Câu : Giải các phương trình sau:

1). $\dfrac{1-2\sin x-2\sin 2x+2\cos x}{2\sin x-1}=\cos 2x-\sqrt{3}\left(1+\cos x\right)$

2). $\cos 2x-\tan^2 x=\dfrac{\cos^2 x+\cos^3 x-1}{\cos^2 x}$

3). $\dfrac{4\cos^2\dfrac{x}{2}+2\cos^2\left(\dfrac{7\pi}{4}-x\right)-\sqrt{3}\cos\left(2x-3\pi\right)-3}{1-2\sin x}=0$

4). $\dfrac{\sin x.\sin 2x+2\sin x.\cos^2 x+\sin x+\cos x}{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{6}\cos 2x$

5). $1+\cot 2x=\dfrac{4\sin^2 x}{1-\cos 4x}$

6). $\cos 2x+\sqrt{3}\left(1+\sin x\right)=\dfrac{2\cos x+2\sin 2x-2\sin x-1}{2\cos x-1}$

7). $\dfrac{2\sqrt{3}\sin 2x\left(1+\cos 2x\right)-4\cos 2x.\sin^2 x-3}{2\sin 2x-1}=0$

8). $\sin^2 x+\dfrac{(1+\cos 2x)^2}{2\sin 2x}=2\cos 2x$

LỜI GIẢI

1). $\dfrac{1-2\sin x-2\sin 2x+2\cos x}{2\sin x-1}=\cos 2x-\sqrt{3}\left(1+\cos x\right)(*)$

LỜI GIẢI

Điều kiện: $2\sin x-1\neq 0\Leftrightarrow \sin x\neq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x\neq\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{cases},\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Ý tưởng: Các bạn để ý: tử của vế trái, tử số phân tích được thành nhân tử chung, và rút gọn được mẫu…ta làm như sau:

$$(*)\Leftrightarrow\frac{1-2\sin x-4\sin x\cos x+2\cos x}{2\sin x-1}=\cos 2x-\sqrt{3}\left(1+\cos x\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{-\left(2\sin x-1\right)-2\cos x\left(2\sin x-1\right)}{2\sin x-1}=\cos 2x-\sqrt{3}\left(1+\cos x\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2\sin x-1)(-1-2\cos x)}{2\sin x-1}=\cos 2x-\sqrt{3}(1+\cos x)$$

$$\Leftrightarrow -1-2\cos x=2\cos^2 x-1-\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+\left(2-\sqrt{3}\right)\cos x-\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\vee \cos x=-1$$

Với $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{6}\quad x=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi,(k\in Z)$

Với $\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi\quad (k\in Z)$.

Kết hợp với điều kiện nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi; x=\pi+k2\pi,(k\in Z)$.

2). $\cos 2x-\tan^2 x=\frac{\cos^2 x+\cos^3 x-1}{\cos^2 x}(*)$

LỜI GIẢI

Điều kiện: $\cos x\neq 0$.

Ý tưởng: Biến đổi VP ta rút gọn được $\tan^2 x$....

$(*)\Leftrightarrow \cos 2x-\tan^2 x=\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\quad \Leftrightarrow \cos 2x-\tan^2 x=1+\cos x-\frac{1}{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow \cos 2x-\tan^2 x=1+\cos x-\left(1+\tan^2 x\right)$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-1-\cos x=0 \quad\Leftrightarrow 2\cos^2 x-\cos x-1=0\Leftrightarrow \cos x=1$ hoặc $\cos x=-\frac{1}{2}$.

So với điều kiện $\cos x\neq 0$ hai giá trị này đều nhận.

Với $\cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi\quad (k\in Z)$.

Với $\cos x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos x=\cos\frac{2\pi}{3}\quad\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\quad (k\in Z)$.

Nghiệm của phương trình: $x=k2\pi; x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi; x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi,(k\in Z)$.

3). $\frac{4\cos^2\frac{x}{2}+2\cos^2\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)-\sqrt{3}\cos(2x-3\pi)-3}{1-2\sin x}=0\quad (*)$

LỜI GIẢI

Điều kiện: $1-2\sin x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x \neq \sin\dfrac{\pi}{6} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x \neq \dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{cases}, (k \in Z)$.

Ý tưởng: Hạ bậc, sau đó rút gọn...

Ta có: g $4\cos^2\dfrac{x}{2} = 4.\dfrac{1+\cos x}{2} = 2(1+\cos x)$.

g $2\cos^2\left(\dfrac{7\pi}{4}-x\right) = 1+\cos\left(\dfrac{7\pi}{2}-2x\right) = 1+\cos\left(3\pi+\dfrac{\pi}{2}-2x\right)$

$= 1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right) = 1-\sin 2x.$

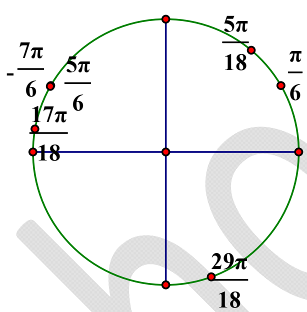
$(*) \Leftrightarrow 2(1+\cos x)+1-\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x-3=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x+2\cos x=0 \quad \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x=-2\cos x$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\dfrac{1}{2}\sin 2x=-\cos x \quad \Leftrightarrow \cos 2x.\cos\dfrac{\pi}{6}-\sin 2x.\sin\dfrac{\pi}{6}=-\cos x$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos(\pi-x) \Leftrightarrow x=\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{3}$ hoặc $x=-\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi, (k \in Z)$

Biểu diễn nghiệm



Ta thấy hai đầu mút $-\dfrac{7\pi}{6}$ và $\dfrac{5\pi}{6}$ trùng nhau, vậy nghiệm $x=-\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi$ loại.

Còn nghiệm $x=\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{3}$ được biểu diễn ba đầu mút $\dfrac{5\pi}{18}, \dfrac{17\pi}{18}, \dfrac{29\pi}{18}$ đều khác hai đầu mút $\dfrac{\pi}{6}$ và $\dfrac{5\pi}{6}$.

Vậy nghiệm $x=\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{3}$ nhận.

Kết luận nghiệm phương trình $x=\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{3}$.

Để biết nghiệm $x=\alpha+\frac{k2\pi}{n},(k,n\in ¢)$***, có bao nhiêu đầu mút, ta lấy*** $k2\pi:\left(\frac{k2\pi}{n}\right)=n$ ***vậy nghiệm này có n đầu mút, sau đó chọn k = 0,1, 2, 3,..., n – 1.***

4). $\frac{\sin x.\sin 2x+2\sin x.\cos^2 x+\sin x+\cos x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{6}\cos 2x(*)$

LỜI GIẢI

Điều kiện: $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\neq 0\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq -\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in ¢$

$$(*)\Leftrightarrow\frac{2\sin^2 x.\cos x+2\sin x.\cos^2 x+\sin x+\cos x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{6}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\sin x.\cos x(\sin x+\cos x)+(\sin x+\cos x)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{6}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)(1+2\sin x\cos x)=\sqrt{3}\cos 2x(\sin x+\cos x)$$

$$\Leftrightarrow 1+2\sin x\cos x=\sqrt{3}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)^2=\sqrt{3}(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)$$

$$\Leftrightarrow\sin x+\cos x=\sqrt{3}(\sin x-\cos x)$$

$$\Leftrightarrow\left(1-\sqrt{3}\right)\sin x=-\left(\sqrt{3}+1\right)\cos x$$

$$\Leftrightarrow\tan x=\frac{-\left(\sqrt{3}+1\right)}{1-\sqrt{3}}\quad\Leftrightarrow\tan x=\tan\frac{5\pi}{12}\quad\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{12}+k\pi,(k\in Z).$$

So với điều kiện nghiệm của phương trình $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi,(k\in Z)$

5). $1+\cot 2x=\frac{4\sin^2 x}{1-\cos 4x}(*)$

LỜI GIẢI

Điều kiện: $\begin{cases}\sin 2x\neq 0\\1-\cos 4x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 2x\neq 0\\\cos 4x\neq 1\end{cases}$

$(*) \Leftrightarrow 1+\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{4\sin^2 x}{2\sin^2 2x}$

$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{2\sin^2 x}{\sin^2 2x}$

$\Leftrightarrow (\sin 2x+\cos 2x)\sin 2x=1-\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x-1+\sin 2x\cos 2x+\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow (\sin 2x-1)(\sin 2x+1)+\cos 2x(\sin 2x+1)=0$

$\Leftrightarrow (\sin 2x+1)(\sin 2x-1+\cos 2x)=0$

$\Leftrightarrow \sin 2x+1=0 \ \vee \ \sin 2x+\cos 2x-1=0$

Với $\sin 2x+1=0 \Leftrightarrow \sin 2x=-1$ (nhận) $\Leftrightarrow 2x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi.$

Với $\sin 2x+\cos 2x=1 \Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ hoặc $x=k\pi$.

Ta thấy $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ thì $\sin 2x=\sin\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)=-1\neq 0$ và $\cos 4x=\cos(-\pi+k4\pi)=-1\neq 0$. Vậy nghiệm $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ nhận.

Tương tự thay 2 nghiệm $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=k\pi$ thì nghiệm $x=k\pi$ làm sin 2x = 0, nên nghiệm này bị loại.

So với điều kiện nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi; x=\frac{\pi}{4}+k\pi (k\in Z)$

6). $\cos 2x+\sqrt{3}(1+\sin x)=\frac{2\cos x+2\sin 2x-2\sin x-1}{2\cos x-1} (*)$

LỜI GIẢI

Điều kiện: $2\cos x-1\neq 0 \Leftrightarrow \cos x\neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x\neq \pm\frac{\pi}{3}+k2\pi, (k\in Z)$.

Phân tích tử số của VP thành nhân tử, sau đó rút gọn...

$(*) \Leftrightarrow \cos 2x+\sqrt{3}(1+\sin x)=\frac{(2\cos x-1)+2\sin x(2\cos x-1)}{2\cos x-1}$

$\Leftrightarrow \cos 2x+\sqrt{3}(1+\sin x)=\frac{(2\cos x-1)(1+2\sin x)}{2\cos x-1}$

$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x+\sqrt{3}+\sqrt{3}\sin x=1+2\sin x$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+\left(2-\sqrt{3}\right)\sin x-\sqrt{3}=0 \;\Leftrightarrow \sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ hoặc $\sin x=-1$.

Với $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x=\sin\dfrac{\pi}{3} \;\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$ hoặc $x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi,\left(k\in Z\right)$

Với $\sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\left(k\in Z\right)$

So với điều kiện nghiệm của phương trình: $x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi; x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\left(k\in Z\right)$.

7). $\dfrac{2\sqrt{3}\sin 2x\left(1+\cos 2x\right)-4\cos 2x.\sin^2 x-3}{2\sin 2x-1}=0\left(*\right)$

LỜI GIẢI

Điều kiện: $2\sin 2x-1\neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x\neq\dfrac{1}{2} \;\Leftrightarrow \begin{cases} 2x\neq\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ 2x\neq\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq\dfrac{\pi}{12}+k\pi \\ x\neq\dfrac{5\pi}{12}+k\pi \end{cases},\left(k\in Z\right)$.

$\left(*\right)\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin 2x+2\sqrt{3}\sin 2x\cos 2x-2\cos 2x\left(1-\cos 2x\right)-3=0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin 2x-2\cos 2x+\sqrt{3}\sin 4x+2\cos^2 2x-3=0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin 2x-2\cos 2x+\sqrt{3}\sin 4x+1+\cos 4x-3=0$

$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x\right)+\sqrt{3}\sin 4x+\cos 4x-2=0$

$\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\dfrac{1}{2}\cos 2x\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x+\dfrac{1}{2}\cos 4x-1=0$

$\Leftrightarrow 2\left(\sin 2x.\cos\dfrac{\pi}{6}-\cos 2x.\sin\dfrac{\pi}{6}\right)+\left(\sin 4x.\sin\dfrac{\pi}{3}+\cos 4x.\cos\dfrac{\pi}{3}\right)-1=0$

$\Leftrightarrow 2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right)-1=0$

Ta có $4x-\dfrac{\pi}{3}=2\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ áp dụng công thức nhân đôi, ta được:

$\Leftrightarrow 2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+1-2\sin^2\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)-1=0$

$\Leftrightarrow 2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)\left(1-\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)=0 \;\;\Leftrightarrow \sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=0 \vee \sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=1$

Với $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+k\pi$ hoặc $x=\frac{7\pi}{12}+k\pi,\left(k\in Z\right)$

Với $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=1 \Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi \quad \left(k\in Z\right)$.

So với điều kiện nghiệm của phương trình: $x=\frac{7\pi}{12}+k\pi; x=\frac{\pi}{3}+k\pi,\left(k\in Z\right)$.

8). $\sin^2 x+\frac{(1+\cos 2x)^2}{2\sin 2x}=2\cos 2x$

Điều kiện $\sin 2x\neq 0$

$\Leftrightarrow \quad 1-\cos^2 x+\frac{4\cos^4 x}{4\sin x.\cos x}=2(2\cos^2 x-1) \quad \Leftrightarrow \quad \cot x.\cos^2 x=5\cos^2 x-3$

Chia hai vế cho $\cos^2 x$ (dựa vào điều kiện $\cos x\neq 0$)

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\tan x}=5-\frac{3}{\cos^2 x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\tan x}=5-3(1+\tan^2 x) \quad \Leftrightarrow \quad 3\tan^3 x-2\tan x+1=0$

$\Leftrightarrow \quad \tan x=1 \quad \Leftrightarrow \quad x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \quad (k\in \text{¢})$

So với điều kiện nghiệm của phương trình $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \quad (k\in \text{¢})$

Câu : Giải các phương trình sau:

1). $\frac{1-\cos x}{\tan x}+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{7\pi}{4}\right)$

2). $\frac{(4\sin^2 x+1)\cos x+2\sin x(2\cos x-\sqrt{3})-\sqrt{3}}{2\sin x+1}+2\sqrt{3}\sin^2 x=\cos x$

3). $\frac{2\sin x}{1+\tan x.\tan\frac{x}{2}}=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{7\pi}{4}\right)+1$

4). $\frac{\tan x.\cos 3x+2\cos 2x-1}{1-2\sin x}=\sqrt{3}(\sin 2x+\cos x)$

5). $\frac{2(1+\cot 2x.\cot x)}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^4 x}=48$

6). $\frac{\sin 3x-\cos x}{\cos 2x}=\sqrt{2}\left(\frac{\tan^2 x+2\tan x-1}{1-\tan^2 x}\right)$

7). $\dfrac{\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x-\sqrt{3}\sin x-\cos x+\sqrt{3}}{2\sin x-1}=1$

8). $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+\dfrac{1}{1-\cos x}+\cot x=2$

9). $\dfrac{\sin 2x-\cos 2x+4\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-3\cos x}{\cos x-1}=1$

10). $\dfrac{1-2\sin x}{1+2\sin x}=\dfrac{1-\sin x}{\sqrt{3}\cos x}$

LỜI GIẢI

1). $\dfrac{1-\cos x}{\tan x}+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{7\pi}{4}\right)$ (1)

Điều kiện $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \tan x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq k\pi\end{cases}$

Ta có : $\sin\left(2x+\dfrac{7\pi}{4}\right)=\sin\left(2x+2\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

(1) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{(1-\cos x).\cos x}{\sin x}+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

Có $\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin 2x-\cos 2x$, và quy đồng mẫu được:

$\Leftrightarrow$ $(1-\cos x).\cos x+\sin^2 x=(\sin 2x-\cos 2x).\sin x$

$\Leftrightarrow$ $\cos x-\cos^2 x+\sin^2 x=\sin 2x.\sin x-\cos 2x.\sin x$

Biến đổi $-\cos^2 x+\sin^2 x=-\cos 2x$ *và* $\sin 2x.\sin x=2\sin^2 x.\cos x$ *được:*

$\Leftrightarrow$ $\cos x-\cos 2x=2\sin^2 x.\cos x-\cos 2x.\sin x$

$\Leftrightarrow$ $(\cos x-2\sin^2 x.\cos x)-\cos 2x+\cos 2x.\sin x=0$

$\Leftrightarrow$ $\cos x(1-2\sin^2 x)-\cos 2x+\cos 2x.\sin x=0$

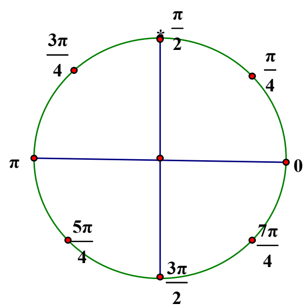
$\Leftrightarrow$ $\cos x.\cos 2x-\cos 2x+\cos 2x.\sin x=0$

$\Leftrightarrow$ $\cos 2x(\cos x+\sin x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \cos x+\sin x-1=0\end{array}\right.$

$*$ Với $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

$*$ Với $\cos x + \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Biểu diễn nghiệm :



Nghiệm $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ được biểu diễn hai đầu mút là $\dfrac{\pi}{2}$ và $\dfrac{3\pi}{2}$.

Nghiệm $x = k\pi$ được biểu diễn hai đầu mút là 0 và π.

Vậy ta phải bỏ 4 đầu mút 0, $\dfrac{\pi}{2}$, π, $\dfrac{3\pi}{2}$.

Nghiệm $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ được biểu diễn 1 đầu mút là $\dfrac{\pi}{2}$.

Nghiệm $x = k2\pi$ được biểu diễn 1 đầu mút là 0 .

Nghiệm $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ được biểu diễn 4 đầu mút là : $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$.

So với điều kiện hai nghiệm $x = k2\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ loại.

Kết luận nghiệm của phương trình : $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

2). $\dfrac{(4\sin^2 x + 1)\cos x + 2\sin x(2\cos x - \sqrt{3}) - \sqrt{3}}{2\sin x + 1} + 2\sqrt{3}\sin^2 x = \cos x$

$$\Leftrightarrow \frac{4\sin^2 x.\cos x + \cos x + 4\sin x\cos x - 2\sqrt{3}\sin x - \sqrt{3}}{2\sin x + 1} + 2\sqrt{3}\sin^2 x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x(4\sin^2 x + 4\sin x + 1) - \sqrt{3}(2\sin x + 1)}{2\sin x + 1} + 2\sqrt{3}\sin^2 x = \cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x(2\sin x + 1)^2 - \sqrt{3}(2\sin x + 1)}{2\sin x + 1} + 2\sqrt{3}\sin^2 x = \cos x$$

$\Leftrightarrow\ \cos x(2\sin x+1)-\sqrt{3}+2\sqrt{3}\sin^2 x=\cos x$

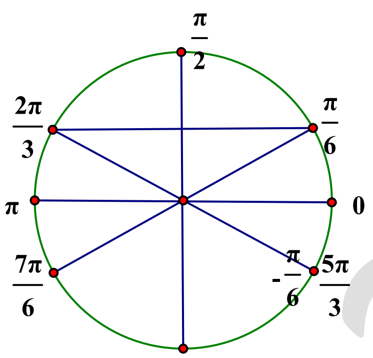
$\Leftrightarrow\ 2\sin x\cos x+\cos x-\sqrt{3}(1-2\sin^2 2x)=\cos x$

$\Leftrightarrow\ \sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=0\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow\ \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0\ \Leftrightarrow\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\quad (k\in\mathbb{Z})$

Điều kiện : $2\sin x+1\neq 0\ \Leftrightarrow\ \sin x\neq -\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x\neq -\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x\neq \frac{7\pi}{6}+k2\pi \end{cases}\quad (k\in\mathbb{Z})$

Biểu diễn nghiệm trên vòng tròn lượng lượng giác:



Nghiệm $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$ được biểu diễn 4 đầu mút $\frac{\pi}{6},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{7\pi}{6},\ \frac{5\pi}{3}$.

Ta có đầu mút $-\frac{\pi}{6}$ và $\frac{5\pi}{3}$ trùng nhau.

So với điều kiện ta chọn 2 đầu mút $\frac{\pi}{6},\ \frac{2\pi}{3}$.

Vậy nghiệm của phương trình $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi, (k\in\mathbb{Z})$

3). $\frac{2\sin x}{1+\tan x.\tan\frac{x}{2}}=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{7\pi}{4}\right)+1\qquad (1)$

Điều kiện $\begin{cases} \cos x\neq 0 \\ \cos\frac{x}{2}\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \\ x\neq\pi+k2\pi \end{cases}, (k\in\mathbb{Z})$.

Ta có : $\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{7\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x-2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin x+\cos x$.

Và $1+\tan x.\tan\frac{x}{2}=1+\frac{\sin\frac{x}{2}.\sin x}{\cos\frac{x}{2}.\cos x}=\frac{\cos x.\cos\frac{x}{2}+\sin x.\sin\frac{x}{2}}{\cos x.\cos\frac{x}{2}}=\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos x.\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{\cos x}$

(1) $\Leftrightarrow\ 2\sin x.\cos x=\sin x+\cos x+1$ (1')

Đặt $t=\sin x+\cos x\ \Rightarrow\ \sin x.\cos x=\frac{t^2-1}{2}$. Điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$

(1') $\Leftrightarrow\ t^2-1=t+1\ \Leftrightarrow\ t^2-t-2=0\Leftrightarrow t=-1\vee t=2$ (loại).

$*$ Với $t=-1\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-1\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=\pi+\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=\pi+k2\pi\end{array}\right.$

So với điều kiện hai nghiệm này đều không thỏa.

Vậy phương trình vô nghiệm.

4). $\frac{\tan x.\cos 3x+2\cos 2x-1}{1-2\sin x}=\sqrt{3}(\sin 2x+\cos x)$ (1)

Điều kiện : $1-2\sin x\neq 0\ \Leftrightarrow\ \sin x\neq\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\neq\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x\neq\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$

Ý tưởng quy đồng mẫu, sau đó đổi tanx bằng sinx chia cosx rồi quy đồng mẫu...

$\Leftrightarrow\ \tan x.\cos 3x+2\cos 2x-1=\sqrt{3}(2\sin x.\cos x+\cos x)(1-2\sin x)$

$\Leftrightarrow\ \sin x.\cos 3x+2\cos 2x.\cos x-\cos x=\sqrt{3}\cos x(2\sin x+1)(1-2\sin x)$

$\Leftrightarrow\ \sin x.\cos 3x+2\cos 2x.\cos x-\cos x=\sqrt{3}\cos^2 x(1-4\sin^2 x)$

$\Leftrightarrow\ \sin x.\cos 3x+2\cos 2x.\cos x-\cos x=\sqrt{3}\cos^2 x(4\cos^2 x-3)$

$\Leftrightarrow\ \sin x.\cos 3x+2\cos 2x.\cos x-\cos x=\sqrt{3}\cos x(4\cos^3 x-3\cos x)$

$\Leftrightarrow\ \sin x.\cos 3x+\cos 3x+\cos x-\cos x=\sqrt{3}\cos x.\cos 3x$

$\Leftrightarrow\ \cos 3x(\sin x+1-\sqrt{3}\cos x)=0$

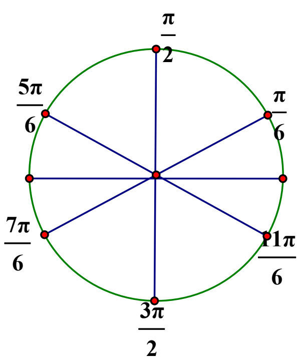
$\Leftrightarrow\ \cos 3x=0\ \vee\ \sin x-\sqrt{3}\cos x=-1$

$*$ Với $\cos 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$

$*$ Với $\sin x - \sqrt{3}\cos x = -1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Biểu diễn nghiệm trên vòng tròn lượng giác:



Nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$ có 6 đầu mút $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$.

Vì sao biết có 6 đầu mút?

Ta lấy $k2\pi : \left(\frac{k\pi}{3}\right) = 6$, sau đó chọn k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 thay vào nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$

Nghiệm $\frac{\pi}{6} + k2\pi$ có 1 đầu mút $\frac{\pi}{6}$.

Nghiệm $\frac{5\pi}{6} + k2\pi$ có 1 đầu mút $\frac{5\pi}{6}$.

So với điều kiện bỏ hai đầu mút $\frac{\pi}{6}$ và $\frac{5\pi}{6}$.

Vậy nghiệm của phương trình $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$, $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

5). $\frac{2(1 + \cot 2x.\cot x)}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^4 x} = 48$ (1)

Điều kiện $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$

Bước đầu tiên rút gọn $1 + \cot 2x.\cot x$. *Ta có :* $1 + \cot 2x.\cot x =$

$$=1+\frac{\cos 2x}{\sin 2x}.\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\cos 2x.\cos x+\sin 2x.\sin x}{\sin 2x.\sin x}=\frac{\cos x}{\sin 2x.\sin x}=\frac{1}{2\sin^2 x}$$

$$(1)\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{\sin^4 x}+\frac{1}{\cos^4 x}=48 \qquad \Leftrightarrow\ \sin^4 x+\cos^4 x=48.\sin^4 x.\cos^4 x$$

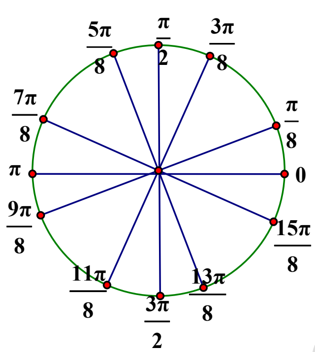
$$\Leftrightarrow\ 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=48.(\sin x.\cos x)^4 \quad \Leftrightarrow\ 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=48.\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^4$$

$\Leftrightarrow\ 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=3\sin^4 2x$. Đặt $t=\sin^2 2x$ Điều kiện $0\le t\le 1$

$\Leftrightarrow\ 3t^2+\frac{1}{2}t-1=0\ \Leftrightarrow\ t=\frac{1}{2}\ \vee\ t=-\frac{2}{3}$ (loại)

$*$ Với $t=\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ \sin^2 2x=\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow \cos 4x=0 \Leftrightarrow 4x=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$

Biểu diễn nghiệm trên vòng tròn lượng giác:



Nghiệm $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$ được biểu diễn 8 đầu mút $\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8},\frac{5\pi}{8},\frac{7\pi}{8},\frac{9\pi}{8},\frac{11\pi}{8},\frac{13\pi}{8},\frac{15\pi}{8}$.

Nghiệm $x=\frac{k\pi}{2}$ được biểu diễn 4 đầu mút là $0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$.

Ta thấy các đầu mút của hai nghiệm này không trùng nhau.

Kết luận nghiệm của phương trình : $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\ \ (k\in\mathbb{Z})$

6). $\frac{\sin 3x-\cos x}{\cos 2x}=\sqrt{2}\left(\underbrace{\frac{\tan^2 x+2\tan x-1}{1-\tan^2 x}}_{A}\right)$ (1)

Điều kiện : $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \\ 1-\tan^2 x \neq 1 \end{cases}$

Ý tưởng: Biến đổi tan thành sin chia cos ở mẫu của vế phải rồi quy đồng được cos2x

Ta có: $A = \dfrac{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+2\dfrac{\sin x}{\cos x}-1}{1-\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \dfrac{\sin^2 x+2\sin x.\cos x-\cos^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x} = \dfrac{\sin 2x-\cos 2x}{\cos 2x}$ (1) $\Leftrightarrow$

$\dfrac{\sin 3x-\cos x}{\cos 2x} = \sqrt{2}.\dfrac{\sin 2x-\cos 2x}{\cos 2x}$

$\Leftrightarrow \sin 3x-\cos x = \sqrt{2}(\sin 2x-\cos 2x) \quad \Leftrightarrow \sin 3x-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = 2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow 2\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow 2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)\left[\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-1\right] = 0 \Leftrightarrow 2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \vee \cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-1 = 0$

$*$ Với $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x-\dfrac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2} \quad (k \in \text{¢})$

$*$ Với $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x+\dfrac{\pi}{4} = k2\pi \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \quad (k \in \text{¢})$

So với điều kiện thì $x = -\dfrac{\pi}{4}+k2\pi$ không thỏa điều kiện $\cos 2x \neq 0$

Kết luận phương trình có nghiệm : $x = \dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2} \quad (k \in \text{¢})$

7). $\dfrac{\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x-\sqrt{3}\sin x-\cos x+\sqrt{3}}{2\sin x-1} = 1 \quad (*)$

Điều kiện $2\sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{6}+k2\pi, x \neq \dfrac{5\pi}{6}+k2\pi \quad (k \in Z) \quad (1)$

$(*) \Leftrightarrow \sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x-\sqrt{3}\sin x-\cos x+\sqrt{3} = 2\sin x-1$

$\Leftrightarrow \sin 2x-\sqrt{3}\left(1-2\sin^2 x\right)-\sqrt{3}\sin x-\cos x+\sqrt{3}-2\sin x+1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x\left(2\sin x-1\right)+\sqrt{3}\sin x\left(2\sin x-1\right)-\left(2\sin x-1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x-1\right)\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x-1\right) = 0 \Leftrightarrow \cos x+\sqrt{3}\sin x-1 = 0$ (do $2\sin x-1 \neq 0$)

$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi$ hoặc $x=k2\pi,(k\in Z)$

Vậy phương trình có hai họ nghiệm $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi, x=k2\pi \quad (k\in Z)$.

8). $\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{1}{1-\cos x}+\cot x=2 \quad (*)$

Điều kiện $\cos x\neq \pm1, \sin x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq k\pi, \quad k\in Z$.

$(*) \Leftrightarrow \frac{\sin x-\sin x\cos x+1+\cos x}{\sin^2 x}+\frac{\cos x}{\sin x}=2$

$\Leftrightarrow \sin x+\cos x+1=2\sin^2 x \Leftrightarrow \sin x+\cos x+\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(1+\cos x-\sin x)=0 \Leftrightarrow \sin x+\cos x=0$ hoặc $1+\cos x-\sin x=0$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ hoặc $x=\pi+k2\pi,(k\in Z)$

Đối chiếu với điều kiện nghiệm của phương trình $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in Z$.

9). $\frac{\sin 2x-\cos 2x+4\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-3\cos x}{\cos x-1}=1. \quad (*)$

Điều kiện: $\cos x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq k2\pi, k\in Z$

$(*) \Leftrightarrow \sin 2x-\cos 2x+4(\sin x+\cos x)-4\cos x+1=0$

$\Leftrightarrow \sin 2x+(1-\cos 2x)+4\sin x=0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos x+2\sin^2 x+4\sin x=0$

$\Leftrightarrow \sin x(\cos x+\sin x+4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x+\sin x+4=0\,(VN)\end{array}\right. \Leftrightarrow x=k\pi.$

So với điều kiện ban đầu, suy ra $x=\pi+k2\pi, k\in Z$ là nghiệm phương trình.

10). $\frac{1-2\sin x}{1+2\sin x}=\frac{1-\sin x}{\sqrt{3}\cos x} \quad (*)$

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin x\neq -\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq -\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x\neq \frac{7\pi}{6}+k2\pi.\end{cases}$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x(1-2\sin x) = (1-\sin x)(1+2\sin x) \Leftrightarrow \sqrt{3}(\cos x - \sin 2x) = \sin x + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x - \sin x = \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ hoặc } x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, k \in ¢$$

Kết hợp với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}$.

Câu : Giải các phương trình sau:

1). Tìm $x \in (0;2\pi): 5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1+2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3$ [ĐH A02]

2). $\sqrt{\frac{1}{8\cos^2 x}} = \sin x$ [Dự bị 6 ĐH02]

3). $\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\cos x - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos x - 1} = 1$ [Dự bị 2 ĐH B03]

4). $\frac{\cos^2 x(\cos x - 1)}{\sin x + \cos x} = 2(1+\sin x)$ [Dự bị 1 ĐH D03]

5). $\frac{2\left(\cos^6 x + \sin^6 x\right) - \sin x\cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$ [ĐH A06]

6). $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right)$ [ĐH A08]

LỜI GIẢI

1). Tìm $x \in (0;2\pi): 5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1+2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3$

Điều kiện : $\sin 2x \neq -\frac{1}{2}$

$$(1) \Leftrightarrow 5\left(\frac{\sin x + 2\sin x\sin 2x + \cos 3x + \sin 3x}{1+\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\frac{\sin x + \cos x - \cos 3x + \cos 3x + \sin 3x}{1+2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow 5\left(\frac{\sin 3x+\sin x+\cos x}{1+2\sin 2x}\right)=\cos 2x+3 \Leftrightarrow 5\left(\frac{2\sin 2x\cos x+\cos x}{1+2\sin 2x}\right)=\cos 2x+3$$

$$\Leftrightarrow 5\frac{\cos x\left(1+2\sin 2x\right)}{1+2\sin 2x}=\cos 2x+3 \Leftrightarrow 5\cos x=\cos 2x+3 \Leftrightarrow 2\cos^2 x-5\cos x+3=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x=2 \text{ (loại) hoặc } \cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \text{ hoặc } x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi,\left(k\in ¢\right)$$

Vì $x\in\left(0;2\pi\right)$. Nên nghiệm của phương trình : $x=\frac{\pi}{3}\ ;x=\frac{5\pi}{3}$

2). $\sqrt{\frac{1}{8\cos^2 x}}=\sin x\ \ (1)$

Điều kiện : $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin x\geq 0\end{cases}$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{1}{8\cos^2 x}=\sin^2 x \Leftrightarrow 1=8\sin^2 x\cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 2x-1=0 \Leftrightarrow \cos 4x=0 \Leftrightarrow 4x=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$$

Vì : $\sin x\geq 0\quad x=\frac{\pi}{8}+m2\pi\quad x=\frac{3\pi}{8}+m2\pi\,;m\in ¢\quad x=\frac{5\pi}{8}+m2\pi\quad x=\frac{7\pi}{8}+m2\pi$

3). $\dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right)\cos x-2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)}{2\cos x-1}=1\ \ \left(1\right)$

Điều kiện : $\cos x\neq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ x\neq-\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{cases},k\in ¢$

$$(1)\Leftrightarrow (2-\sqrt{3})\cos x-\left[1-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]=2\cos x-1$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x-\sqrt{3}\cos x-1+\sin x=2\cos x-1 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x-\sin x=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x=0 \Leftrightarrow \cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6}=0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \text{ hoặc } x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi,\left(k\in ¢\right)$$

So với điều kiện nghiệm của phương trình : $x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi;\left(k\in ¢\right)$

4). $\dfrac{\cos^2 x\left(\cos x-1\right)}{\sin x+\cos x}=2\left(1+\sin x\right)$ (1)

Điều kiện : $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\neq 0$

(1) $\Leftrightarrow (1-\sin^2 x)(\cos x-1)=2(1+\sin x)(\sin x+\cos x)$

$\Leftrightarrow \left(1+\sin x\right)\left[(1-\sin x)(\cos x-1)-2(\sin x+\cos x)\right]=0$

$\Leftrightarrow \left(1+\sin x\right)\left[\cos x-1-\sin x\cos x+\sin x-2\sin x-2\cos x\right]=0$

$\Leftrightarrow \left(1+\sin x\right)\left[\sin x+1+\sin x\cos x+\cos x\right]=0$

$\Leftrightarrow \left(1+\sin x\right)\left[(1+\sin x)+\cos x(1+\sin x)\right]=0$

$\Leftrightarrow \left(1+\sin x\right)^2\left(1+\cos x\right)=0 \Leftrightarrow \sin x=-1 \vee \cos x=-1$

$\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$ hoặc $x=\pi+k2\pi,\left(k\in \mathbb{Z}\right)$

So với điều kiện nghiệm phương trình $x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi,\ x=\pi+k2\pi,\left(k\in \mathbb{Z}\right)$

6). $\dfrac{2\left(\cos^6 x+\sin^6 x\right)-\sin x\cos x}{\sqrt{2}-2\sin x}=0$ (1)

Điều kiện : $\sin x\neq\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\begin{cases} x\neq\dfrac{\pi}{4}+k2\pi \\ x\neq\dfrac{3\pi}{4}+k2\pi\end{cases},\left(k\in \mathbb{Z}\right)$

(1) $\Leftrightarrow 2\left(\sin^6+\cos^6 x\right)-\sin x\cos x=0 \Leftrightarrow 2\left(1-\dfrac{3\sin^2 2x}{4}\right)-\dfrac{1}{2}\sin 2x=0$

$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x+\sin 2x-4=0 \Leftrightarrow \sin 2x=1$ hoặc $\sin 2x=\dfrac{4}{3}$ (loại).

Với $\sin 2x=1\Leftrightarrow 2x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\left(k\in \mathbb{Z}\right)$

So với điều kiện nghiệm của (1) là $x=\dfrac{5\pi}{4}+k2\pi,\left(k\in \mathbb{Z}\right)$

7). $\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\sin\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)}=4\sin\left(\dfrac{7\pi}{4}-x\right)$ (1)

Điều kiện : $\sin x \neq 0$ và $\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)\neq 0$

Chú ý : $\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)=\cos x$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{4}-x\right)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x+\cos x)$$

$(1)\Leftrightarrow \frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=-2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)\Leftrightarrow \frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}=-2\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$

$\Leftrightarrow 2(\sin x+\cos x)\left(\frac{1+\sqrt{2}\sin 2x}{\sin 2x}\right)=0\Leftrightarrow \sin x+\cos x=0$ hoặc $\sin 2x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ hoặc $x=-\frac{\pi}{8}+k\pi$ hoặc $x=\frac{5\pi}{8}+k\pi; k\in$ ¢

Nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=-\frac{\pi}{8}+k\pi$, $x=\frac{5\pi}{8}+k\pi; k\in$ ¢

1.29: Giải các phương trình:

a) $(1-\tan x)(1+\sin 2x)=1+\tan x$

b) $2\tan x.\cos x+1=2\cos x+\tan x$

c) $\sin 2x+2\tan x=3$

d) $\sin 2x=2\cos x+\sqrt{3}\sin x-\sqrt{3}$

LỜI GIẢI

a) $(1-\tan x)(1+\sin 2x)=1+\tan x$ (1). Điều kiện: $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

$(1)\Leftrightarrow\left(1-\frac{\sin x}{\cos x}\right)(1+\sin 2x)=1+\frac{\sin x}{\cos x}$

$\Leftrightarrow\left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}\right)(\sin x+\cos x)^2=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}$

$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)\left[(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)-1\right]=0$

$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)(\cos^2 x-\sin^2 x-1)=0\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)(\cos 2x-1)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ \cos 2x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \cos 2x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=k\pi\\ 2x=k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=k\pi\end{array}\right.\quad(k\in z).$$

So với điều kiện nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, x=k\pi \quad (k \in z)$

b) $2\tan x.\cos x+1=2\cos x+\tan x \quad (1)$. Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, (k \in \text{¢})$

$(1) \Leftrightarrow 2\tan x.\cos x+1-2\cos x-\tan x=0$

$\Leftrightarrow \tan x(2\cos x-1)-(2\cos x-1)=0 \Leftrightarrow (2\cos x-1)(\tan x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos x-1=0 \\ \tan x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x=\frac{1}{2} \\ \tan x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \text{¢}).$$

So với điều kiện của phương trình: $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi, x=\frac{\pi}{4}+k\pi \quad (k \in \text{¢})$.

c) $\sin 2x+2\tan x=3$ (1). Điều kiện $\cos x \neq 0$

$(1) \Leftrightarrow 2\sin x\cos x+2\tan x=3 \Leftrightarrow \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x}+\frac{2\tan x}{\cos^2 x}=\frac{3}{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow 2\tan x+2\tan x(1+\tan^2 x)=3(1+\tan^2 x)$

$\Leftrightarrow 2\tan^3 x-3\tan^2 x+4\tan x-3=0 \Leftrightarrow \tan x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, (k \in \text{¢})$

Giải các phương trình sau:

1). $\frac{\cos x}{\cos 3x}-\frac{\cos 5x}{\cos x}=8\sin x\sin 3x$

2). $\sin 4x+3\sin 2x=\tan 2x$

3). $\cos 5x.\cos x=\cos 4x.\cos 2x+3\cos^2 x+1$

4). $3(\tan x+\cot x)=2(2+\sin 2x)$

5). $\frac{1+2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x+\sin 2x}{2\sin x\cos x-1}=1$

6). $\frac{1}{\tan x+\cot 2x}=\frac{\sqrt{2}(\cos x-\sin x)}{\cot x-1}$

7). $\frac{1}{1-\tan^2 x}=\frac{\sin^2 x+1}{\cos 2x}+\sqrt{3}\tan 2x$

9). $2\cos^3 x + 2\sin^3 x + 2\sin^2 x\cos x + 2\cos^2 x\sin x - \sqrt{2} = 0$

10). $\dfrac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \sqrt{3}$

LỜI GIẢI

1). $\dfrac{\cos x}{\cos 3x} - \dfrac{\cos 5x}{\cos x} = 8\sin x\sin 3x$ (1)

Điều kiện: $\begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3} \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow \cos^2 x - \cos 3x.\cos 5x = 8\sin x.\sin 3x.\cos 3x.\cos x$

$\Leftrightarrow \cos^2 x - \cos 3x.\cos 5x = 2\sin 2x.\sin 6x$

$\Leftrightarrow \dfrac{1 + \cos 2x}{2} - \dfrac{1}{2}\left(\cos 2x + \cos 8x\right) = \cos 4x - \cos 8x$

$\Leftrightarrow 1 + \cos 2x - \cos 2x - \cos 8x = 2\cos 4x - 2\cos 8x$

$\Leftrightarrow 1 + \cos 8x - 2\cos 4x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 4x - 2\cos 4x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 4x\left(\cos 4x - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 4x = 0$ hoặc $\cos 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}$ hoặc $x = \dfrac{k\pi}{2}, \left(k \in ¢\right)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}, x = \dfrac{k\pi}{2}, \left(k \in ¢\right)$

2). $\sin 4x + 3\sin 2x = 2\tan 2x \ (1)$

Điều kiện: $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$

$(1) \Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos 2x + 3\sin 2x = 2.\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} \Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos^2 2x + 3\sin 2x\cos 2x = 2\sin 2x$

$\Leftrightarrow \sin 2x\left(2\cos^2 2x + 3\cos 2x - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0$ hoặc $2\cos^2 2x + 3\cos 2x - 2 = 0$

Với $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2} \quad \left(k \in ¢\right)$

Với $2\cos^2 2x + 3\cos 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \dfrac{1}{2} \vee \cos 2x = -2$ (loai).

$\Leftrightarrow 2x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi, \left(k \in ¢\right)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{k\pi}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

3). $\cos 5x.\cos x=\cos 4x.\cos 2x+3\cos^2 x+1\ (1)$

$(1)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\cos 4x+\cos 6x\right)=\frac{1}{2}\left(\cos 2x+\cos 6x\right)+3.\frac{1+\cos 2x}{2}+1$

$\Leftrightarrow\cos 4x+\cos 6x=\cos 2x+\cos 6x+3\left(1+\cos 2x\right)+2$

$\Leftrightarrow\cos 4x=4\cos 2x+5\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-1=4\cos 2x+5$

$\Leftrightarrow\cos^2 2x-2\cos 2x-3=0\Leftrightarrow\cos 2x=3$ (vô nghiệm) hoặc $\cos 2x=-1$

Với $\cos 2x=-1\Leftrightarrow 2x=\pi+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

4). $3\left(\tan x+\cot x\right)=2\left(2+\sin 2x\right)\ (1)$

$(1)\Leftrightarrow 3\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)=2\left(2+\sin 2x\right)$

$\Leftrightarrow 3\frac{1}{\sin x.\cos x}=2\left(2+\sin 2x\right)\quad\Leftrightarrow\frac{6}{\sin 2x}=2\left(2+\sin 2x\right)$

Điều kiện $\sin 2x\neq 0\Leftrightarrow 2x\neq k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$\Leftrightarrow\sin^2 2x+2\sin 2x-3=0\Leftrightarrow\sin 2x=1\ \vee\ \sin 2x=-3$ (vô nghiệm).

Với $\sin 2x=1\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

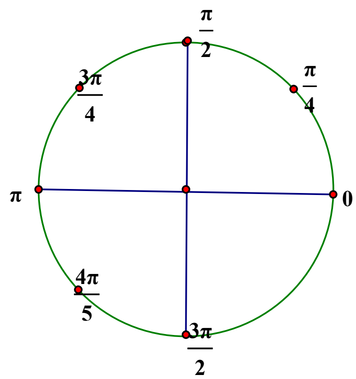
5). $\frac{1+2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x+\sin 2x}{2\sin x\cos x-1}=1\ (1)$

Điều kiện: $2\sin x\cos x\neq 1\Leftrightarrow\sin 2x\neq 1\Leftrightarrow 2x\neq\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+k\pi$

$(1)\Leftrightarrow 1+2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x+\sin 2x=\sin 2x-1\Leftrightarrow 2+2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x+2=0\Leftrightarrow\sin x=\sqrt{2}$ (vô ngiệm) hoặc $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Với $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right., (k \in ¢)$



Biểu diễn nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, có hai đầu mút là $\frac{\pi}{4}$ và $\frac{5\pi}{4}$.

Biểu diễn nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$, có một đầu mút $\frac{\pi}{4}$. Vậy so với điều kiện nghiệm này loại

Biểu diễn nghiệm $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$, có một đầu mút $\frac{3\pi}{4}$ không trùng với 2 đầu mút $\frac{\pi}{4}$ và $\frac{5\pi}{4}$. Vậy nghiệm này nhân.

Kết luận nghiệm của phương trình $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, (k \in ¢)$

6). $\frac{1}{\tan x + \cot 2x} = \frac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{\cot x - 1}$ (1)

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \\ \cot x \neq 1 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x}} = \frac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{\frac{\cos x}{\sin x} - 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x.\sin 2x}{\sin 2x \sin x + \cos 2x \cos x} = \frac{\sqrt{2}\sin x(\cos x - \sin x)}{\cos x - \sin x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin x \cos^2 x}{\cos x} = \sqrt{2}\sin x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \text{¢})$$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \text{¢})$

So với điều kiện nghiệm của phương trình: $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \text{¢})$

7). $\dfrac{1}{1-\tan^2 x} = \dfrac{\sin^2 x + 1}{\cos 2x} + \sqrt{3}\tan 2x \ (1)$

Điều kiện: $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ 1-\tan^2 x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{1-\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\sin^2 x - 1}{\cos 2x} + \frac{\sqrt{3}\sin 2x}{\cos 2x} \quad \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + 1}{\cos 2x} + \frac{\sqrt{3}\sin 2x}{\cos 2x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 x}{\cos 2x} = \frac{\sin^2 + 1}{\cos 2x} + \frac{\sqrt{3}\sin 2x}{\cos 2x} \qquad \Leftrightarrow \cos^2 x = \sin^2 x + 1 + \sqrt{3}\sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 1 \qquad \Leftrightarrow \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = \frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \cos 2x.\cos\frac{\pi}{3} - \sin 2x.\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ hoặc } x = k\pi, (k \in \text{¢})$$

So với điều kiện nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, x = k\pi, (k \in \text{¢})$

9). $2\cos^3 x + 2\sin^3 x + 2\sin^2 x\cos x + 2\cos^2 x\sin x - \sqrt{2} = 0 \ (1)$

$$(1) \Leftrightarrow 2\left(\sin^3 x + \cos^3 x\right) + 2\sin x\cos x\left(\cos x + \sin x\right) - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sin x + \cos x\right)\left(1 - \sin x\cos x\right) + 2\sin x\cos x\left(\cos x + \sin x\right) - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sin x + \cos x\right)\left[\left(1 - \sin x\cos x\right) + \sin x\cos x\right] - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sin x + \cos x\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \text{ hoặc } x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi, (k \in \text{¢})$$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{12}+k2\pi, x=\frac{7\pi}{12}+k2\pi,(k\in ¢)$

10). $\frac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x}=\sqrt{3}\ \ (1)$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{\sin 3x+\sin x+\sin 2x}{\cos 3x+\cos x+\cos 2x}=\sqrt{3}\Leftrightarrow \frac{2\sin 2x.\cos 3x+\sin 2x}{2\cos 2x.\cos x+\cos 2x}=\sqrt{3}$$

$\Leftrightarrow \frac{\sin 2x(2\cos x+1)}{\cos 2x(2\cos x+1)}=\sqrt{3}\ \ (*)$. Điều kiện: $\begin{cases}\cos 2x\neq 0\\ 2\cos x-1\neq 0\end{cases}$

$$(*)\Leftrightarrow \tan 2x=\sqrt{3}\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{3}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\ \ (k\in ¢)$$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\ \ (k\in ¢)$

11). $\tan^2 x=\frac{1-\cos^3 x}{1-\sin^3 x}\ \ (1)$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1-\cos^3 x}{1-\sin^3 x}\Leftrightarrow \frac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x}=\frac{1-\cos^3 x}{1-\sin^3 x}$$

Điều kiện: $\sin^2 x\neq 1\Leftrightarrow \sin x\neq \pm 1$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{(1-\sin x)(1+\sin x+\sin^2 x)}$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos x)(1+\cos x)(1+\sin x+\sin^2 x)=(1-\cos x)(1+\sin x)(1+\cos x+\cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos x)\left[(1+\cos x)(1+\sin x+\sin^2 x)-(1+\sin x)(1+\cos x+\cos^2 x)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos x)(\sin^2 x+\sin^2 x\cos x-\cos^2 x-\sin x\cos^2 x)=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos x)\left[(\sin^2 x-\cos^2 x)+(\sin^2 x\cos x-\sin x\cos^2 x)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos x)\left[(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)+\sin x\cos x(\sin x-\cos x)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\cos x)(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x+\sin x\cos x)=0$$

$$\Leftrightarrow 1-\cos x=0\ (1)\vee \sin x-\cos x=0\ (2)\vee \sin x+\cos x+\sin x\cos x=0\ (3)$$

- Giải (1): $1-\cos x=0\Leftrightarrow \cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi$
- Giải (2): $\sin x-\cos x=0\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,(k\in ¢)$

• Giải (3): $\sin x+\cos x+\sin x\cos x=0$. Đặt $t=\sin x+\cos x\Rightarrow \sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$, điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$.

$(3)\Leftrightarrow t+\dfrac{t^2-1}{2}=0\Leftrightarrow t^2+2t-1=0\Leftrightarrow t=-1+\sqrt{2}\vee t=-1-\sqrt{2}$, so với điều kiện nhận $t=-1+\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sin x+\cos x=-1+\sqrt{2}\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{\pi}{4}=\arcsin\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}+k2\pi\\ x+\dfrac{\pi}{4}=\pi-\arcsin\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{4}+\arcsin\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}+k2\pi\\ x=\dfrac{3\pi}{4}-\arcsin\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}+k2\pi\end{array}\right.,(k\in ¢)$$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=k2\pi$, $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$,

$x=-\dfrac{\pi}{4}+\arcsin\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}+k2\pi$, $x=\dfrac{3\pi}{4}-\arcsin\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}+k2\pi,(k\in ¢)$.

Giải các phương trình sau:

1). $\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right).\dfrac{1+\cos 2x}{\sin x}=1+\cot x$

2). $2\sin x+\cos 3x+\sin 2x=1+\sin 4x$

3). $\cos x+\tan x=1+\tan x.\sin x$

4). $\sin 3x+\cot^2 x=\dfrac{3\sin^2 x-7\sin^3 x+2\sin^4 x+1}{\sin^2 x}$

5). $(\tan x+1).\sin^2 x+\cos 2x+2=3(\cos x+\sin x).\sin x$

6). $3\tan^3 x-\tan x+\dfrac{3(1+\sin x)}{\cos^2 x}-8\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right)=0$.

7). $3\cot^2 x+2\sqrt{2}\sin^2 x=(2+3\sqrt{2})\cos x$

8). $\cos x.\cos\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{3x}{2}-\sin x.\sin\dfrac{x}{2}.\sin\dfrac{3x}{2}=\dfrac{1}{2}$

LỜI GIẢI

1). $\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right).\dfrac{1+\cos 2x}{\sin x}=1+\cot x$

Điều kiện $\sin x\ne 0\quad\Leftrightarrow\quad x\ne k\pi$

$$\Leftrightarrow\ (\cos x+\sin x).\frac{2\cos^2 x}{\sin x}=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x}$$

$\Leftrightarrow\ (\sin x+\cos x)(2\cos^2 x-1)=0$

$\Leftrightarrow\ (\sin x+\cos x)\cos 2x=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ \cos 2x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0\\ 2x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$$

So với điều kiện nghiệm của phương trình $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$

2). $2\sin x+\cos 3x+\sin 2x=1+\sin 4x$

$\Leftrightarrow\ 2\sin x+\cos 3x=1+\sin 4x-\sin 2x$ $\quad\Leftrightarrow\ 2\sin x+\cos 3x=1+2\cos 3x.\sin x$

$\Leftrightarrow\ (2\sin x-1)+\cos 3x-2\cos 3x.\sin x=0$ $\quad\Leftrightarrow\ (2\sin x-1)-\cos 3x(2\sin x-1)=0$

$\Leftrightarrow\ (2\sin x-1)(1-\cos 3x)=0$ $\quad\Leftrightarrow\ 2\sin x=1$ hoặc $1=\cos 3x$

Với $2\sin x=1\Leftrightarrow \sin x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ hoặc $x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

Với $\cos 3x=1\ \Leftrightarrow\ 3x=k2\pi\ \Leftrightarrow\ x=\dfrac{k2\pi}{3}$ $(k\in\mathbb{Z})$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$, $x=\dfrac{k2\pi}{3}$ $(k\in\mathbb{Z})$

3). $\cos x+\tan x=1+\tan x.\sin x$

Điều kiện $\cos x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow\ \cos x+\dfrac{\sin x}{\cos x}=1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$

$\Leftrightarrow\ \cos^2 x+\sin x=\cos x+\sin^2 x$

$\Leftrightarrow\ \cos^2 x-\sin^2 x+\sin x-\cos x=0$

$\Leftrightarrow\ (\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)-(\cos x-\sin x)=0$

$\Leftrightarrow\ (\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x-1)=0\Leftrightarrow \cos x-\sin x=0$ hoặc $\cos x+\sin x=1$

Với $\cos x-\sin x=0\ \Leftrightarrow\ \sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0\ \Leftrightarrow\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

Với $\cos x+\sin x=1\Leftrightarrow \cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$ hoặc $x=k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

So với điều kiện nghiệm của phương trình : $x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ ,\ x=k2\pi\ \ (k\in ¢)$

$$4).\ \sin 3x+\cot^2 x=\frac{3\sin^2 x-7\sin^3 x+2\sin^4 x+1}{\sin^2 x}\qquad (1)$$

Điều kiện $\sin x\neq 0$

$$(1)\ \Leftrightarrow\ \sin 3x+\cot^2 x=3-7\sin x+2\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\Leftrightarrow\ 3\sin x-4\sin^3 x+\cot^2 x=3-7\sin x+2\sin^2 x+1+\cot^2 x$$

$$\Leftrightarrow\ 4\sin^3 x+2\sin^2 x-10\sin x+4=0\Leftrightarrow \sin x=-2\vee \sin x=1\vee \sin x=\frac{1}{2}$$

Với $\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi,(k\in ¢)$

Với $\sin x=1\ \Leftrightarrow\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\ \ (k\in ¢)$

Với $\sin x=-2$ (loại).

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\ ,\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\ ,\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\ \ (k\in ¢)$

$$5).\ (\tan x+1).\sin^2 x+\cos 2x+2=3(\cos x+\sin x).\sin x\ \ (1)$$

Điều kiện : $\cos x\neq 0$

Chia hai vế của (1) cho $\cos^2 x$ ta được :

$$\frac{(\tan x+1).\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{3(\cos x+\sin x).\sin x}{\cos^2 x}$$

$$(\tan x+1).\tan^2 x+2+1+\tan^2 x=3\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\tan x$$

$$\Leftrightarrow\ \tan^3 x+\tan^2 x+2+1+\tan^2 x=3(1+\tan x).\tan x$$

$$\Leftrightarrow\ \tan^3 x-\tan^2 x-3\tan x+3=0\Leftrightarrow \tan x=1 \text{ hoặc } \tan x=\pm\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi \text{ hoặc } x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi\ (k\in ¢)$$

Kết luận nghiệm của phương trình : $x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ ,\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi\ \ (k\in ¢)$.

$$6).\ 3\tan^3 x-\tan x+\frac{3(1+\sin x)}{\cos^2 x}-8\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=0.$$

Điều kiện : $\cos x \neq 0 (*)$ Phương trình :

$$\Leftrightarrow 3\tan^3 x - \tan x + \frac{3(1+\sin x)}{1-\sin^2 x} - 4\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^3 x - \tan x + \frac{3}{(1-\sin x)} - 4(1+\sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\tan^3 x - \tan x + \frac{3}{1-\sin x} - 4(1+\sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x(3\tan^2 x - 1) + \frac{3-4(1+\sin x)(1-\sin x)}{1-\sin x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x\left(3.\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1\right) + \frac{3-4\cos^2 x}{1-\sin x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x\left(\frac{3-4\cos^2 x}{\cos^2 x}\right) + \frac{3-4\cos^2 x}{1-\sin x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (3-4\cos^2 x)\left[\frac{\tan x}{\cos^2 x} + \frac{1}{1-\sin x}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 3-4\cos^2 x = 0 \vee \frac{\tan x}{\cos^2 x} + \frac{1}{1-\sin x} = 0$$

Với $3-4\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in ¢)$.

Với $\frac{\tan x}{\cos^2 x} + \frac{1}{1-\sin x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x(1-\sin x)(1+\sin x)} + \frac{1}{1-\sin x} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x + \cos x(1+\sin x)}{\cos x(1-\sin x)(1+\sin x)} = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x + \sin x\cos x = 0 \ (1)$$

Đặt $t = \sin x + \cos x \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$, điều kiện $|t| \leq \sqrt{2}$

$(1) \Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1+\sqrt{2} \vee t = -1-\sqrt{2}$, so với điều kiện nhận $t = -1+\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = -1+\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4} = \arcsin\frac{2-\sqrt{2}}{2} + k2\pi \\ x+\frac{\pi}{4} = \pi - \arcsin\frac{2-\sqrt{2}}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{2-\sqrt{2}}{2} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{2-\sqrt{2}}{2} + k2\pi \end{array}\right., (k \in ¢)$$

$\boxed{7).\ 3\cot^2 x+2\sqrt{2}\sin^2 x=(2+3\sqrt{2})\cos x}$

$$\Leftrightarrow \left(3\cot^2 x-3\sqrt{2}\cos x\right)+\left(2\sqrt{2}\sin^2 x-2\cos x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}-\sqrt{2}\cos x\right)-2\left(\sqrt{2}\sin^2 x-\cos x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 3\cos x\left(\frac{\cos x-\sqrt{2}\sin^2 x}{\sin^2 x}\right)+2\left(\cos x-\sqrt{2}\sin^2 x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x-\sqrt{2}\sin^2 x\right)\left(\frac{3\cos x}{\sin^2 x}+2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos x-\sqrt{2}\sin^2 x=0 \vee \frac{3\cos x}{\sin^2 x}+2=0$$

Với $\cos x-\sqrt{2}\sin^2 x=0 \Leftrightarrow \cos x-\sqrt{2}\left(1-\cos^2 x\right)=1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos^2 x+\cos x-\sqrt{2}=0$

$\Leftrightarrow \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2} \vee \cos x=-\sqrt{2}$ (loại).

Với $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi$.

Với $\frac{3\cos x}{\sin^2 x}+2=0 \Leftrightarrow 3\cos x+2\sin^2 x=0 \Leftrightarrow 3\cos x+2\left(1-\cos^2 x\right)=0$

$\Leftrightarrow -2\cos^2 x+3\cos x+2=0 \Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{2} \vee \cos x=-2$.

Với $\cos x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi,\left(k\in \text{¢}\right)$

$\boxed{8).\ \cos x.\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{3x}{2}-\sin x.\sin\frac{x}{2}.\sin\frac{3x}{2}=\frac{1}{2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos x+\cos 2x)\cos x-\frac{1}{2}(\cos x-\cos 2x)\sin x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x+\cos 2x\cos x-\sin x\cos x+\cos 2x.\sin x=1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\left(\sin x+\cos x\right)-\sin x\cos x-\left(1-\cos^2 x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\left(\sin x+\cos x\right)-\sin x\cos x-\sin^2 x=0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x\left(\sin x+\cos x\right)-\sin x\left(\cos x+\sin x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\cos 2x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = 0\\ \cos 2x - \sin x = 0\end{array}\right.$$

Với $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \text{¢})$

Với $\cos 2x - \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1$ hoặc $\sin x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in \text{¢})$