Dạng: $\alpha\sin 2x+\beta\cos 2x+\chi\sin x+\delta\cos x+\delta=0$

Biến đổi để đưa về dạng: $m\cos x\left(a\sin x-b\right)+n\left(a\sin x-b\right)\left(c\sin x+d\right)=0$

Hoặc $m\sin x\left(a\cos x-b\right)+n\left(a\cos x-b\right)\left(c\cos x+d\right)=0$

Câu :Giải các phương trình sau:

1). $8\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)-3\sqrt{3}\cos 2x=11-3\sqrt{3}\sin 4x-9\sin 2x$

2). Tìm nghiệm $x\in\left(0;\pi\right)$ của phương trình: $5\cos x+\sin x-3=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

3). $9\sin x+6\cos x-3\sin 2x+\cos 2x=8$ [DB A11]

4). $\dfrac{\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-5\sin x+\left(2-\sqrt{3}\right)\cos x+3+\sqrt{3}}{2\cos x+\sqrt{3}}=1$

5). $\sin 2x+2\cos 2x=1+\sin x-4\cos x$

6). $2\sqrt{2}\sin 2x-\cos 2x-7\sin x-2\sqrt{2}\cos x+4=0$

7). $\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin x+3\cos x-2$

8). $\cos 4x-3\sin 4x+9\cos 2x-3\sin 2x+5=0$

LỜI GIẢI

1). $8\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)-3\sqrt{3}\cos 2x=11-3\sqrt{3}\sin 4x-9\sin 2x\left(*\right)$

LỜI GIẢI

$\left(*\right)\Leftrightarrow 8\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\right)-3\sqrt{3}\cos 2x=11-6\sqrt{3}\sin 2x\cos 2x-9\sin 2x$

Phân phối, chuyển vế phải sang vế trái sau đó rút gọn ta được:

$\Leftrightarrow\left(6\sin^2 2x-9\sin 2x+3\right)+\left(3\sqrt{3}\cos 2x-6\sqrt{3}\sin 2x\cos 2x\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(2\sin^2 2x-3\sin 2x+1\right)+\left(\sqrt{3}\cos 2x-2\sqrt{3}\sin 2x\cos 2x\right)=0$

Chú ý: $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$ *với* x_1,x_2 *là nghiệm của* $ax^2+bx+c=0$

Áp dụng: $2\sin^2 2x-3\sin 2x+1=\left(\sin 2x-1\right)\left(2\sin x-1\right)$

$\Leftrightarrow\left(\sin 2x-1\right)\left(2\sin x-1\right)-\sqrt{3}\cos 2x\left(\sin 2x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow (2\sin 2x-1)\left(\sin 2x-1-\sqrt{3}\cos 2x\right)=0 \Leftrightarrow 2\sin 2x-1=0 \vee \sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x-1=0$

Với $2\sin 2x-1=0 \Leftrightarrow \sin 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+k\pi$ hoặc $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi,(k\in Z)$

Với $\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$.

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ hoặc $x=\frac{7\pi}{12}+k\pi,(k\in ¢)$

Nghiệm phương trình: $x=\frac{\pi}{12}+k\pi$, $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi$, $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=\frac{7\pi}{12}+k\pi$ $(k\in ¢)$

2). Tìm nghiệm $x\in(0;\pi)$ của phương trình: $5\cos x+\sin x-3=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)(*)$

LỜI GIẢI

Ý tưởng: Biến đổi vế phải thành sin2x và cos2x , sau đó biến đổi thành tích...

$(*)\Leftrightarrow 5\cos x+\sin x-3=\sin 2x+\cos 2x$

$\Leftrightarrow 5\cos x+\sin x-3=\sin 2x+2\cos^2 x-1$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-5\cos x+2+2\sin x\cos x-\sin x=0$

Chú ý: $2\cos^2 x-5\cos x+2=(2\cos x-1)(\cos x-1)$

$\Leftrightarrow (2\cos x-1)(\cos x-1)+\sin x(2\cos x-1)=0$

$\Leftrightarrow (2\cos x-1)(\cos x+\sin x-2)=0 \Leftrightarrow 2\cos x-1=0 \quad \vee \quad \cos x+\sin x-2=0$

Với $2\cos x-1=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{3}+m2\pi \end{array}\right.$ $(m,k\in Z)$.

Với $\cos x+\sin x-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2 \Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ (vô nghiệm)

Vì $x\in(0;\pi) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<\frac{\pi}{3}+k2\pi<\pi \\ 0<-\frac{\pi}{3}+m2\pi<\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{3}<k2\pi<\frac{2\pi}{3} \\ \frac{\pi}{3}<m2\pi<\frac{4\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{6}<k<\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6}<m<\frac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=0 \\ m=0 \end{array}\right.$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x=\pm\frac{\pi}{3}$.

3). $9\sin x+6\cos x-3\sin 2x+\cos 2x=8$ (1)

$\Leftrightarrow\left(6\cos x-6\sin x\cos x\right)+\left(1-2\sin^2 x+9\sin x-8\right)=0$

$\Leftrightarrow -6\cos x\left(\sin x-1\right)-\left(2\sin^2 x-9\sin x+7\right)=0$

$\Leftrightarrow -6\cos x\left(\sin x-1\right)-\left(\sin x-1\right)\left(2\sin x-7\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(\sin x-1\right)\left(-6\cos x-2\sin x+7\right)=0$

$\Leftrightarrow \sin x-1=0\vee 6\cos x+2\sin x-7=0$

Với $\sin x-1=0\Leftrightarrow \sin x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

Với $6\cos x+2\sin x-7=0$ phương trình vô nghiệm (vì $6^2+2^2<7^2$)

Nghiệm của phương trình là: $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

4). $\dfrac{\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-5\sin x+\left(2-\sqrt{3}\right)\cos x+3+\sqrt{3}}{2\cos x+\sqrt{3}}=1$ (*)

Điều kiện $2\cos x+\sqrt{3}\neq 0\Leftrightarrow x\neq\pm\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$

$(*)\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-5\sin x+\left(2-\sqrt{3}\right)\cos x+3+\sqrt{3}=2\cos x+\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-5\sin x-\sqrt{3}\cos x+3=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}\sin 2x-\sqrt{3}\cos x\right)+\left(-\cos 2x-5\sin x+3\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x\left(2\sin x-1\right)+\left(2\sin^2 x-5\sin x+2\right)=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x\left(2\sin x-1\right)+\left(2\sin x-1\right)\left(\sin x-2\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(2\sin x-1\right)\left(\sqrt{3}\cos x+\sin x-2\right)=0\Leftrightarrow 2\sin x-1=0$ hoặc $\sqrt{3}\cos x+\sin x-2=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ hoặc $x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$

So với điều kiện nghiệm của phương trình $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$

5). $\sin 2x+2\cos 2x=1+\sin x-4\cos x$ (*)

$(*)\Leftrightarrow\left(\sin 2x-\sin x\right)+\left(2\cos 2x+4\cos x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow (\sin 2x - \sin x) + (4\cos^2 x + 4\cos x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 1) + (2\cos x + 3)(2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + 2\cos x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos x - 1 = 0$ hoặc $\sin x + 2\cos x + 3 = 0$ (vô nghiệm, vì $1^2 + 2^2 < 3^2$)

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in ¢$

Kết luận: Các tập nghiệm cần tìm $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in ¢$

6). $2\sqrt{2}\sin 2x - \cos 2x - 7\sin x - 2\sqrt{2}\cos x + 4 = 0$ (*)

(*) $\Leftrightarrow \left(2\sqrt{2}\sin 2x - 2\sqrt{2}\cos x\right) + (-\cos 2x - 7\sin x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos x(2\sin x - 1) + (2\sin^2 x - 7\sin x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos x(2\sin x - 1) + (\sin x - 3)(2\sin x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)\left(2\sqrt{2}\cos x + \sin x - 3\right) = 0 \Leftrightarrow 2\sin x = 1$ hoặc $2\sqrt{2}\cos x + \sin x = 3$.

Với $2\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in ¢$

Với $2\sqrt{2}\cos x + \sin x = 3 \Leftrightarrow \cos(x - \alpha) = 1 \Leftrightarrow x = \alpha + k2\pi, k \in ¢$

(với $\frac{2\sqrt{2}}{3} = \cos\alpha$ và $\frac{1}{3} = \sin\alpha$).

Kết luận: Các tập nghiệm cần tìm $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi,\ x = \alpha + k2\pi, k \in ¢$

7). $\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x + 3\cos x - 2$ (*)

(*) $\Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x = \sin x + 3\cos x - 2 \Leftrightarrow (\sin 2x - \sin x) + (\cos 2x - 3\cos x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 1) + (2\cos^2 x - 3\cos x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 1) + (\cos x - 1)(2\cos x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow 2\cos x = 1$ hoặc $\sin x + \cos x = 1$.

$\Leftrightarrow 2\cos x = 1$ hoặc $\sin x + \cos x = 1$

$\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$ hoặc $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = k2\pi, k \in \text{¢}$.

Kết luận: Các tập nghiệm cần tìm $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = k2\pi, k \in \text{¢}$

8). $\cos 4x - 3\sin 4x + 9\cos 2x - 3\sin 2x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 1 - 6\sin 2x.\cos 2x + 9\cos 2x - 3\sin 2x + 5 = 0$

$\Leftrightarrow \left(-6\sin 2x.\cos 2x - 3\sin 2x\right) + \left(2\cos^2 2x + 9\cos 2x + 4\right) = 0$

$\Leftrightarrow -3\sin 2x\left(2\cos 2x + 1\right) + \left(2\cos 2x + 1\right)\left(\cos 2x + 4\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(2\cos 2x + 1\right)\left(-3\sin 2x + 2\cos 2x + 4\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x + 1 = 0$ hoặc $-3\sin 2x + 2\cos 2x + 4 = 0$

Với $2\cos 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \text{¢}$

Với $-3\sin 2x + 2\cos 2x + 4 = 0$. Phương trình vô nghiệm (vì $(-3)^2 + 2^2 < 4^2$).

1.30: Giải các phương trình :

1). $1 - \sin x = \left(\sin x + \cos x\right)\cos x$

2). $1 + \sin x + \sin 2x + \cos x + \cos 2x = 0$

3). $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos x3x$

4). $\sin 2x = 2\cos x + \sqrt{3}\sin x - \sqrt{3} \quad (1)$

LỜI GIẢI

1). $1 - \sin x = \left(\sin x + \cos x\right)\cos x \quad (1)$

$(1) \Leftrightarrow 1 - \sin x = \sin x\cos x + \cos^2 x$

$\Leftrightarrow 1 - \cos^2 x - \sin x - \sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x - \sin x - \sin x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(\sin x - 1 - \cos x\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \ \vee\ \sin x - \cos x = 1$

Với $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \quad \left(k \in \text{¢}\right)$

Với $\sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = \pi + k2\pi, \left(k \in \text{¢}\right)$.

Nghiệm phương trình $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ x=\pi+k2\pi,\left(k\in ¢\right)$.

2). $1+\sin x+\sin 2x+\cos x+\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow \sin x+\sin 2x+\cos x+\left(1+\cos 2x\right)=0 \Leftrightarrow \sin x+2\sin x\cos x+\cos x+2\cos^2 x=0$

$\Leftrightarrow \left(\sin x+2\sin x\cos x\right)+\left(\cos x+2\cos^2 x\right)=0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(1+2\cos x\right)+\cos x\left(1+2\cos x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(1+2\cos x\right)\left(\sin x+\cos x\right)=0 \Leftrightarrow 1+2\cos x=0 \quad \vee \quad \sin x+\cos x=0$

Với $1+2\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi.$

Với $\sin x+\cos x=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \quad \left(k\in z\right)$

3). $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+\cos 2x+\cos x3x$

$\Leftrightarrow \left(\sin 3x+\sin x\right)+\sin 2x=\left(\cos 3x+\cos x\right)+\cos 2x$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos x+\sin 2x=2\cos 2x.\cos x+\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin 2x\left(2\cos x+1\right)=\cos 2x\left(2\cos x+1\right)$

$\Leftrightarrow \left(2\cos x+1\right)\left(\sin 2x-\cos 2x\right)=0 \Leftrightarrow 2\cos x+1=0 \vee \sin 2x-\cos 2x=0$

Với $2\cos x+1=0 \Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi$

Với $\sin 2x-\cos 2x=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\left(k\in ¢\right)$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi, x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\left(k\in ¢\right)$

4). $\sin 2x=2\cos x+\sqrt{3}\sin x-\sqrt{3} \quad (1)$

$(1) \Leftrightarrow 2\sin x\cos x-2\cos x-\sqrt{3}\sin x+\sqrt{3}=0$

$\Leftrightarrow 2\cos x\left(\sin x-1\right)-\sqrt{3}\left(\sin x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left(\sin x-1\right)\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)=0$

$\Leftrightarrow \sin x=1$ hoặc $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ hoặc $x=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi,\left(k\in ¢\right)$

Nghiệm phương trình $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ x=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi,\left(k\in ¢\right)$

1.31: Giải các phương trình:

1). $\cos 2x-\cos x=2\sin^2\frac{3x}{2}$

2). $\sin x+\cos x=\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}$ 3). $\frac{1+\cos 2x}{\cos x}=\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$

4). $\sin^2 4x+\sin^2 3x=\sin^2 2x+\sin^2 x$ 5). $\sin^2 x+\sin^2 3x=\cos^2 2x+\cos^2 4x$

LỜI GIẢI

1). $\cos 2x-\cos x=2\sin^2\frac{3x}{2}\Leftrightarrow \cos 2x-\cos x=2.\frac{1-\cos 3x}{2}$

$\Leftrightarrow \cos 2x-\cos x=1-\cos 3x$ $\Leftrightarrow (\cos 3x-\cos x)+(\cos 2x-1)=0$

$\Leftrightarrow -2\sin 2x\sin x-(1-\cos 2x)=0$ $\Leftrightarrow -2\sin 2x\sin x-2\sin^2 x=0$

$\Leftrightarrow -2\sin x(\sin 2x+\sin x)=0$ $\Leftrightarrow -2\sin x(2\sin x\cos x+\sin x)=0$

$\Leftrightarrow -2\sin^2 x(2\cos x+1)=0$ $\Leftrightarrow \sin x=0 \ \vee\ 2\cos x+1=0$

Với $\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi \quad (k\in \mathbb{Z})$

Với $2\cos x+1=0\Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi \quad (k\in \mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình $x=k\pi$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi (k\in \mathbb{Z})$.

2). $\sin x+\cos x=\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x} \quad (1)$

Điều kiện: $1-\sin 2x\ne 0\Leftrightarrow \sin 2x\ne 1\Leftrightarrow 2x\ne\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x\ne\frac{\pi}{4}+k\pi \quad (k\in \mathbb{Z})$

$(1)\Leftrightarrow \sin x+\cos x=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{(\sin x-\cos x)^2}\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)=\frac{(\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x)}{(\cos x-\sin x)^2}$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)=\frac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x)=\sin x+\cos x$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x-1)=0\Leftrightarrow \sin x+\cos x=0 \ \vee\ \cos x-\sin x-1=0$

Với $\sin x+\cos x=0\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$

Với $\cos x-\sin x-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in ¢)$$

So với điều kiện nghiệm phương trình: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, x=k2\pi, x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi, (k\in ¢)$

3). $\frac{1+\cos 2x}{\cos x}=\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x} \quad (1)$

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ 1-\cos 2x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x\neq 0\\ \cos 2x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\\ 2x\neq k2\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq k\pi\end{cases} \quad (k\in ¢)$

Sử dụng công thức nhân đôi $\sin 2x=2\sin x\cos x,\ 1-\cos 2x=2\sin^2 x,\ 1+\cos 2x=2\cos^2 x$

$(1)\Leftrightarrow \frac{2\cos^2 x}{\cos x}=\frac{2\sin x\cos x}{2\sin^2 x} \Leftrightarrow 2\cos x=\frac{\cos x}{\sin x} \Leftrightarrow 2\cos x\sin x=\cos x$ (vì $\cos x\neq 0$)

$\Leftrightarrow 2\sin x=1 \Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi \ \vee\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \quad (k\in z)$

4). $\sin^2 4x+\sin^2 3x=\sin^2 2x+\sin^2 x \quad (1)$

Ý tưởng: Có bình phương ta hạ bậc, sau đó biến đổi tổng thành tích, và đặt nhân tử chung...

$(1)\Leftrightarrow \frac{1-\cos 8x}{2}+\frac{1-\cos 6x}{2}=\frac{1-\cos 4x}{2}+\frac{1-\cos 2x}{2}$

$\Leftrightarrow \cos 8x+\cos 6x=\cos 4x+\cos 2x \Leftrightarrow 2\cos 7x.\cos x=2\cos 3x.\cos x$

$\Leftrightarrow \cos x(\cos 7x-\cos 3x)=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \ \vee\ \cos 7x-\cos 3x=0$

Với $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in ¢)$

Với $\cos 7x-\cos 3x=0 \Leftrightarrow \cos 7x=\cos 3x \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{2}$ hoặc $x=\frac{k\pi}{5}, (k\in ¢)$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ x=\frac{k\pi}{2},\ x=\frac{k\pi}{5}, (k\in ¢)$

5). $\sin^2 x+\sin^2 3x=\cos^2 2x+\cos^2 4x \quad (1)$

$(1)\Leftrightarrow \frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 6x}{2}=\frac{1+\cos 4x}{2}+\frac{1+\cos 8x}{2}$

$\Leftrightarrow -\left(\cos 6x+\cos 2x\right)=\left(\cos 8x+\cos 4x\right)\Leftrightarrow -2\cos 4x.\cos 2x=2\cos 6x.\cos 2x$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x\left(\cos 6x+\cos 4x\right)=0\Leftrightarrow 4\cos 2x.\cos 5x.\cos x=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x=0$ hoặc $\cos 5x=0$ hoặc $\cos x=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ hoặc $x=\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}$ hoặc $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\left(k\in \text{¢}\right)$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,x=\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5},x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\left(k\in \text{¢}\right)$

1.33: Giải các phương trình:

1). $\left(1+\sin^2 x\right).\cos x+\left(1+\cos^2 x\right).\sin x=1+\sin 2x$

2). $\sin^3 x-\sqrt{3}\cos^3 x=\sin x.\cos^2 x-\sqrt{3}\sin^2 x.\cos x$

3). $\left(\sin 2x+\cos 2x\right).\cos x+2\cos 2x-\sin x=0$

4). $\sin 2x-\cos 2x+3\sin x-\cos x-1=0$

LỜI GIẢI

1). $\left(1+\sin^2 x\right).\cos x+\left(1+\cos^2 x\right).\sin x=1+\sin 2x\ \ (1)$

$(1)\Leftrightarrow \cos x+\sin^2 x.\cos x+\sin x+\cos^2 x.\sin x=1+\sin 2x$

$\Leftrightarrow \left(\sin x+\cos x\right)+\sin x.\cos x\left(\sin x+\cos x\right)=\left(\sin x+\cos x\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(\sin x+\cos x\right)\left[1+\sin x.\cos x-\left(\sin x+\cos x\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow \left(\sin x+\cos x\right)\left[\left(1-\sin x\right)-\cos x\left(1-\sin x\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow \left(\sin x+\cos x\right)\left(1-\sin x\right)\left(1-\cos x\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\1-\sin x=0\\1-\cos x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\\\sin x=1\\\cos x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=k\pi\\x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\x=k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\\x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\x=k2\pi\end{array}\right.\ \left(k\in \text{¢}\right)$$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,x=k2\pi,\left(k\in \text{¢}\right)$

2). $\sin^3 x-\sqrt{3}\cos^3 x=\sin x.\cos^2 x-\sqrt{3}\sin^2 x.\cos x\ \ (1)$

$(1) \Leftrightarrow \sin^3 x - \sin x.\cos^2 x - \sqrt{3}\cos^3 x + \sqrt{3}\sin^2 x.\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right) - \sqrt{3}\cos x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 0$

$\Leftrightarrow -\sin x.\cos 2x - \sqrt{3}\cos x.\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow -\cos 2x\left(\sin x + \sqrt{3}\cos x\right) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \ \vee \sin x + \sqrt{3}\cos x = 0.$

Với: $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

Với: $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x.\cos\frac{\pi}{3} + \cos x.\sin\frac{\pi}{3} = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \ \ (k \in ¢)$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in ¢)$

3). $(\sin 2x + \cos 2x).\cos x + 2\cos 2x - \sin x = 0 \ (1)$

$(1) \Leftrightarrow \sin 2x.\cos x + \cos 2x.\cos x + 2\cos 2x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x.\cos^2 x - \sin x\right) + \cos 2x\left(\cos x + 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(2\cos^2 x - 1\right) + \cos 2x\left(\cos x + 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x.\cos 2x + \cos 2x\left(\cos x + 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x\left(\sin x + \cos x + 2\right) = 0 \ \ \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \ \vee \ \sin x + \cos x + 2 = 0$

Với: $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \ \ (k \in ¢)$

Với: $\sin x + \cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -2 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$ (vô nghiệm).

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \ \ (k \in ¢)$

4). $\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 1 = 0 \ (1)$

$(1) \Leftrightarrow 2\sin x\cos x - \left(1 - 2\sin^2 x\right) + 3\sin x - \cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x\cos x - \cos x\right) + \left(2\sin^2 x + 3\sin x - 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x-1)+(2\sin x-1)(\sin x+2)=0$

$\Leftrightarrow (2\sin x-1)(\cos x+\sin x+2)=0$

Với $\sin x+\cos x+2=0$ (vô nghiệm)

Với: $2\sin x-1=0 \Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\,(k\in ¢)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi, (k\in ¢)$.

1.32: Giải các phương trình:

1). $\tan x+\tan 2x=\sin 3x.\cos x$ 2). $\cos^2 x-\sin^2 x=\sin 3x+\cos 4x$

3). $2\sin^3 x+\cos 2x=\sin x$ 4). $\sin x.\sin 2x.\sin 3x=\frac{1}{4}\sin 4x$

LỜI GIẢI

1). $\tan x+\tan 2x=\sin 3x.\cos x \quad (1)$

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \cos 2x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi\\ x\neq \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\end{cases} \quad (k\in ¢)$

$(1)\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\sin 3x.\cos x$, quy đồng mẫu hai vế ta được:

$\Leftrightarrow \sin x.\cos 2x+\sin 2x.\cos x=\sin 3x.\cos^2 x.\cos 2x$

Vì $\sin x.\cos 2x+\sin 2x.\cos x=\sin 3x$

$\Leftrightarrow \sin 3x=\sin 3x.\cos^2 x.\cos 2x \Leftrightarrow \sin 3x(\cos^2 x.\cos 2x-1)=0$

$\Leftrightarrow \sin 3x=0 \;\vee\; \cos^2 x.\cos 2x-1=0$

Với $\sin 3x=0 \Leftrightarrow 3x=k\pi \Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{3} \quad (k\in ¢)$

Với $\cos^2 x.\cos 2x-1=0 \Leftrightarrow \frac{1+\cos 2x}{2}.\cos 2x-1=0 \Leftrightarrow \cos^2 2x+\cos 2x-2=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x=1 \;\vee\; \cos 2x=-2$ (loại) $\Leftrightarrow 2x=k2\pi \Leftrightarrow x=k\pi \quad (k\in ¢)$

So với điều kiện nghiệm của phương trình: $x=\frac{k\pi}{3},\; x=k\pi \quad (k\in ¢)$

2). $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin 3x + \cos 4x \ \ (1)$

$(1) \Leftrightarrow \cos 2x = \sin 3x + \cos 4x \Leftrightarrow \ \sin 3x + (\cos 4x - \cos 2x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin 3x - 2\sin 3x.\sin x = 0 \Leftrightarrow \ \sin 3x(1 - 2\sin x) = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = 0 \ \vee \ 1 - 2\sin x = 0$

Với: $\sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{3} \ \ (k \in ¢)$

Với: $1 - 2\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in ¢)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \dfrac{k\pi}{3}, \ x = \dfrac{\pi}{6} + k2\pi, x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in ¢)$

3). $2\sin^3 x + \cos 2x = \sin x \ (1)$

$(1) \Leftrightarrow 2\sin^3 x - \sin x + \cos 2x = 0 \ \ \Leftrightarrow \sin x(2\sin^2 x - 1) + \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow -\cos 2x.\sin x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(-\sin x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \ \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \ \ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in ¢)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}, \ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in ¢)$

4). $\sin x.\sin 2x.\sin 3x = \dfrac{1}{4}\sin 4x \ (1)$

$(1) \Leftrightarrow \sin x.\sin 2x.\sin 3x = \dfrac{1}{2}\sin 2x.\cos 2x$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x).\sin 2x = \dfrac{1}{2}\sin 2x.\cos 2x$

$\Leftrightarrow \sin 2x(\cos 2x - \cos 4x - \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x.\cos 4x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x.\cos 4x = 0$

$\Leftrightarrow \sin 2x = 0$ hoặc $\cos 4x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}$ hoặc $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}, (k \in ¢)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \dfrac{k\pi}{2}, x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}, (k \in ¢)$

1). $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x \ \ (1)$ [ĐH B02]

2). Tìm $x \in [0;14]$: $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$ [ĐH D02]

3). $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$ [ĐH D04]

4). $\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{1-\cos x}=1$ [Dự bị 2 ĐH A04]

5). $\sin 4x\sin 7x=\cos 3x\cos 6x$ [Dự bị 1 ĐH D04]

6). $\cos^2 3x\cos 2x-\cos^2 x=0$ [ĐH A05]

7). $1+\sin+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0$ [ĐH B05]

8).Tìm $x\in(0;\pi)$ $4\sin^2\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos 2x=1+2\cos^2\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$ [Dự bị 1 ĐH A05]

LỜI GIẢI

1). $\sin^2 3x-\cos^2 4x=\sin^2 5x-\cos^2 6x$ (1)

$(1)\Leftrightarrow\frac{1-\cos 6x}{2}-\frac{1+\cos 8x}{2}=\frac{1-\cos 10x}{2}-\frac{1+\cos 12x}{2}\Leftrightarrow\cos 12x+\cos 10x=\cos 8x+\cos 6x$

$\Leftrightarrow 2\cos x(\cos 11x-\cos 7x)=0\Leftrightarrow -4\cos x.\sin 9x.\sin 2x=0$

$\Leftrightarrow\sin 9x=0$ hoặc $\sin 2x=0\Leftrightarrow x=\frac{k\pi}{9}$ hoặc $x=\frac{k\pi}{2},(k\in ¢)$

Nghiệm phương trình: $x=\frac{k\pi}{9}$, $x=\frac{k\pi}{2},(k\in ¢)$

2). Tìm $x\in[0;14]$: $\cos 3x-4\cos 2x+3\cos x-4=0$ (1)

Ta có : $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

$(1)\Leftrightarrow 4\cos^3 x-3\cos x-4(2\cos^2 x-1)+3\cos x-4=0$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x-8\cos^2 x=0$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 x(\cos x-2)=0\Leftrightarrow\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,(k\in ¢)$ (vì $\cos x=2$ vô nghiêm).

Ta có $0<x<14\Leftrightarrow 0<\frac{\pi}{2}+k\pi<14\Leftrightarrow-\frac{\pi}{2}<k\pi<14-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow-0,5<k<3,96$.

Từ đó suy ra $k=0,1,2,3$. Kết luận nghiệm cần tìm $x\in\left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{3};\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{2}\right\}$

3). $(2\cos x-1)(2\sin x+\cos x)=\sin 2x-\sin x$ (1)

$(1)\Leftrightarrow(2\cos x-1)(2\sin x+\cos x)=2\sin x\cos x-\sin x$

$\Leftrightarrow(2\cos x-1)(2\sin x+\cos x)=\sin x(2\cos x-1)$

$\Leftrightarrow(2\cos x-1)(\sin x+\cos x)=0\Leftrightarrow 2\cos x-1=0\vee\sin x+\cos x=0$

Với $2\cos x-1=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Với: $\sin x+\cos x=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{4}=k\pi \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Nghiệm phương trình: $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$, $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

4). $\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{1-\cos x}=1$

$\sqrt{1-\sin x}+\sqrt{1-\cos x}=1 \quad (1) \qquad \text{TXĐ}: \ D=\mathbb{R}$

Chú ý: $1-\sin x\geq 0$; $1-\cos x\geq 0$ (đúng)

$(1)\Leftrightarrow 2-(\sin x+\cos x)+2\sqrt{(1-\sin x)(1-\cos x)}=1$

$\Leftrightarrow 2-(\sin x+\cos x)+2\sqrt{1-(\sin x+\cos x)-\sin x\cos x}=1 \quad (2)$

Đặt : $t=\sin x+\cos x$; $|t|\leq\sqrt{2}$,khi đó : $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$

$(2)\Leftrightarrow 1-t+2\sqrt{\frac{t^2-2t+1}{2}}=0 \Leftrightarrow 1-t+\sqrt{2}\sqrt{(t-1)^2}=0 \Leftrightarrow 1-t+\sqrt{2}|t-1|=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}|t-1|=t-1 \Leftrightarrow t-1=0 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \sin x+\cos x=1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$

$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \Leftrightarrow x=k2\pi$ hoặc $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

5). $\sin 4x\sin 7x=\cos 3x\cos 6x \ (1)$

$(1)\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 3x-\cos 11x)=\frac{1}{2}(\cos 9x+\cos 3x)$

$\Leftrightarrow \cos 3x-\cos 11x=\cos 9x+\cos 3x \Leftrightarrow \cos 11x+\cos 9x=0$

$\Leftrightarrow 2\cos 10x\cos x=0 \Leftrightarrow \cos 10x=0$ hoặc $\cos x=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{20}+k10\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Nghiệm phương trình: $x=\frac{\pi}{20}+k10\pi$, $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

6). $\cos^2 3x\cos 2x-\cos^2 x=0 \ (1)$

$(1)\Leftrightarrow \frac{(1+\cos 6x)\cos 2x}{2}-\frac{1+\cos 2x}{2}=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 6x \cos 2x - 1 - \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 6x \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 8x + \cos 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 4x - 1 + \cos 4x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 4x + \cos 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = 1 \vee \cos 4x = -\frac{3}{2}$ (loại).

Với $\cos 4x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, \left(k \in ¢\right)$

Nghiệm phương trình: $x = \frac{k\pi}{2}, \left(k \in ¢\right)$

7). $1 + \sin + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow (\sin x + \cos x) + 2\cos x(\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\left(1 + 2\cos x\right) = 0$ $\Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \vee 1 + 2\cos x = 0$

Với $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \left(k \in ¢\right)$

Với $1 + 2\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, \left(k \in ¢\right)$

Nghiệm phương trình: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, \left(k \in ¢\right)$.

8). Tìm $x \in \left(0;\pi\right)$ $4\sin^2\frac{x}{2} - \sqrt{3}\cos 2x = 1 + 2\cos^2\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$ (1)

$\left(1\right) \Leftrightarrow 2(1 - \cos x) - \sqrt{3}\cos 2x = 1 + 1 + \cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 2 - 2\cos x - \sqrt{3}\cos 2x = 2 - \sin 2x \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x = -2\cos x$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x = -\cos x \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k_1 2\pi}{3}$

hoặc $x = -\frac{7\pi}{6} + k_2 2\pi, \left(k_1; k_2 \in ¢\right)$

Vì $\begin{cases} k_1 \in ¢ \\ k_1 \in (0;\pi) \end{cases} \Rightarrow k_1 \in \left\{0;1\right\} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{18}; x = \frac{17\pi}{18}$

Vì $\begin{cases} k_2 \in ¢ \\ k_2 \in (0;\pi) \end{cases} \Rightarrow k_2 = 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$

Kết luận nghiệm phương trình: $x = \frac{5\pi}{18}; x = \frac{17\pi}{18}$; $x = \frac{5\pi}{6}$.

Câu : Giải các phương trình sau:

1). $\sin 2x+\cos 2x+3\sin x-\cos x-2=0$ [Dự bị 2 ĐH D05]

2). $\cos 3x+\cos 2x-\cos x-1=0$ [ĐH D06]

3). $\cos 3x\cos^3 x-\sin 3x\sin^3 x=\dfrac{2+3\sqrt{2}}{8}$ [Dự bị 1 ĐH A06]

4). $\left(2\sin^2 x-1\right)\tan^2 2x+3\left(2\cos^2 x-1\right)=0$ [Dự bị 1 ĐH B06]

5). $\cos 2x+\left(1+2\cos x\right)\left(\sin x-\cos x\right)=0$ [Dự bị 2 ĐH B06]

6). $\cos^3 x+\sin^3 x+2\sin^2 x=1$ [Dự bị 1 ĐH D06]

7). $4\sin^3 x+4\sin^2 x+3\sin 2x+6\cos x=0$ [Dự bị 2 ĐH D06]

8). $\left(1+\sin^2 x\right)\cos x+\left(1+\cos^2 x\right)\sin x=1+\sin 2x$ [ĐH A07]

LỜI GIẢI

1). $\sin 2x+\cos 2x+3\sin x-\cos x-2=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x+1-2\sin^2 x+3\sin x-\cos x-2=0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x\cos x-\cos x\right)+\left(-2\sin^2 x+3\sin x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \cos x\left(2\sin x-1\right)-\left(\sin x-1\right)\left(2\sin x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left(2\sin x-1\right)\left(\cos x-\sin x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x-1=0$ hoặc $\cos x-\sin x+1=0$

Với $2\sin x-1=0 \Leftrightarrow \sin x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ hoặc $x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi,\left(k\in \mathbb{Z}\right)$

Với $\sin x-\cos x=1 \Leftrightarrow \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$ hoặc $x=\pi+k2\pi,\left(k\in \mathbb{Z}\right)$

Nghiệm phương trình: $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi,\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi, x=\pi+k2\pi,\left(k\in \mathbb{Z}\right)$

2). $\cos 3x+\cos 2x-\cos x-1=0$

$\Leftrightarrow \cos 3x-\cos x+\cos 2x-1=0 \Leftrightarrow 2\sin 2x\sin x+2\sin^2 x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\left(\sin 2x+\sin x\right)=0 \Leftrightarrow 2\sin x(2\sin x\cos x-\sin x)=0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x\left(2\cos x-1\right)=0 \Leftrightarrow \sin x=0 \vee 2\cos x-1=0$

Với $\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi,\left(k\in \mathbb{Z}\right)$

Với $2\cos x-1=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Nghiệm phương trình: $x=k\pi$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

3). $\cos 3x\cos^3 x-\sin 3x\sin^3 x=\frac{2+3\sqrt{2}}{8}$ (1)

LỜI GIẢI

Nhắc lại công thức nhân ba:

$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x \Leftrightarrow \cos^3 x=\frac{1}{4}\left(\cos 3x+3\cos x\right)$$

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x \Leftrightarrow \sin^3 x=\frac{1}{4}\left(3\sin x-\sin 3x\right)$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{4}\left[\cos 3x\left(\cos 3x+3\cos x\right)-\sin 3x\left(3\sin x-\sin 3x\right)\right]=\frac{2+3\sqrt{2}}{8}$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x\left(\cos 3x+3\cos x\right)-\sin 3x\left(3\sin x-\sin 3x\right)=\frac{2+3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x+3\cos 3x\cos x-3\sin 3x\sin x+\sin^2 3x=1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1+3\left(\cos 3x\cos x-\sin 3x\sin x\right)=1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 4x=\pm\frac{\pi}{4}+k2\pi \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2};\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Nghiệm phương trình: $x=\pm\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2};\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

4). $\left(2\sin^2 x-1\right)\tan^2 2x+3\left(2\cos^2 x-1\right)=0$ (1)

LỜI GIẢI

Điều kiện : $\cos 2x\neq 0$

$$(1)\Leftrightarrow -\cos 2x.\tan^2 2x+3\cos 2x=0 \Leftrightarrow \cos 2x\left(\tan^2 2x-3\right)=0 \Leftrightarrow \tan^2 2x=3$$

$$\Leftrightarrow \tan 2x=\pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Kết luận nghiệm của phương trình là: $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}$

5). $\cos 2x + (1 + 2\cos x)(\sin x - \cos x) = 0$

LỜI GIẢI

$\Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x) + (1 + 2\cos x)(\sin x - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x - 2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x - 1) = 0$

Với $\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in ¢)$

Với $\sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = \pi + k2\pi, (k \in ¢)$

Kết luận nghiệm của phương trình $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = \pi + k2\pi, (k \in ¢)$

6). $\cos^3 x + \sin^3 x + 2\sin^2 x = 1$ (1)

$(1) \Leftrightarrow \cos^3 x + \sin^3 x = 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x) = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\left[\sin x - \cos x - \sin x\cos x + 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\left[(1 + \sin x) - \cos x(1 + \sin x)\right] = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + \sin x)(1 - \cos x) = 0$

Với $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in ¢)$

Với $1 + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in ¢)$

Với $1 - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, (k \in ¢)$

Kết luận nghiệm của phương trình $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = k2\pi, (k \in ¢)$

7). $4\sin^3 x + 4\sin^2 x + 3\sin 2x + 6\cos x = 0$ (1)

$\Leftrightarrow 4\sin^2 x(\sin x + 1) + 6\cos x(\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow (\sin x + 1)(4\sin^2 x + 6\cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + 1)\left[4(1 - \cos^2 x) + 6\cos x\right] = 0 \Leftrightarrow (\sin x + 1)(2\cos^2 x - 3\cos x - 2) = 0$

Với $\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in ¢)$

Với $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\dfrac{1}{2} \vee \cos x = 2$ (loại) $\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, \left(k \in ¢\right)$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ \ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi, \left(k \in ¢\right)$

8). $\left(1 + \sin^2 x\right)\cos x + \left(1 + \cos^2 x\right)\sin x = 1 + \sin 2x$

$\Leftrightarrow \cos x + \sin^2 x\cos x + \sin x + \cos^2 x\sin x = (\sin x + \cos x)^2$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x) + \sin x\cos x(\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\left(1 + \sin x\cos x - \sin x - \cos x\right) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x)(1 - \cos x) = 0$

Với $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \left(k \in ¢\right)$

Với $1 - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, \left(k \in ¢\right)$

Với $1 - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, \left(k \in ¢\right)$

Kết luận nghiệm của phương trình $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ x = k2\pi, \left(k \in ¢\right)$

Câu : Giải các phương trình sau:

1). $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$ [ĐH B07]

2). $\sin\left(\dfrac{5x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\dfrac{3x}{2}$ [Dự bị 1 ĐH B07]

3). $2\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{12}\right)\cos x = 1$ [Dự bị 1 ĐH D07]

4). $2\sin x\left(1 + \cos 2x\right) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$ [ĐH D08]

5). $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ [Dự bị 2 ĐH A08]

6). $3\sin x + \cos 2x + \sin 2x = 4\sin x\cos^2\dfrac{x}{2}$ [Dự bị 2 ĐH B08]

7). $4\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) + \cos 4x + \sin 2x = 0$ [Dự bị 1 ĐH D08]

8). $\sin x + \cos x\sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\left(\cos 4x + \sin^3 x\right)$ [ĐH B09]

LỜI GIẢI

1). $2\sin^2 2x+\sin 7x-1=\sin x$

$\Leftrightarrow \sin 7x-\sin x+2\sin^2 2x-1=0 \Leftrightarrow 2\cos 4x.\sin 3x-\cos 4x=0$

$\Leftrightarrow \cos 4x\left(2\sin 3x-1\right)=0 \Leftrightarrow \cos 4x=0 \vee 2\sin 3x-1=0$

Với $\cos 4x=0 \Leftrightarrow 4x=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4},\left(k\in \text{¢}\right)$

Với $2\sin 3x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}$ hoặc $x=\frac{5\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3},\left(k\in \text{¢}\right)$

Nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}$, $x=\frac{5\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}$,$\left(k\in \text{¢}\right)$

2). $\sin\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\frac{3x}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]=\sqrt{2}\cos\frac{3x}{2}$

$\Leftrightarrow 2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\cos\frac{3x}{2}$

$\Leftrightarrow -2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{3x}{2}=\sqrt{2}\cos\frac{3x}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{3x}{2}\left[\sqrt{2}+2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow \cos\frac{3x}{2}=0 \vee \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Với $\cos\frac{3x}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{3x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+\frac{k2\pi}{3},\left(k\in \text{¢}\right)$

Với $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ hoặc $x=-\pi+k2\pi,\left(k\in \text{¢}\right)$

Nghiệm của phương trình $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k2\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$, $x=-\pi+k2\pi$,$\left(k\in \text{¢}\right)$

3). $2\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\cos x=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left[\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{12}\right)-\sin\dfrac{\pi}{12}\right]=1 \Leftrightarrow \sin\left(2x-\dfrac{\pi}{12}\right)-\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \sin\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{12}=2\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{12}$

$\Leftrightarrow \sin\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)=\cos\dfrac{\pi}{12}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{5\pi}{12}\right)=\sin\dfrac{5\pi}{12}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ hoặc $x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\left(k\in ¢\right)$

Nghiệm của phương trình $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$, $x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\left(k\in ¢\right)$.

4). $2\sin x\left(1+\cos 2x\right)+\sin 2x=1+2\cos x$

LỜI GIẢI

$\Leftrightarrow 4\sin x\cos^2 x+\sin 2x=1+2\cos x \Leftrightarrow \quad \sin 2x(2\cos x+1)-(1+2\cos x)=0$

$\Leftrightarrow (2\cos x+1)(\sin 2x-1)=0 \Leftrightarrow 2\cos x+1=0 \vee \sin 2x-1=0$

Với $2\cos x+1=0 \Leftrightarrow \cos x=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi,\left(k\in ¢\right)$

Với $\sin 2x-1=0 \Leftrightarrow \sin 2x=1 \Leftrightarrow 2x=k2\pi \Leftrightarrow x=k\pi,(k\in ¢)$

Nghiệm của phương trình $x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi$, $x=k\pi,(k\in ¢)$.

5). $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin 2x-\cos 2x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin x-\cos x+1\right)$

$\Leftrightarrow \sin 2x-\sin x-(1+\cos 2x)+\cos x=0$

$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x-1)-2\cos^2 x+\cos x=0$

$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x-1)-\cos x(2\cos x-1)=0$

$\Leftrightarrow (2\cos x-1)(\sin x-\cos x)=0 \Leftrightarrow 2\cos x-1=0 \vee \sin x-\cos x=0$

Với $2\cos x-1=0 \Leftrightarrow \cos x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k2\pi,\left(k\in ¢\right)$

Với $\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in ¢)$

Kết luận nghiệm của phương trình $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in ¢)$

6). $3\sin x + \cos 2x + \sin 2x = 4\sin x \cos^2 \frac{x}{2}$

$\Leftrightarrow 3\sin x + \cos 2x + \sin 2x = 4\sin x\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 3\sin x + \cos 2x + \sin 2x = 2\sin x + \sin 2x$

$\Leftrightarrow \cos 2x + \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \vee \sin x = -\frac{1}{2}$

Với $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in ¢)$

Với $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, (k \in ¢)$

Nghiệm của phương trình $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$, $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, (k \in ¢)$

7). $4\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) + \cos 4x + \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow 4\left(1 - \frac{\sin^2 2x}{2}\right) + 1 - 2\sin^2 2x + \sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 2x - \sin 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -1 \vee \sin 2x = \frac{5}{4}$ (loại).

Với $\sin 2x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in ¢)$

Nghiệm của phương trình $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in ¢)$

8). $\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\left(\cos 4x + \sin^3 x\right)$

$\Leftrightarrow \sin x\left(1 - 2\sin^2 x\right) + \cos x \sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x$

$\Leftrightarrow \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x$

$\Leftrightarrow \sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x = \cos 4x$

$\Leftrightarrow \cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos 4x \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{42}+\frac{k2\pi}{7},(k\in ¢)$

Nghiệm của phương trình $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi,\ x=\frac{\pi}{42}+\frac{k2\pi}{7},(k\in ¢)$

Câu : Giải các phương trình sau:

1). $(1+2\sin x)^2\cos x=1+\sin x+\cos x$ [CĐ 09]

2). $(\sin 2x+\cos 2x)\cos x+2\cos 2x-\sin x=0$ [ĐH B10]

3). $\sin 2x-\cos 2x+3\sin x-\cos x-1=0$ [ĐH D10]

4). $\sin 2x\cos x+\sin x\cos x=\cos 2x+\sin x+\cos x$ [ĐH B11]

5). $\sqrt{3}\cos 2x+2\cos x(\sin x-1)=0$ [DB D11]

6). $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\cos x-1$ [ĐH A 2012]

7). $2\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x\right)\cos x=\cos x-\sqrt{3}\sin x+1$ [ĐH B 2012]

8). $\sin 3x+\cos 3x-\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos 2x$ [ĐH D 2012]

LỜI GIẢI

1). $(1+2\sin x)^2\cos x=1+\sin x+\cos x$

$\Leftrightarrow (1+4\sin x+4\sin^2 x)\cos x=1+\sin x+\cos x$

$\Leftrightarrow \cos x+2\sin 2x+4\sin^2 x\cos x-1-\sin x-\cos x=0$

$\Leftrightarrow (2\sin 2x-1)+\sin x(2\sin 2x-1)=0$

$\Leftrightarrow (2\sin 2x-1)(\sin x+1)=0 \Leftrightarrow 2\sin 2x-1=0 \vee \sin x+1=0$

Với $2\sin 2x-1=0 \Leftrightarrow \sin 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{12}+k\pi$ hoặc $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi,(k\in ¢)$

Với $\sin x+1=0 \Leftrightarrow \sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k\pi,(k\in ¢)$

Nghiệm của phương trình $x=\frac{\pi}{12}+k\pi,\quad x=\frac{5\pi}{12}+k\pi,\ x=-\frac{\pi}{2}+k\pi,(k\in ¢)$

2). $(\sin 2x+\cos 2x)\cos x+2\cos 2x-\sin x=0$ (1)

$(1)\Leftrightarrow \sin 2x\cos x+\cos 2x\cos x+2\cos 2x-\sin x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos^2 x-\sin x+\cos 2x\cos x+2\cos 2x=0$ (công thức nhân đôi của sin2x)

$\Leftrightarrow \sin x\left(2\cos^2 x-1\right)+\cos 2x\cos x+2\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x\sin x+\cos 2x\cos x+2\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x\left(\sin x+\cos x+2\right)=0 \Leftrightarrow \cos 2x=0 \vee \sin x+\cos x+2=0$

Với $\cos 2x=0 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in \mathbb{Z}$

Với $\sin x+\cos x+2=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-2 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$ (vô nghiệm).

Nghiệm của phương trình $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}, k\in \mathbb{Z}$

3). $\sin 2x-\cos 2x+3\sin x-\cos x-1=0$ (1)

$(1) \Leftrightarrow 2\sin x\cos x-\cos x-\left(1-2\sin^2 x\right)+3\sin x-1=0$

$\Leftrightarrow \cos x\left(2\sin x-1\right)+\left(2\sin^2 x+3\sin x-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \cos x\left(2\sin x-1\right)+\left(2\sin x-1\right)\left(\sin x+2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x-1\right)\left(\cos x+\sin x+2\right)=0 \Leftrightarrow 2\sin x-1=0 \vee \cos x+\sin x+2=0$

Với $2\sin x-1=0 \Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi, \left(k\in \mathbb{Z}\right)$

Với $\sin x+\cos x+2=0 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$ (vô nghiệm).

Nghiệm của phương trình $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi,\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi, \left(k\in \mathbb{Z}\right)$

4). $\sin 2x\cos x+\sin x\cos x=\cos 2x+\sin x+\cos x$ (1)

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x^2 x-\sin x-\cos 2x+\sin x\cos x-\cos x=0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(2\cos^2 x-1\right)-\cos 2x+\sin x\cos x-\cos x=0$

$\Leftrightarrow \sin x\cos 2x-\cos 2x+\sin x\cos x-\cos x=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x\left(\sin x-1\right)+\cos\left(\sin x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sin x-1\right)\left(\cos 2x+\cos x\right)=0$

$\Leftrightarrow \sin x-1=0 \vee \cos 2x+\cos x=0$

Với $\sin x-1=0 \Leftrightarrow \sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in ¢$

Với $\cos 2x+\cos x=0 \Leftrightarrow \cos 2x=-\cos x=\cos(\pi-x) \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+\frac{k2\pi}{3}$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k2\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi, k\in ¢$

5). $\sqrt{3}\cos 2x+2\cos x\left(\sin x-1\right)=0$ (1)

$\left(1\right) \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x+2\cos x\sin x-2\cos x=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=2\cos x$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x=\cos x \Leftrightarrow \cos 2x\cos\frac{\pi}{6}+\sin 2x\sin\frac{\pi}{6}=\cos x$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos x \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3},\left(k\in ¢\right)$

Nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$, $x=\frac{\pi}{18}+\frac{k2\pi}{3}$,$\left(k\in ¢\right)$

6). $\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\cos x-1$ (1)

$\left(1\right) \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x-2\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \cos x=0 \vee \sqrt{3}\sin x+\cos x-1=0$

Với $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

Với $\sqrt{3}\sin x+\cos x=1 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=k2\pi \vee x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi,\left(k\in ¢\right)$

Kết luận nghiệm phương trình: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x=k2\pi$, $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi$,$\left(k\in ¢\right)$

7). $2\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x\right)\cos x=\cos x-\sqrt{3}\sin x+1$ (1)

$\left(1\right) \Leftrightarrow 2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x=\cos x-\sqrt{3}\sin x+1$

$\Leftrightarrow \cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=\cos x-\sqrt{3}\sin x$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{k2\pi}{3},\left(k\in ¢\right)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi, x=\frac{k2\pi}{3},\left(k\in ¢\right)$

8). $\sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos 2x$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow (\sin 3x - \sin x) + (\cos 3x + \cos x) = \sqrt{2}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 2x \sin x + 2\cos 2x \cos x = \sqrt{2}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(2\sin x + 2\cos x) = \sqrt{2}\cos 2x \Leftrightarrow \cos 2x\left(2\sin x + 2\cos x - \sqrt{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \ \vee \ 2\sin x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0$$

Với $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in ¢$

Với $2\sin x + 2\cos x = \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi, (k \in ¢)$.

Nghiệm phương trình: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi, x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi, (k \in ¢)$.

1). $\sin 5x + 2\cos^2 x = 1$	[ĐH B 2013]
2). $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$	[ĐH D 2013]
3). $\sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x$	[ĐH A 2014]
4). $\sqrt{2}(\sin x - 2\cos x) = 2 - \sin 2x$	[ĐH B 2014]

LỜI GIẢI

1). $\sin 5x + 2\cos^2 x = 1$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \sin 5x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos(5x + \frac{\pi}{2}) = \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \quad x = -\frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7}, (k \in ¢)$$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}, x = -\frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7}, (k \in ¢)$

2). $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow (\sin 3x - \sin x) + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x \sin x + \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(2\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \vee 2\sin x + 1 = 0$$

Với $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, (k \in ¢)$

Với $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, (k \in ¢)$

Nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$, $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$, $(k \in ¢)$.

Câu 1 : giải các phương trình sau:

1). $2\cos^2 2x - 2\cos 2x + 4\sin 6x + \cos 4x = 1 + 4\sqrt{3}\sin 3x\cos x$

2). $\sqrt{3}\sin 2x + \sqrt{3}\sin x + \cos 2x - \cos x = 2$

3). $\cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)$

4). $\cos 2x.\cos x + \cos x = \sin 2x.\sin x$

5). $2\cos 5x.\cos 3x + \sin x = \cos 8x$

6). $2\sin x\cos^2\frac{x}{2} + \sin x\cos 2x = \cos 2x + \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

7). $2\sqrt{2}\left(\sin^3\frac{x}{2} - \cos^3\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2} = (2 + \sin x)\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

8). $1 + \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \cos 3x$

9). $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 2\sin 2x\cos x + 3\sin x = 1 + \sin 3x$

LỜI GIẢI

1). $2\cos^2 2x - 2\cos 2x + 4\sin 6x + \cos 4x = 1 + 4\sqrt{3}\sin 3x\cos x \quad (*)$

$(*) \Leftrightarrow 1 + \cos 4x - 2\cos 2x + 4\sin 6x + \cos 4x = 1 + 4\sqrt{3}\sin 3x\cos x$ (hạ bậc $\cos^2 2x$)

$\Leftrightarrow 2(\cos 4x - \cos 2x) + 8\sin 3x\cos 3x = 4\sqrt{3}\sin 3x\cos x$ (biến đổi tổng thành tích)

$\Leftrightarrow -4\sin 3x.\sin x + 8\sin 3x.\cos 3x - 4\sqrt{3}\sin 3x.\cos x = 0$

$\Leftrightarrow -4\sin 3x\left(\sin x - 2\cos 3x + \sqrt{3}\cos x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin 3x = 0 \quad \vee \quad \sin x + \sqrt{3}\cos x - 2\cos 3x = 0$

Với: $\sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3} \quad (k \in Z)$

Với: $\sin x+\sqrt{3}\cos x-2\cos 3x=0 \Leftrightarrow \sin x+\sqrt{3}\cos x=2\cos 3x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{2}{2}\cos 3x \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6}.\cos x+\sin x.\sin\frac{\pi}{6}=\cos 3x$

$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos 3x \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},(k\in Z)$

Kết luận nghiệm của phương trình $x=\frac{k\pi}{3}$, $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$, $x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$ $(k\in Z)$

2). $\sqrt{3}\sin 2x+\sqrt{3}\sin x+\cos 2x-\cos x=2(*)$

$(*)\Leftrightarrow\left(\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x\right)+\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x\right)=2$

$\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)=1$

$\Leftrightarrow\left(\cos 2x.\cos\frac{\pi}{3}+\sin 2x\sin\frac{\pi}{3}\right)+\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)=1$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$

Để ý $2x-\frac{\pi}{3}=2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, áp dụng nhân đôi được: $\Leftrightarrow 1-2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$

$\Leftrightarrow 2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0 \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left[2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1\right]=0$

$\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0 \quad\vee\quad 2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1=0$

Với $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}=k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi \quad (k\in Z)$

Với $2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1=0\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\vee x=\pi+k2\pi,(k\in Z)$

Kết luận nghiệm phương trình $\frac{\pi}{6}+k\pi$, $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi$, $x=\pi+k2\pi$ $(k\in Z)$

3). $\cos 2x+5=2(2-\cos x)(\sin x-\cos x)(*)$

Phân phối vế phải được:

$(*)\Leftrightarrow \cos 2x+5=4\sin x-4\cos x-2\sin x\cos x+2\cos^2 x$

Hạ bậc $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$, sau đó rút gọn được:

$\Leftrightarrow 4(\sin x - \cos x) - 2\sin x\cos x - 4 = 0$, đây là phương trình cơ bản áp dụng

Đặt $t = \sin x - \cos x$. Điều kiện: $|t| \le \sqrt{2}$.

$\Leftrightarrow t^2 + 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \quad \vee \quad t = -5$ (loại)

Với $t = 1 \Leftrightarrow \sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = \pi + k2\pi, (k \in Z)$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = \pi + k2\pi \ (k \in Z)$

4). $\cos 2x.\cos x + \cos x = \sin 2x.\sin x(*)$

LỜI GIẢI

Chuyển các phần tử vế phải sang vế trái được:

$(*) \Leftrightarrow (\cos 2x.\cos x - \sin 2x.\sin x) + \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \cos 3x + \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \cos 3x = -\cos x$

$\Leftrightarrow \cos 3x = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \vee x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in Z)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{2} + k\pi(k \in Z)$

5). $2\cos 5x.\cos 3x + \sin x = \cos 8x(*)$

LỜI GIẢI

Ý tưởng: Biến đổi tích thành tổng $2\cos 5x.\cos 3x = \cos 2x + \cos 8x$

$(*) \Leftrightarrow \cos 2x + \cos 8x + \sin x = \cos 8x \quad \Leftrightarrow \cos 2x + \sin x = 0$

$\Leftrightarrow -2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \sin x = 1 \quad \vee \quad \sin x = -\frac{1}{2}$

Với $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in ¢)$.

Với $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, (k \in Z)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, (k \in Z)$

6). $2\sin x\cos^2\frac{x}{2}+\sin x\cos 2x=\cos 2x+\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)(*)$

LỜI GIẢI

$(*)\Leftrightarrow 2\sin.\cos^2\frac{x}{2}+\sin.\cos 2x=\cos 2x+\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

Có $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$ *và* $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x+\sin x$, *nên:*

$\Leftrightarrow \sin(1+\cos x)+\sin x\cos 2x=\cos 2x+\cos x+\sin x$.

$\Leftrightarrow \sin x+\sin x\cos x+\sin x\cos 2x=\cos 2x+\cos x+\sin x$.

$\Leftrightarrow (\sin x\cos x-\cos x)+(\sin x\cos 2x-\cos 2x)=0$

$\Leftrightarrow \cos x(\sin x-1)+\cos 2x(\sin x-1)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x-1)(\cos x+\cos 2x)=0 \;\Leftrightarrow \sin x-1=0 \;\vee\; \cos x+\cos 2x=0$

Với $\sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,(k\in Z)$

Với $\cos x+\cos 2x=0\Leftrightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0 \;\Leftrightarrow \cos x=-1 \vee \cos x=\frac{1}{2}$

- $\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi,(k\in Z)$.
- $\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,(k\in Z)$.

Kết luận nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi; x=\pi+k2\pi; x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,(k\in Z)$.

7). $2\sqrt{2}\left(\sin^3\frac{x}{2}-\cos^3\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}=(2+\sin x)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)(*)$

LỜI GIẢI

Ta có $\sin^3\frac{x}{2}-\cos^3\frac{x}{2}=\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\left(\sin^2\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)$

$$=\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\sin x\right)=-\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\left(1+\frac{1}{2}\sin x\right)$$

$(*)\Leftrightarrow -4\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\left(1+\frac{1}{2}\sin x\right)\cos\frac{x}{2}=(2+\sin x)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\left[2\left(2+\sin x\right)\cos\frac{x}{2}+\left(2+\sin x\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\left(2+\sin x\right)\left(2\cos\frac{x}{2}+1\right)=0$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0 \vee 2\cos\frac{x}{2}+1=0 \vee 2+\sin x=0$

Với $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\left(k\in Z\right)$.

Với $2\cos\frac{x}{2}+1=0 \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{4\pi}{3}+k4\pi \quad \left(k\in Z\right)$.

Với $2+\sin x=0 \Leftrightarrow \sin x=-2$ (vô nghiệm).

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi; x=\pm\frac{4\pi}{3}+k2\pi,\left(k\in Z\right)$.

8). $1+\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos x+\cos 3x\left(*\right)$

LỜI GIẢI

$\left(*\right)\Leftrightarrow 1+\sin 2x+\cos 2x=\cos x+\cos 3x$

$\Leftrightarrow \left(1+\cos 2x\right)+\sin 2x=2\cos 2x.\cos x \quad \Leftrightarrow 2\cos^2 x+2\sin x\cos x-2\cos 2x\cos x=0$

$\Leftrightarrow \cos x\left(\cos x+\sin x-\cos 2x\right)=0 \qquad \Leftrightarrow \cos x\left[\left(\cos x+\sin x\right)-\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow \cos x\left[\left(\cos x+\sin x\right)-\left(\cos x+\sin x\right)\left(\cos x-\sin x\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow \cos x\left(\cos x+\sin x\right)\left(1-\cos x+\sin x\right)=0$.

$\Leftrightarrow \cos x=0 \vee \cos x+\sin x=0 \vee 1-\cos x+\sin x=0$

Với $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in Z\right)$.

Với $\cos x+\sin x=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}+k\pi\left(k\in Z\right)$.

Với $\cos x-\sin x=1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow x=k2\pi \vee x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,\left(k\in Z\right)$.

Nghiệm phương trình: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$, $x=k2\pi$, $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \ \left(k\in Z\right)$

9). $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+2\sin 2x\cos x+3\sin x=1+\sin 3x(*)$

LỜI GIẢI

Áp dụng công thức cộng và biến đổi tích thành tổng

$(*)\Leftrightarrow 2\left(\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\cos 2x\right)+\sin 3x+\sin x+3\sin x=1+\sin 3x$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x+4\sin x=1$ $\quad\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x+4\sin x=1-\cos 2x$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x+4\sin x=2\sin^2 x$ $\quad\Leftrightarrow \sin x\left(\sqrt{3}\cos x+2-\sin x\right)=0$

$\Leftrightarrow \sin x=0 \quad\vee\quad \sqrt{3}\cos x-\sin x+2=0$

Với $\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi(k\in Z)$.

Với $\sqrt{3}\cos x-\sin x=-2\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-1\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi,(k\in Z)$.

Kết luận nghiệm của phương trình: $x=k\pi;\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi(k\in Z)$.

Câu 2: giải các phương trình sau:

1). $\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin x-1$

2). $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{4+\sin x}{2}$

3). $\sin 4x+2=\cos 3x+4\sin x+\cos x$

4). $2\sin^2 x-\sin 2x+\sin x+\cos x-1=0$

5). $\sin 3x+2\cos 2x=3+4\sin x+\cos x(1+\sin x)$

6). $\sin 4x+\cos 4x+\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{3}\left(\sin 3x+\cos 3x-1\right)+2\cos x$

7). $\sin 3x+(1-\cos x)\cos 2x=(\sin x+2\cos x).\sin 2x$

8). $\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+1=\sqrt{3}\sin x+3\cos x$

LỜI GIẢI

2). $\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin x-1$

$\Leftrightarrow \ \sin 2x - \cos 2x = 2\sin x - 1 \qquad \Leftrightarrow \ 2\sin x.\cos x + 1 - \cos 2x - 2\sin x = 0$

$\Leftrightarrow \ 2\sin x.\cos x + 2\sin^2 x - 2\sin x = 0 \ \Leftrightarrow \ 2\sin x(\cos x + \sin x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \ \sin x = 0 \vee \cos x + \sin x - 1 = 0$

$*$ Với $\sin x = 0 \ \Leftrightarrow \ x = k\pi \ \ (k \in ¢)$

$*$ Với $\cos x + \sin x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \ \ x = k2\pi, (k \in ¢)$

Kết luận nghiệm của phương trình : $x = k\pi$, $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \ \ (k \in ¢)$ (vì nghiệm $k2\pi$ là con của nghiệm $k\pi$)

5). $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = \dfrac{4 + \sin x}{2}$

Có bình phương hạ bậc

$\Leftrightarrow \ \dfrac{1 + \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} + 2x\right)}{2} + \dfrac{1 + \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} - 2x\right)}{2} = \dfrac{4 + \sin x}{2}$

$\Leftrightarrow \ 2 + \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} + 2x\right) + \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} - 2x\right) = 4 + \sin x \ \ \Leftrightarrow \ 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right).\cos 2x = 2 + \sin x$

$\Leftrightarrow \ -\cos 2x = 2 + \sin x \qquad \Leftrightarrow \ -(1 - 2\sin^2 x) = 2 + \sin x$

$\Leftrightarrow \ 2\sin^2 x - \sin x - 3 = 0 \ \ \Leftrightarrow \sin x = -1 \vee \sin x = \dfrac{3}{2}$ (loại).

$*$ Với $\sin x = -1 \ \Leftrightarrow \ x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \ \ (k \in ¢)$

Kết luận nghiệm của phương trình : $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \ \ (k \in ¢)$

6). $\sin 4x + 2 = \cos 3x + 4\sin x + \cos x$

Sử dụng công thức nhân đôi và kỹ thuật gom nhân tử chung

$\Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos 2x = (\cos 3x + \cos x) + (4\sin x - 2)$

$\Leftrightarrow 4\sin x.\cos x.\cos 2x = 2\cos 2x.\cos x + 2(2\sin x - 1)$

$\Leftrightarrow 4\sin x.\cos x.\cos 2x - 2\cos 2x.\cos x - 2(2\sin x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x.\cos x(2\sin x - 1) - 2(2\sin x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(2\cos 2x.\cos x - 2) = 0 \Leftrightarrow 2\sin x - 1 = 0 \vee 2\cos 2x.\cos x - 2 = 0$

$*$ Với $2\sin x-1=0 \Leftrightarrow \sin x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \vee x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi,(k\in \mathbb{Z})$

$*$ Với $2\cos 2x.\cos x-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 3x+\cos x-2=0$

$\Leftrightarrow \quad 4\cos^3 x-3\cos x+\cos x-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad 4\cos^3 x-2\cos x-2=0$

$\Leftrightarrow \quad \cos x=1 \quad \Leftrightarrow \quad x=k2\pi \quad (k\in \mathbb{Z})$

Vậy phương trình có các nghiệm : $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$, $x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$, $x=k2\pi \quad (k\in \mathbb{Z})$

9). $2\sin^2 x-\sin 2x+\sin x+\cos x-1=0$

$\Leftrightarrow \quad (2\sin^2 x+\sin x-1)-2\sin x.\cos x+\cos x=0$

$\Leftrightarrow \quad (2\sin x-1)(\sin x+1)-\cos x(2\sin x-1)=0$

$\Leftrightarrow \quad (2\sin x-1)(\sin x+1-\cos x)=0 \Leftrightarrow 2\sin x-1=0 \vee \sin x-\cos x=-1$

Với $\sin x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \vee x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$

Với $\sin x-\cos x=-1 \Leftrightarrow \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x=k2\pi \vee x=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi,\left(k\in \mathbb{Z}\right)$

Nghiệm phương trình: $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$, $x=k2\pi,\ x=\dfrac{3\pi}{2}+k2\pi,\left(k\in \mathbb{Z}\right)$

10). $\sin 3x+2\cos 2x=3+4\sin x+\cos x(1+\sin x)$

(tách $4\sin x=\sin x+3\sin x$, sau đó chuyển $\sin x$ ra vế trước)

$\Leftrightarrow \quad \sin 3x-\sin x+2\cos 2x=3(1+\sin x)+\cos x(1+\sin x)$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos 2x.\sin x+2\cos 2x=(1+\sin x)(3+\cos x)$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos 2x(\sin x+1)-(1+\sin x)(3+\cos x)=0$

$\Leftrightarrow \quad (\sin x+1)(2\cos 2x-\cos x-3)=0 \Leftrightarrow \sin x+1=0 \vee 2\cos 2x-\cos x-3=0$

$*$ Với $\sin x+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x=-1 \quad \Leftrightarrow \quad x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \quad (k\in \mathbb{Z})$

$*$ Với $2\cos 2x-\cos x-3=0 \Leftrightarrow 4\cos^2 x-\cos x-5=0 \Leftrightarrow \cos x=-1 \vee \cos x=\dfrac{5}{4}$ (loại).

$\Leftrightarrow \quad x=\pi+k2\pi \quad (k\in \mathbb{Z})$

Kết luận nghiệm của phương trình $x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$, $x=\pi+k2\pi \quad (k\in \mathbb{Z})$

12). $\sin 4x+\cos 4x+\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{3}\left(\sin 3x+\cos 3x-1\right)+2\cos x$

$\Leftrightarrow\ (\sin 4x+\sin 2x)+(\cos 4x+\cos 2x)=\sqrt{3}(\sin 3x+\cos 3x-1)+2\cos x$

$\Leftrightarrow\ 2\sin 3x.\cos x+2\cos 3x.\cos x-2\cos x=\sqrt{3}(\sin 3x+\cos 3x-1)$

$\Leftrightarrow\ 2\cos x(\sin 3x+\cos 3x-1)=\sqrt{3}(\sin 3x+\cos 3x-1)$

$\Leftrightarrow\ (\sin 3x+\cos 3x-1)(2\cos x-\sqrt{3})=0\Leftrightarrow \sin 3x+\cos 3x-1=0\vee 2\cos x-\sqrt{3}=0$

$*$ Với $\sin 3x+\cos 3x=1\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{k2\pi}{3}$ hoặc $x=\frac{k2\pi}{3},(k\in \text{¢})$

$*$ Với $2\cos x-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\ x=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi,\left(k\in \text{¢}\right)$

Nghiệm phương trình: $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k2\pi}{3},x=\frac{k2\pi}{3},\ x=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi,\left(k\in \text{¢}\right)$

13). $\sin 3x+(1-\cos x)\cos 2x=(\sin x+2\cos x).\sin 2x$

Ý tưởng: Phân phối chuyển vế áp dụng công thức cộng, và biến đổi tích thành tổng

$\Leftrightarrow\ \sin 3x+\cos 2x-\cos 2x.\cos x=\sin 2x.\sin x+2\sin 2x.\cos x$

$\Leftrightarrow\ \sin 3x+\cos 2x=(\cos 2x.\cos x+\sin 2x.\sin x)+\sin 3x+\sin x$

$\Leftrightarrow\ \cos 2x=\cos x+\sin x$

$\Leftrightarrow\ \cos^2 x-\sin^2 x=\cos x+\sin x$

$\Leftrightarrow\ (\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=\cos x+\sin x$

$\Leftrightarrow\ (\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x-1)=0\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}\cos x+\sin x=0\\ \cos x-\sin x-1=0\end{array}\right.$

$*$ Với $\cos x+\sin x=0\ \Leftrightarrow\ \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$\Leftrightarrow\ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0\ \Leftrightarrow\ x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi\ \Leftrightarrow\ x=\frac{3\pi}{4}+k\pi\ \ (k\in \text{¢})$

$*$ Với $\cos x-\sin x-1=0\ \Leftrightarrow\ \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$

$\Leftrightarrow\ \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.\ \ (k\in \text{¢})$

Vậy nghiệm của phương trình : $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi\ ,\ x=k2\pi\ ,\ x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\ \ (k\in ¢)$

15). $\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x+1=\sqrt{3}\sin x+3\cos x$

$\Leftrightarrow\ 2\sqrt{3}\sin x.\cos x-\sqrt{3}\sin x-(2\cos^2 x-1)-3\cos x+1=0$

$\Leftrightarrow\ \sqrt{3}\sin x(2\cos x-1)-(2\cos^2 x+3\cos x-2)=0$

$\Leftrightarrow\ \sqrt{3}\sin x(2\cos x-1)-(\cos x+2)(2\cos x-1)=0$

$\Leftrightarrow\ (2\cos x-1)(\sqrt{3}\sin x-\cos x-2)=0$

$\Leftrightarrow\ 2\cos x-1=0\ \vee\ \sqrt{3}\sin x-\cos x-2=0$

$*$ Với $2\cos x-1=0\ \Leftrightarrow\ \cos x=\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ \cos x=\cos\frac{\pi}{3}\ \Leftrightarrow\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\ \ (k\in ¢)$

$*$ Với $\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\ \Leftrightarrow\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=1$

$\Leftrightarrow\ \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1\ \Leftrightarrow\ x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi,\left(k\in ¢\right)$

Nghiệm của phương trình: $x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,\ x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi,\left(k\in ¢\right)$

Câu 3: Giải các phương trình sau:

1). $1+\sin x+\left(1+\sin x\right).\sin 2x=\cos 2x\quad\left(*\right)$

2). $2\sin^3 x-\cos 2x+\cos x=0\quad\left(*\right)$

3). $3\cot^2 x+2\sqrt{2}\sin^2 x=\left(2+3\sqrt{2}\right)\cos x\quad\left(*\right)$

4). $\sin^3 x-\cos^3 x+3\sin^2 x+4\sin x-\cos x+2=0\quad\left(*\right)$

5). $\sin 4x+2\cos 2x+4\left(\sin x+\cos x\right)=1+\cos 4x\quad\left(*\right)$

6). $\cos 3x-2\sin 2x-\cos x-\sin x-1=0\quad\left(*\right)$

7). $\sin 2x-\cos x2x+4\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-4\cos x+1=0\quad\left(*\right)$

8). $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\quad\left(*\right)$

LỜI GIẢI

1). $1+\sin x+(1+\sin x).\sin 2x=\cos 2x \quad (*)$

$(*)\Leftrightarrow 1-\cos 2x+\sin x+(1+\sin x)2\sin x\cos x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+\sin x+(1+\sin x).2\sin x\cos x=0$

$\Leftrightarrow \sin x=0(1)$ hoặc $2\sin x+1+(1+\sin x).2\cos x=0 \quad (2)$

$(1)\Leftrightarrow x=k\pi \quad (k\in Z)$

$(2)\Leftrightarrow 1+2\sin x\cos x+2(\sin x+\cos x)=0\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)^2+2(\sin x+\cos x)=0$

$\Leftrightarrow \sin x+\cos x=0\vee \sin x+\cos x+2=0\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\vee \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$ (vô nghiệm)

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,(k\in Z)$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x=k\pi$ hoặc $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \quad (k\in Z)$.

2). $2\sin^3 x-\cos 2x+\cos x=0 \quad (*)$

$(*)\Leftrightarrow 2\sin^3 x+2\sin^2 x-1+\cos x=0\Leftrightarrow 2\sin^2 x(1+\sin x)-(1-\cos x)=0$

$\Leftrightarrow 2(1-\cos^2 x)(1+\sin x)-(1-\cos x)=0\Leftrightarrow (1-\cos x)\left[2(1+\cos x)(1+\sin x)-1\right]=0$

$\Leftrightarrow (1-\cos x)\left[1+2(\sin x+\cos x)+\sin 2x\right]=0$

$\Leftrightarrow 1-\cos x=0$ (1) hoặc $1+2(\sin x+\cos x)+\sin 2x=0$ (2).

Giải $(1)\Leftrightarrow \cos x=1\Leftrightarrow x=k2\pi, k\in$ ¢ .

Giải (2) đặt $t=\sin x+\cos x\Rightarrow \sin 2x=t^2-1$. Điều kiện $|t|\le\sqrt{2}$.

$(2)\Leftrightarrow t^2+2t=0\Leftrightarrow t=0\vee t=-2$ (loại).

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi, k\in$ ¢

Kết luận: Các tập nghiệm cần tìm $x=k2\pi,\ x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi, k\in$ ¢

3). $3\cot^2 x+2\sqrt{2}\sin^2 x=\left(2+3\sqrt{2}\right)\cos x \quad (*)$

Điều kiện $\sin x \neq 0$

Chia cả hai vế phương trình $(*)$ cho $\sin^2 x \neq 0$, ta được $\frac{3\cos^2 x}{\sin^4 x} + 2\sqrt{2} = \left(2+3\sqrt{2}\right)\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ $(**)$

Đặt $t = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$ $(**) \Leftrightarrow 3t^2 - \left(2+3\sqrt{2}\right)t + 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2} \\ t = \frac{2}{3} \end{array}\right.$

Với $t = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin^2 x} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos x = \sqrt{2}\sin^2 x \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos^2 x + \cos x - \sqrt{2} = 0$ $\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ hoặc $\cos x = -\sqrt{2}$ (loại)

Từ đó được nghiệm $x = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi.$

Với $t = \frac{2}{3}$ biến đổi về $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$ được $\cos x = \frac{1}{2}$ hoặc $\cos x = -2$ (loại) , từ đó được nghiệm $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi.$

Vậy phương trình có các họ nghiệm như trên.

4). $\sin^3 x - \cos^3 x + 3\sin^2 x + 4\sin x - \cos x + 2 = 0$ $(*)$

$$(*) \Leftrightarrow \left(\sin^3 x + 3\sin^2 x + 3\sin x + 1\right) - \cos^3 x + \sin x - \cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x + 1\right)^3 - \cos^3 x + \left(\sin x + 1 - \cos x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin x - \cos x + 1\right)\left[\left(\sin x + 1\right)^2 + \cos x\left(\sin x + 1\right) + \cos^2 x + 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x - \cos x + 1 = 0 & (1) \\ \left(\sin x + 1\right)^2 + \cos x\left(\sin x + 1\right) + \cos^2 x + 1 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

$$(1) \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z).$$

(2): Vì $\left(\sin x + 1\right)^2 + \cos x\left(\sin x + 1\right) + \cos^2 x + 1$

$= \left[\left(\sin x + 1\right) + \frac{1}{2}\cos x\right]^2 + \frac{3}{4}\cos^2 x + 1 > 0, \forall x \in R$ nên phương trình (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 2 họ nghiệm: $x = k2\pi; x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in Z).$

5). $\sin 4x + 2\cos 2x + 4(\sin x + \cos x) = 1 + \cos 4x \quad (*)$

$(*) \Leftrightarrow 2\cos 2x(1 + \sin 2x) + 4(\sin x + \cos x) = 2\cos^2 2x$

$\Leftrightarrow \cos 2x(1 + \sin 2x - \cos 2x) + 2(\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin 2x + 2\sin^2 x) + 2(\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\cos 2x(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin x.\cos 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x + \cos x = 0 & (1) \\ \sin x.\cos 2x + 1 = 0 & (2) \end{array}\right.$

$(1) \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in Z).$

$(2) \Leftrightarrow -2\sin^3 x + \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow (1 - \sin x)(2\sin^2 x + 2\sin x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ 2\sin^2 x + 2\sin x + 1 = 0 (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$

Vậy phương trình đã cho có 2 họ nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$

6). $\cos 3x - 2\sin 2x - \cos x - \sin x - 1 = 0 \quad (*)$

$(*) \Leftrightarrow (\cos 3x - \cos x) - 2\sin 2x - \sin x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow -2\sin 2x.\sin x - 2\sin 2x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin 2x(\sin x + 1) + (\sin x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + 1)(2\sin 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1$ hoặc $\sin 2x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$ hoặc $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, (k \in Z).$

Nghiệm phương trình $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{12} + k\pi, x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, (k \in Z).$

7). $\sin 2x - \cos x2x + 4\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 4\cos x + 1 = 0 \quad (*)$

$(*) \Leftrightarrow \sin 2x + 1 - \cos 2x + 4(\sin x + \cos x) - 4\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos x + 2\sin^2 x + 4\sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(\cos x + \sin x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x + \sin x + 2 = 0 (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = k\pi$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = k\pi \quad (k \in Z)$.

$$8).\ 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2} \quad (*)$$

$\Leftrightarrow 2\sin x + 2\sqrt{3}\cos x - \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow -2\sqrt{3}\cos x(\sin x - 1) - 2\sin^2 x + 2\sin x = 0$

$\Leftrightarrow -2\sqrt{3}\cos x(\sin x - 1) - 2\sin x(\sin x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x - 1)(\sqrt{3}\cos x + \sin x) = 0 \Leftrightarrow \sin x - 1 = 0$ hoặc $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in$ ¢ .

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z$.