

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

$\circ \sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$	$\circ \cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$
$\circ \tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$	$\circ \cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
CÁC TRƯỜNG HỢP ĐẶC BIỆT:	
$\circ \cos u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$	$\circ \sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$
$\circ \cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$	$\circ \sin u = 1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$
$\circ \cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$	$\circ \sin u = -1 \Leftrightarrow u = \frac{-\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Bài 1: Giải các phương trình sau:

- | | |
|--|--|
| a). $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ | b). $2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} = 0.$ |
| c). $3 \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) - 4 = 0$ | d). $\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ |
| e). $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ | f). $\cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$ |
| g). $2 \cos\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) + 5 = 0$ | h). $2 \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$ |
| i). $2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0$ | k). $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos x = 0$ |
| l). $\cos\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) - \sin 2x = 0$ | |

LỜI GIẢI

a). $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$
 $\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{24} + k\pi \\ x = \frac{13\pi}{24} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = \frac{5\pi}{24} + k\pi, x = \frac{13\pi}{24} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

b). $2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \frac{\pi}{4} + \pi + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{24} + k\pi \\ x = \frac{19\pi}{24} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = -\frac{\pi}{24} + k2\pi, x = \frac{19\pi}{24} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

c). $3 \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) - 4 = 0 \Leftrightarrow \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4}{3}$

Vì $-1 \leq \sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

d). $\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{2} = x + \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{2} = \pi - \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, x = \frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

e). $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

f). $\cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow 5x + \frac{\pi}{3} = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = \frac{2\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

g). $2 \cos\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) + 5 = 0$

$\Leftrightarrow \cos\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{5}{2}$. Vì $-1 \leq \cos\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) \leq 1 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

h). $2 \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{4} = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{5\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = \frac{11\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3}, x = -\frac{5\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

i). $2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{5\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

k). $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos x \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos(x + \pi)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{3} = x + \pi + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{3} = -(x + \pi) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

$$1). \cos\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \cos\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) = \sin 2x \Leftrightarrow \cos\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ 4x + \frac{\pi}{5} = -\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{3} \\ x = -\frac{7\pi}{20} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{3}, x = -\frac{7\pi}{20} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 2: Giải các phương trình sau:

$$a) \sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{9\pi}{4}\right)$$

$$b) \sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{5}\right) = 0$$

$$c) \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x = 0$$

$$d) \sin^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$e) \sin^2\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin^2\left(\frac{7\pi}{5} - x\right)$$

$$f) \sin^2\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$g) \sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5} - 3x\right) = \sqrt{3}$$

$$h) \sin\left(\frac{4\pi}{9} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{18} - x\right) = \sqrt{3}$$

LỜI GIẢI

$$a). \sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{9\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x - 2\pi - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] \Leftrightarrow \sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} - x + k2\pi \\ 3x + \frac{2\pi}{3} = \pi - \left(\frac{3\pi}{4} - x\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{5\pi}{24} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết luận: $x = \frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{2}, x = -\frac{5\pi}{24} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

$$b). \sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{7\pi}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \pi - \frac{2\pi}{5}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(x - \frac{2\pi}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \frac{2\pi}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{2\pi}{3} = x - \frac{2\pi}{5} + k2\pi \\ 3x + \frac{2\pi}{3} = \pi - \left(x - \frac{2\pi}{5}\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{8\pi}{15} + k\pi \\ x = \frac{11\pi}{60} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = -\frac{8\pi}{15} + k\pi, x = \frac{11\pi}{60} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$

$$\text{c). } \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = x - \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = \pi - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

$$\text{d). } \sin^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1 - \cos\left[2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right]}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}.$

$$\text{e). } \sin^2\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin^2\left(\frac{7\pi}{5} - x\right) \Leftrightarrow \frac{1 - \cos\left(6x + \frac{4\pi}{3}\right)}{2} = \frac{1 - \cos\left(\frac{14\pi}{5} - 2x\right)}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos\left(6x + \frac{4\pi}{3}\right) = 1 - \cos\left(\frac{14\pi}{5} - 2x\right) \Leftrightarrow \cos\left(6x + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{14\pi}{5} - 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(6x + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{4\pi}{5} - 2x\right) \Leftrightarrow \cos\left(6x + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{5} - 2x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{5} - 2x + k2\pi \\ 6x + \frac{4\pi}{3} = -\frac{4\pi}{5} + 2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{15} + \frac{k\pi}{4} \\ x = -\frac{8\pi}{15} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = -\frac{\pi}{15} + \frac{k\pi}{4}, x = -\frac{8\pi}{15} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$

$$\text{f) } \sin^2\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos\left(10x + \frac{2\pi}{3}\right)}{2} - \frac{1 + \cos\left(6x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} = 0 \Leftrightarrow -\cos\left(10x + \frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(6x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(10x + \frac{2\pi}{3}\right) = -\cos\left(6x + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \cos\left(10x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(6x + \frac{\pi}{2} + \pi\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x + \frac{2\pi}{3} = 6x + \frac{3\pi}{2} + k2\pi \\ 10x + \frac{2\pi}{3} = -6x - \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{13\pi}{96} + \frac{k\pi}{8} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, x = -\frac{13\pi}{96} + \frac{k\pi}{8} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

$$g). \sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{5} - 3x\right) = \sqrt{3} (*)$$

Các bạn để ý: $\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) + \left(\frac{4\pi}{5} - 3x\right) = \pi$. Từ đó suy ra: $\sin\left(\frac{4\pi}{5} - 3x\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right)$

$$(*) \Leftrightarrow 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x + \frac{\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{45} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{7\pi}{45} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = \frac{2\pi}{45} + \frac{k2\pi}{3}, x = \frac{7\pi}{45} + \frac{k2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

$$h). \sin\left(\frac{4\pi}{9} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{18} - x\right) = \sqrt{3} (*)$$

Các bạn để ý: $\left(\frac{4\pi}{9} + x\right) + \left(\frac{\pi}{18} - x\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{18} - x\right) = \sin\left(\frac{4\pi}{9} + x\right)$

$$(*) \Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{4\pi}{9} + x\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{4\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{4\pi}{9}\right) = \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{4\pi}{9} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x + \frac{4\pi}{9} = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{9} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{9} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = -\frac{\pi}{9} + k2\pi, x = \frac{2\pi}{9} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

$$\begin{array}{lll} a) \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 & b) \cos^2\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos^2 x & c) \cos^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4} \\ d) \cos^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) & e) \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6} + 3x\right) = 2 & \end{array}$$

LỜI GIẢI

$$a). \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) \Leftrightarrow \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + \frac{\pi}{3} = x + \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 4x + \frac{\pi}{3} = -x - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{7\pi}{60} + \frac{k2\pi}{5} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = -\frac{\pi}{36} + \frac{k2\pi}{3}, x = -\frac{7\pi}{60} + \frac{k2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

b). $\cos^2\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos^2 x$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \cos\left(6x + \frac{2\pi}{3}\right)}{2} = \frac{1 + \cos 2x}{2} \Leftrightarrow 1 + \cos\left(6x + \frac{2\pi}{3}\right) = 1 + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(6x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + \frac{2\pi}{3} = 2x + k2\pi \\ 6x + \frac{2\pi}{3} = -2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

c). $\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos\left(4x - \frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 + \cos\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin 4x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 4x = \sin \frac{\pi}{6} \quad (\text{vì } \sin \alpha = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}))$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 4x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

d). $\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{1 - \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)}{2} \Leftrightarrow 1 + \cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3} + \pi\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + \frac{\pi}{2} = 2x + \frac{5\pi}{3} + k2\pi \\ 4x + \frac{\pi}{2} = -2x - \frac{5\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \\ x = -\frac{13\pi}{36} + \frac{k\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi, x = -\frac{13\pi}{36} + \frac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

e). $\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6} + 3x\right) = 2(*)$

Ta có: $\left(\frac{5\pi}{6} + 3x\right) - \left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(\frac{5\pi}{6} + 3x\right) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$

$$(*) \Leftrightarrow 2 \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \Leftrightarrow \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Bài 4: Giải các phương trình sau:

a). $3 \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ b). $-3 \cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$ c). $\tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$ d).

$\cot\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$ e). $\tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan 2x = 0$

f). $\tan\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = 0$ g). $\tan\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \cot x$

LỜI GIẢI

a). $3 \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\Leftrightarrow \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \tan \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

b). $-3 \cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cot\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

c). $\tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$

$$\Leftrightarrow \tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

d). $\cot\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cot\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \cot\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \cot \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{36} + \frac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{36} + \frac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

e). $\tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan 2x = 0 \Leftrightarrow \tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\tan 2x \Leftrightarrow \tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \tan(-2x)$

$$\Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{4} = -2x + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = -\frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

$$f). \tan\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) \Leftrightarrow 4x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} - 2x + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{36} + \frac{k\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = -\frac{\pi}{36} + \frac{k\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

$$g). \tan\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \cot x$$

$$\Leftrightarrow \tan\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} - x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{40} + \frac{k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \frac{7\pi}{40} + \frac{k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Bài 5: Giải các phương trình sau:

$$a). \sin(x - 60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$b). \cos(2x + 50^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$c). \tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$d). \cot\left(\frac{x}{2} + 20^\circ\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

LỜI GIẢI

$$a). \sin(x - 60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x - 60^\circ) = \sin 30^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x - 60^\circ = 30^\circ + k360^\circ \\ x - 60^\circ = 180^\circ - 30^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 90^\circ + k360^\circ \\ x = 210^\circ + k360^\circ \end{cases}$$

Kết luận nghiệm của phương trình $x = 90^\circ + k360^\circ, x = 210^\circ + k360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$b). \cos(2x + 50^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x + 50^\circ) = \cos 60^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 50^\circ = 60^\circ + k360^\circ \\ 2x + 50^\circ = -60^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5^\circ + k180^\circ \\ x = -55^\circ + k180^\circ \end{cases}$$

Kết luận nghiệm của phương trình $x = 5^\circ + k180^\circ, x = -55^\circ + k180^\circ, (k \in \mathbb{Z})$

$$c). \tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \tan(3x - 30^\circ) = \tan(-30^\circ) \Leftrightarrow 3x - 30^\circ = -30^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = k60^\circ$$

Kết luận nghiệm của phương trình $x = k60^\circ, (k \in \mathbb{Z}).$

$$d). \cot\left(\frac{x}{2} + 20^\circ\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \cot\left(\frac{x}{2} + 20^\circ\right) = \cot(-60^\circ) \Leftrightarrow \frac{x}{2} + 20^\circ = -60^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = -160^\circ + k360^\circ$$

Kết luận nghiệm của phương trình $x = -160^\circ + k360^\circ, (k \in \mathbb{Z}).$

Bài 6: Giải các phương trình sau:

$$a). (1 + 2 \cos x)(3 - \cos x) = 0$$

$$b). \left(\cot \frac{x}{3} - 1\right) \left(\cot \frac{x}{2} + 1\right) = 0$$

c). $\tan(x - 30^\circ)\cos(2x - 150^\circ) = 0$	d). $(3\tan x + \sqrt{3})(2\sin x - 1) = 0$
e). $\cos 2x \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$	f). $\tan(2x + 60^\circ)\cos(x + 75^\circ) = 0$
h). $(\cot x + 1)\sin 3x = 0$	k). $\tan x \tan 2x = -1$

LỜI GIẢI

$$a). (1 + 2\cos x)(3 - \cos x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2\cos x = 0 \\ 3 - \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos x = 3 \end{cases}$$

Với $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Với $\cos x = 3$ phương trình vô nghiệm.

Kết luận nghiệm của phương trình $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

$$b). \left(\cot \frac{x}{3} - 1\right)\left(\cot \frac{x}{2} + 1\right) = 0 \quad (1)$$

Điều kiện: $\begin{cases} \sin \frac{x}{3} \neq 0 \\ \sin \frac{x}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} \neq k\pi \\ \frac{x}{2} \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k3\pi \\ x \neq k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \cot \frac{x}{3} - 1 = 0 \\ \cot \frac{x}{2} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cot \frac{x}{3} = 1 \\ \cot \frac{x}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k3\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện các nghiệm này thỏa.

Vậy phương trình có nghiệm: $x = \frac{3\pi}{4} + k3\pi, x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

$$c). \tan(x - 30^\circ)\cos(2x - 150^\circ) = 0 \quad (1)$$

Điều kiện: $\cos(x - 30^\circ) \neq 0 \Leftrightarrow x - 30^\circ \neq 90^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x \neq 120^\circ + k180^\circ, (k \in \mathbb{Z})$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \tan(x - 30^\circ) = 0 \\ \cos(2x - 150^\circ) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 30^\circ = k180^\circ \\ 2x - 150^\circ = 90^\circ + k360^\circ \\ 2x - 150^\circ = -90^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + k180^\circ \\ x = 120^\circ + k180^\circ \\ x = 30^\circ + k180^\circ \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện nghiệm $x = 120^\circ + k180^\circ$ loại.

Vậy phương trình có nghiệm: $x = 30^\circ + k180^\circ, (k \in \mathbb{Z})$

$$d). (3\tan x + \sqrt{3})(2\sin x - 1) = 0 \quad (1). \text{ Điều kiện } \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3\tan x + \sqrt{3} = 0 \\ 2\sin x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện các nghiệm này thỏa. Vì tập các giá trị $\left\{x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ là tập con của tập các giá trị $\left\{x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Vậy phương trình có các nghiệm: $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

e). $\cos 2x \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ (1)

Điều kiện $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

Giải các phương trình sau:

a). $\sin(\pi \cos x) = 1$ b). $2 \cos\left[\frac{\pi}{6}\left(\sin x - 13 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \sqrt{3}$

LỜI GIẢI

a). $\sin(\pi \cos x) = 1 \Leftrightarrow \pi \cos x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} + 2k$ (1)

điều kiện để phương trình có nghiệm $-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1}{2} + 2k \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq k \leq \frac{1}{4}$, vì $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0$.

Vậy (1) $\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + m2\pi, (m \in \mathbb{Z})$.

b). $2 \cos\left[\frac{\pi}{6}\left(\sin x - 13 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos\left[\frac{\pi}{6}\left(\sin x - 13 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6}\left(\sin x - 13 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} + k2\pi & (1) \\ \frac{\pi}{6}\left(\sin x - 13 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} + k2\pi & (2) \end{cases}$$

Giải (1): $\frac{\pi}{6}\left(\sin x - 13 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow \sin x - 13 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + 12k \Leftrightarrow \sin x = 14 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 12k$

Vì $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 14 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 12k \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{15}{12} + \frac{\sqrt{2}}{24} \leq k \leq -\frac{13}{12} + \frac{\sqrt{2}}{24}$, vì $k \in \mathbb{Z}$ nên không có giá trị k thỏa.

Giải (2): $\frac{\pi}{6}\left(\sin x - 13 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow \sin x - 13 + \frac{\sqrt{2}}{2} = -1 + 12k \Leftrightarrow \sin x = 12 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 12k$ (2')

Vì $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 12 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 12k \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{13}{12} + \frac{\sqrt{2}}{24} \leq k \leq -\frac{11}{12} + \frac{\sqrt{2}}{24}$, và $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = -1$

$$(2') \Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + 2m\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} + 2m\pi \end{cases}, (m \in \mathbb{Z})$$

hoc360.net