm của phương trình: $x=\dfrac{\pi}{12}+k\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi$ $\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

9). $\sin 2x+\sin x-\dfrac{1}{2\sin x}-\dfrac{1}{\sin 2x}=2\cot 2x$ (1)

Điều kiện : $\sin 2x\neq 0$

(1) $\Leftrightarrow \sin^2 2x+\sin 2x\sin x-\cos x-1=2\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x-1+\cos x(2\sin^2 x-1)=2\cos 2x \Leftrightarrow -\cos^2 2x+\cos 2x.\cos x-2\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\cos 2x+\cos x+2)=0$ $\Leftrightarrow \cos 2x(2\cos^2 x+\cos x+1)=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x=0$ hoặc $2\cos^2 x+\cos x+1=0$

Với $\cos 2x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}$

Với $2\cos^2 x+\cos x+1=0$ phương trình vô nghiệm.

So với điều kiện nghiệm của phương trình $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}$

10). $\dfrac{\sin 2x}{\cos x}+\dfrac{\cos 2x}{\sin x}=\tan x-\cot x$ (1)

Điều kiện : $\sin 2x\neq 0\Leftrightarrow 2x\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq\dfrac{k\pi}{2},\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{\cos 2x.\cos x + \sin 2x.\sin x}{\sin x \cos x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{\sin x} \Leftrightarrow \dfrac{\cos x}{\sin x \cos x} = \dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x}$

$\Leftrightarrow \cos x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \vee \cos x = -1$

Với $\cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, \left(k \in ¢\right)$

Với $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, (k \in ¢)$. So với điều kiện nghiệm này loại.

Kết luận nghiệm của phương trình $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, \left(k \in ¢\right)$

11). $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$ (1)

Điều kiện : $\cos x \neq 0$

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x}.(\sin x + \cos x)^2 = \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x}$

$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x)^2 = \cos x + \sin x$

$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)\big((\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - 1\big) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \sin^2 x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x + \sin x = 0 \vee \cos 2x - 1 = 0$

Với $\cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi, \left(k \in ¢\right)$

Với $\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in ¢)$

Kết luận nghiệm của phương trình $x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi,\ x = k\pi, (k \in ¢)$

Câu : Giải các phương trình sau:

1). $\tan x = \cot x + 4\cos^2 2x$ (1) [Dự bị 1 ĐH A08]

2). $\dfrac{\tan^2 x + \tan x}{\tan^2 x + 1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ (1) [Dự bị 2 ĐH D08]

3). $\dfrac{\left(1 + \sin x + \cos 2x\right)\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x$ (1) [ĐH A10]

4). $\dfrac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\cot^2 x}=\sqrt{2}\sin x\sin 2x$ (1) [ĐH A11]

5). $\dfrac{\sin 2x+2\cos x-\sin x-1}{\tan x+\sqrt{3}}=0$ (1) [ĐH D11]

6). $1+\tan x=2\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ (1) [ĐH A 2013]

LỜI GIẢI

1). $\tan x=\cot x+4\cos^2 2x$ (1)

Điều kiện : $\sin 2x\neq 0$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}+4\cos^2 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x+2\cos^2 2x\sin 2x=0 \Leftrightarrow \cos 2x+\sin 4x.\cos 2x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(1+\sin 4x)=0 \qquad \Leftrightarrow \cos 2x=0 \text{ hoặc } \sin 4x=-1.$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \text{ hoặc } x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\left(k\in\mathbb{Z}\right).$$

So với điều kiện nghiệm của phương trình $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}, x=-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2},\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

2). $\dfrac{\tan^2 x+\tan x}{\tan^2 x+1}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ (1)

Điều kiện : $\cos x\neq 0$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{\tan^2 x+\tan x}{\tan^2 x+1}=\frac{1}{2}\left(\sin x+\cos x\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x\left(\tan^2 x+\tan x\right)=\sin x+\cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x\left(\frac{\sin^2 x+\sin x\cos x}{\cos^2 x}\right)=\sin x+\cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x\left(\sin x+\cos x\right)-\left(\sin x+\cos x\right)=0 \Leftrightarrow \left(\sin x+\cos x\right)\left(2\sin x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x+\cos x=0 \vee 2\sin x=1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \vee x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \vee x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

So với điều kiện nghiệm của phương trình $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi, x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

3). $\dfrac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x\ \ (1)$

Điều kiện $\begin{cases}1+\tan x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{cases},(k\in\mathbb{Z})$

$$(1)\Leftrightarrow\frac{(1+\sin x+\cos 2x)\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)\cos x}{\sin x+\cos x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$$

$$\Leftrightarrow 1+\sin x+\cos 2x=1\Leftrightarrow \sin x+1-2\sin^2 x=0\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x=1\vee \sin x=-\frac{1}{2}$$

Với $\sin x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,k\in\mathbb{Z}$ so với điều kiện nghiệm này loại.

Với $\sin x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ hoặc $x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi,\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi\ ,(k\in\mathbb{Z})$

4). $\dfrac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\cot^2 x}=\sqrt{2}\sin x\sin 2x\ \ (1)$

Điều kiện $\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi,k\in\mathbb{Z}$

$$(1)\Leftrightarrow(1+\sin 2x+\cos 2x)\sin^2 x=2\sqrt{2}\sin^2 x\cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x+1+\cos 2x=2\sqrt{2}\cos x\quad\Leftrightarrow 2\sin x\cos x+2\cos^2 x=2\sqrt{2}\cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos x\left(\sin x+\cos x-\sqrt{2}\right)=0\quad\Leftrightarrow \cos x=0\vee \sin x+\cos x-\sqrt{2}=0$$

Với $\cos x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$

Với $\sin x+\cos x-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

So với điều kiện nghiệm của phương trình: $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ x=\dfrac{\pi}{4}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

5). $\dfrac{\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0 \;\; (1)$

Điều kiện $\begin{cases} \tan x + \sqrt{3} \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$

$(1) \Leftrightarrow \sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos x - \sin x + 2\cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 1) + (2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos x - 1 = 0 \vee \sin x + 1 = 0$

Với $2\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Với $\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

So với điều kiện nghiệm của phương trình: $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

6). $1 + \tan x = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \;\; (1)$

Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$(1) \Leftrightarrow 1 + \dfrac{\sin x}{\cos x} = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \qquad \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 2\sqrt{2}\cos x\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\cos x\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)(2\cos x - 1) = 0$

Với $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \dfrac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

Với $\cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$

So với điều kiện nghiệm của phương trình $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$