

## PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CÓ CÁCH GIẢI ĐẶC BIỆT

Giải các phương trình sau:

1).  $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x = -\frac{1}{2}$

2).  $4 \sin 3x \cos 2x = 1 + 6 \sin x - 8 \sin^3 x$

3).  $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16}$

4).  $\sin^3 \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin x \quad (1)$

5).  $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8} \cot \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \cot \left( \frac{\pi}{6} - x \right)$

6).  $\tan \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \tan \left( x - \frac{\pi}{6} \right) \sin 3x = \sin x + \sin 2x$

7).  $\sin \left( 3x - \frac{\pi}{4} \right) = \sin 2x \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right)$

8).  $8 \cos^3 \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = \cos 3x$

9).  $\sqrt{2} \sin^3 \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \sin x$

10).  $\cos \frac{4}{3} x = \cos^2 x$

### LỜI GIẢI

1).  $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x = -\frac{1}{2} \quad (*)$

Ta thấy  $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = m\pi, m \in \mathbb{Z}$  không phải là nghiệm của  $(*)$

Nhân hai vế của phương trình  $(*)$  cho  $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq m\pi, m \in \mathbb{Z}$ , được:

$$\sin x (\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x) = -\frac{1}{2} \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos x + \sin x \cos 2x + \sin x \cos 3x + \sin x \cos 4x + \sin x \cos 5x = -\frac{1}{2} \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x - \sin x + \sin 3x - \sin 2x + \sin 4x - \sin 3x + \sin 5x - \sin 4x + \sin 6x = -\sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin 5x + \sin 6x = 0 \Leftrightarrow \sin 6x = \sin(-5x) \Leftrightarrow x = \frac{k2\pi}{11} \vee x = \pi + h2\pi, k, h \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} \frac{k2\pi}{11} \neq m\pi \\ \pi + h2\pi \neq n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq \frac{11m}{2} \\ h \neq \frac{n-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 11m' \\ h \neq n' \end{cases} \text{ với } m' = 2m, n' = 2n+1 \text{ và } m, n, m', n' \in \mathcal{Z}$$

Kết luận nghiệm phương trình  $x = \frac{k2\pi}{11}, x = \pi + h2\pi; k \neq 11m', h \neq n', k, h \in \mathcal{Z}$

$$2). 4 \sin 3x \cos 2x = 1 + 6 \sin x - 8 \sin^3 x \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin 3x \cdot \cos 2x = 1 + 2(3 \sin x - 4 \sin^3 x)$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x + 2 \sin 5x = 1 + 2 \sin 3x$$

Ta thấy  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \mathcal{Z}$  không phải là nghiệm của (\*)

Nhân hai vế của phương trình (\*) cho  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \mathcal{Z}$ , được:

$$\Leftrightarrow (2 \sin x + 2 \sin 5x) \cos x = (1 + 2 \sin 3x) \cos x$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = \cos x + \sin 2x + \sin 4x$$

$$\sin 6x = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \text{ hoặc } x = \frac{\pi}{10} + \frac{h2\pi}{5}; k, h \in \mathcal{Z}$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \\ \frac{\pi}{10} + \frac{h2\pi}{5} \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq \frac{3+7m}{2} \\ h \neq \frac{2+5n}{2} \end{cases} \text{ với } m \text{ là số nguyên lẻ, và } n \text{ là số nguyên chẵn.}$$

$$3). \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16} \quad (*)$$

Ta thấy  $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = m\pi, m \in \mathcal{Z}$  không phải là nghiệm của (\*)

Nhân hai vế của phương trình (\*) cho  $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq m\pi, m \in \mathcal{Z}$ , được:

$$16 \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow 8 \sin 2x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin 4x \cos 4x \cos 8x = \sin x \Leftrightarrow 2 \sin 8x \cos 8x = \sin x \Leftrightarrow \sin 16x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k2\pi}{15} \vee x = \frac{\pi}{17} + \frac{h2\pi}{17}; k, h \in \mathcal{Z}$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} \frac{k2\pi}{15} \neq m\pi \\ \frac{\pi}{17} + \frac{h2\pi}{17} \neq n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq \frac{15m}{2} \\ h \neq \frac{17n-1}{2} \end{cases} \text{ với } m \text{ là số nguyên chẵn và } n \text{ là số}$$

nguyên lẻ.

$$4). \sin^3\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin x \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = t - \frac{\pi}{4}$$

$$(1) \Leftrightarrow \sin^3 t = \sqrt{2} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin^3 t = \sin t - \cos t$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 t - \sin t - \cos t = 0 \Leftrightarrow \sin t(\sin^2 t - 1) + \cos t = 0$$

$$\Leftrightarrow -\cos^2 t \cdot \sin t + \cos t = 0 \Leftrightarrow \cos t(1 - \sin t \cdot \cos t) = 0 \Leftrightarrow \cos t = 0 \vee 1 - \sin t \cdot \cos t = 0$$

$$\text{Với: } \cos t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Với } 1 - \sin t \cdot \cos t = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 2t = 1 \Leftrightarrow \sin 2t = 2 \text{ (vô nghiệm).}$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình: } x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$5). \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8} \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cot\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \quad (*)$$

$$\text{ĐK: } \begin{cases} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \neq 0 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}$$

$$\text{Có: } \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cot\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cot\left[\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

$$(*) \Leftrightarrow \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \frac{3 + \cos 4x}{4} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \cos 4x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} : \text{ (thỏa đk).}$$

**Kết luận:** Tập nghiệm cần tìm của phương trình là  $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$6). \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \sin 3x = \sin x + \sin 2x \quad (*)$$

Điều kiện:  $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0, \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$ , với  $k \in \mathbb{Z}$ . Ta có:

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right] \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1.$$

$$(*) \Leftrightarrow -\sin 3x = \sin x + \sin 2x \Leftrightarrow (\sin 3x + \sin x) + \sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x(2 \cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \vee \cos x = -0,5$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \text{ hoặc } x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \text{ với } k \in \mathbb{Z} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

**Kết luận:** Các tập nghiệm cần tìm của phương trình là  $x = \frac{k\pi}{2}, x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ .

$$7). \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin 2x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad (*)$$

$$\text{Nhận thấy: } \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = -\sin\left[\pi - \left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)\right] = -\sin 3 \cdot \left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Đặt  $t = x + \frac{\pi}{4}$ , suy ra:  $x = t - \frac{\pi}{4}$  nên phương trình đã cho:

$$(*) \Leftrightarrow -\sin 3t = \sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin t \Leftrightarrow 4 \sin^3 t - 3 \sin t + \cos 2t \sin t = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin^3 t - 3 \sin t + (1 - 2 \sin^2 t) \sin t = 0 \Leftrightarrow \sin t = 0 \text{ hoặc } \sin^2 t = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin t = 0 \text{ hoặc } \cos t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi \text{ hoặc } t = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

Suy ra:  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$  hoặc  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Kết luận:** Tập nghiệm cần tìm của phương trình là  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ , với  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$8). 8 \cos^3\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x \quad (*)$$

Nhận thấy:  $\cos 3x = -\cos(\pi + 3x) = -\cos\left[3 \cdot \left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right]$ . Đặt  $t = x + \frac{\pi}{3}$ .

$$(*) \Leftrightarrow 8 \cos^3 t = -\cos 3t = -4 \cos^3 t + 3 \cos t \Leftrightarrow 12 \cos^3 t - 3 \cos t = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos t = 0 \text{ hoặc } 4 \cos^2 t - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos t = 0 \text{ hoặc } \cos 2t = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ hoặc } t = \frac{\pi}{3} + k\pi. \text{ Suy ra: } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ hoặc } x = k\pi \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

**Kết luận:** Các tập nghiệm cần tìm của phương trình là  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $x = k\pi$ .

9).  $\sqrt{2} \sin^3\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin x$  (\*). Đặt  $t = x + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = t - \frac{\pi}{4}$ .

$$(*) \Leftrightarrow \sin^3 t = \sqrt{2} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin^3 t = \sin t - \cos t = (\sin t - \cos t)(\sin^2 t + \cos^2 t)$$

$$\Leftrightarrow \cos t(-\sin^2 t + \sin t \cos t - \cos^2 t) = 0 \Leftrightarrow \cos t(\sin 2t - 2) \Leftrightarrow \cos t = 0 \vee \sin 2t = 2$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi. \text{ Suy ra: } x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

**Kết luận:** Tập nghiệm cần tìm của phương trình là  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$  với  $k \in \mathbb{Z}$ .

#### PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC ĐẶC BIỆT

Giải các phương trình sau:

1).  $3 \tan^2 x + 4 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \tan x - 4 \sin x + 2 = 0$

2).  $\sin 4x - \cos 4x = 1 + 4\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

3).  $\sin 3x(\cos x - 2 \sin 3x) + \cos 3x(1 + \sin x - 2 \cos 3x) = 0$

4).  $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x - \sqrt{3} \sin x - \cos x + 4 = 0$ .

5).  $\cos 2x = \cos^2 x \sqrt{1 + \tan x}$ .

6).  $\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} = 2(1 + \sin^2 2x)$

7).  $\sin^{1996} x + \cos^{1996} x = 1$

8).  $\sin^4 x + \cos^{15} x = 1$

9).  $2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \cos^2 x \right) = 1 + \cos(\pi \sin 2x)$

### LỜI GIẢI

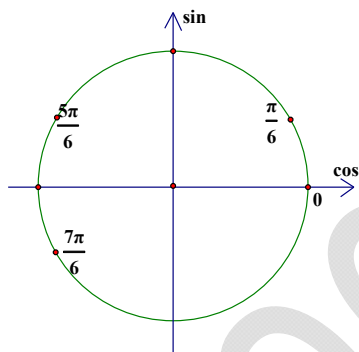
1).  $3 \tan^2 x + 4 \sin^2 x - 2\sqrt{3} \tan x - 4 \sin x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (3 \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x + 1) + (4 \sin^2 x - 4 \sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3} \tan x - 1)^2 + (2 \sin x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3} \tan x - 1 = 0 \\ 2 \sin x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

Biểu diễn nghiệm trên vòng tròn lượng giác:



Nghiệm của  $\sqrt{3} \tan x - 1 = 0$  được biểu diễn hai đầu mút là  $\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$ .

Nghiệm của  $2 \sin x - 1 = 0$  được biểu diễn hai đầu mút là  $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ .

Kết luận nghiệm của phương trình:  $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$

2).  $\sin 4x - \cos 4x = 1 + 4\sqrt{2} \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \Leftrightarrow \sin 4x - (1 + \cos 4x) = 4(\sin x - \cos x)$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 2x \cos 2x - 2 \cos^2 2x = 4(\sin x - \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)(\sin 2x - \cos 2x) = 2(\sin x - \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)[(\cos x + \sin x)(\sin 2x - \cos 2x) + 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \text{ hoặc } (\cos x + \sin x)(\sin 2x - \cos 2x) + 2 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Giải (1)} \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Giải (2)} \Leftrightarrow -2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x + \sin 3x = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{m2\pi}{3} \end{cases}; m, k \in \mathbb{Z}. \text{ Hệ (1) có nghiệm khi và chỉ khi}$$

$k2\pi = \frac{\pi}{6} + \frac{m2\pi}{3} \Leftrightarrow 12k - 4m = 1$  phương trình này vô nghiệm vì vế trái luôn là một số nguyên chẵn, còn vế phải là số nguyên lẻ. Kết luận (2) vô nghiệm.

$$\text{Nghiệm phương trình } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$3). \sin 3x(\cos x - 2 \sin 3x) + \cos 3x(1 + \sin x - 2 \cos 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin 3x \cos x + \cos 3x \sin x) - 2(\sin^2 3x + \cos^2 3x) + \cos 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x - 2 + \cos 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x + \cos 3x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 4x = 1 \\ \cos 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 3x = m2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{m2\pi}{3} \end{cases}, (k, m \in \mathbb{Z})$$

Nếu phương trình có nghiệm thì tồn tại các giá trị  $k, m$  sao cho :

$$\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} = \frac{m2\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{k}{2} - \frac{2m}{3} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{3k + 4m}{6} = \frac{1}{8} = 12k + 16m = 3$$

$\Leftrightarrow 2(6k + 8m) = 3$  (không thỏa). Phương trình vô nghiệm vì: Vế trái là một số chẵn, còn vế phải là một số lẻ.

Kết luận phương trình vô nghiệm.

$$4). \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x - \sqrt{3} \sin x - \cos x + 4 = 0. \text{ Chia 2 vế cho 2 ta được :}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -1 \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{2} + l2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + l2\pi \end{cases} . \text{ Phương trình có nghiệm khi :}$$

$\frac{\pi}{12} + k\pi = -\frac{\pi}{3} + l2\pi \Leftrightarrow 1 + 12k = -4 + 24l \Leftrightarrow 12k - 24l = -5$ . Vô nghiệm với mọi  $k, l \in \mathbb{Z}$  vì VT là một số chẵn, còn VP là một số lẻ.

5).  $\cos 2x = \cos^2 x \sqrt{1 + \tan x}$ . Điều kiện:  $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \geq -1 \end{cases} (*)$ .

Đặt  $t = \tan x$ , điều kiện  $t \geq -1$

Khi đó phương trình trở thành :

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} \sqrt{1+t} \Leftrightarrow 1-t^2 = \sqrt{1+t}, \text{ điều kiện } 1-t^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 1.$$

$$\Leftrightarrow (1-t^2)^2 = 1+t \Leftrightarrow (1+t) \left[ (1+t)(1-t)^2 - 1 \right] = 0.$$

$$\Leftrightarrow (1+t)(1-t)^2 - 1 = 0 \Rightarrow t^3 - t^2 - t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

So với điều kiện nhận  $t = 0 \Leftrightarrow \tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

6).  $\cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} = 2(1 + \sin^2 2x)$  Ta có nhận xét sau :

Bất đẳng thức Bunhiacopxki:  $\left| \cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} \right| \leq \sqrt{(1^2 + 1^2) \left( \cos^2 3x + (\sqrt{2 - \cos^2 3x})^2 \right)}$

$$\Leftrightarrow \left| \cos 3x + \sqrt{2 - \cos^2 3x} \right| \leq 2$$

Suy ra vế trái đạt giá trị lớn nhất bằng 2 khi  $\cos 3x = \sqrt{2 - \cos^2 3x}$

$$VP = 2(1 + \sin^2 2x) \geq 2$$

Vậy chỉ xảy ra khi:  $\begin{cases} \cos 3x = \sqrt{2 - \cos^2 3x} \\ \sin^2 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 3x = 1 \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 6x = -1 \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{l\pi}{2} \end{cases}.$

Nếu phương trình có nghiệm thì tồn tại  $k, l$  thuộc  $\mathbb{Z}$  sao cho :

$$-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} = \frac{l\pi}{2} \Leftrightarrow -1 + 2k = 3l \Leftrightarrow k = \frac{3l+1}{2} = 1 + \frac{l+1}{2}.$$

Để  $k$  là nguyên thì ta chọn:  $l+1 = 2n \Rightarrow l = 2n-1$ .



Thay vào (2) nghiệm :  $x = \frac{(2n+1)\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$

7).  $\sin^{1996} x + \cos^{1996} x = 1$

$$\sin^{1996} x + \cos^{1996} x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow \sin^{1996} x - \sin^2 x = \cos^2 x - \cos^{1996} x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x (\sin^{1994} x - 1) = \cos^2 x (1 - \cos^{1994} x) \quad (2)$$

Ta thấy  $\begin{cases} \sin^2 x \geq 0 \\ \sin^{1994} x - 1 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \sin^2 x (\sin^{1994} x - 1) \leq 0, \forall x$

Ngoài ra có  $\begin{cases} \cos^2 x \geq 0 \\ 1 - \cos^{1994} x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \cos^2 x (1 - \cos^{1994} x) \geq 0, \forall x.$

Do đó (2)  $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x (\sin^{1994} x - 1) = 0 \\ \cos^2 x (1 - \cos^{1994} x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \pm 1 \\ \cos x = 0 \\ \cos x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + m\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + n\pi \\ x = n\pi \end{cases}, (m, n \in \mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình là:  $x = \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$ .

8).  $\sin^4 x + \cos^{15} x = 1$

$$\sin^4 x + \cos^{15} x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow \sin^4 x - \sin^2 x = \cos^2 x - \cos^{15} x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x (\sin^2 x - 1) = \cos^2 x (1 - \cos^{13} x) \quad (1)$$

Vì  $\begin{cases} \sin^2 x \geq 0 \\ \sin^2 x - 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \sin^2 x (\sin^2 x - 1) \leq 0, \forall x,$

và  $\begin{cases} \cos^2 x \geq 0 \\ 1 - \cos^{13} x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \cos^2 x (1 - \cos^{13} x) \geq 0, \forall x$

Từ đó (1)  $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x (\sin^2 x - 1) = 0 \\ \cos^2 x (1 - \cos^{13} x) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 0 \\ \sin^2 x = 1 \\ \cos^2 x = 0 \\ \cos^{13} x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = \pm 1 \\ \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + m\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + n\pi \\ x = n2\pi \end{cases}, (m, n \in \mathbb{Z}).$$

Vậy nghiệm của phương trình là:  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .

$$9). 2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \cos^2 x \right) = 1 + \cos(\pi \sin 2x)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \cos^2 x \right) - 1 = \cos(\pi \sin 2x)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\pi \cos^2 x) = \cos(\pi \sin 2x) \Leftrightarrow \begin{cases} \pi \cos^2 x = \pi \sin 2x + k2\pi \\ \pi \cos^2 x = -\pi \sin 2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = \sin 2x + k2 \\ \cos^2 x = -\sin 2x + k2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 + \cos 2x}{2} = \sin 2x + k2 \\ \frac{1 + \cos 2x}{2} = -\sin 2x + k2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x - 2 \sin 2x = 4k - 1 \quad (1) \\ \cos 2x + 2 \sin 2x = 4k - 1 \quad (2) \end{cases}$$

Điều kiện để phương trình (1) hoặc phương trình (2) có nghiệm là:

$$1^2 + 2^2 \geq (4k - 1)^2 \Leftrightarrow 16k^2 - 8k - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{5}}{4} \leq k \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \text{ vì } k \in \mathbb{Z} \text{ nên chọn } k = 0$$

Thay  $k = 0$  vào (1) được  $\cos 2x - 2 \sin 2x = -1 \Leftrightarrow 1 + \cos 2x - 2 \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 4 \sin x \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x (\cos x - 2 \sin x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = 2 \sin x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \tan x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + k\pi \end{cases}$$

Thay  $k = 0$  vào (2) được  $\cos 2x + 2 \sin 2x = -1 \Leftrightarrow 1 + \cos 2x + 2 \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow 2 \cos x (\cos x + 2 \sin x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = -2 \sin x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \tan x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + k\pi \end{cases}$$