PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI THEO MỘT HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

DẠNG:

◦ $a\sin^2 u + b\sin u + c = 0\left(a \ne 0\right)$. Đặt $t = \sin u$,điều kiện $-1 \le t \le 1$

◦ $a\cos^2 u + b\cos u + c = 0\left(a \ne 0\right)$. Đặt $t = \cos u$,điều kiện $-1 \le t \le 1$

◦ $a\tan^2 u + b\tan u + c = 0\left(a = 0\right)$. Đặt $t = \tan u$, điều kiện $\cos u \ne 0$

◦ $a\cot^2 u + b\cot u + c = 0\left(a \ne 0\right)$. Đặt $t = \cot u$,điều kiện $\sin u \ne 0$

Câu 1: Giải các phương trình lượng giác sau:

1). $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$
2). $4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$

3). $\sin^2 2x - 13\sin 2x + 5 = 0$
4). $\tan^2 x + \left(\sqrt{3} - 1\right)\tan x - \sqrt{3} = 0$

5). $4\cos^2 x - 2\left(1 + \sqrt{3}\right)\cos x + \sqrt{3} = 0$
6). $\cot^2 x + 4\cot x + 3 = 0$

7). $\cos 2x - 3\sin x - 2 = 0$
8). $\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$

LỜI GIẢI

1). $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$ (1). Đặt $\cos x = t, t \in [-1;1]$. Phương trình (1) trở thành:

$2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = \frac{1}{2}$. So với điều kiện nhận cả hai nghiệm.

Với $t = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Với $t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = k2\pi$, $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$, $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$,$(k \in \mathbb{Z})$

2). $4\sin^2 x + 4\sin x - 3 = 0$ (1). Đặt $\sin x = t, t \in [-1;1]$. Phương trình (1) trở thành:

$4t^2 + 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \vee t = -\frac{3}{2}$. So với điều kiện nhận $t = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Kết luận nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

3). $\sin^2 2x - 13\sin 2x + 5 = 0$ (1). Đặt $\sin 2x = t, t \in [-1;1]$. Phương trình (1) trở thành: $t^2 - 13t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{13 + \sqrt{149}}{2} \vee t = \frac{13 - \sqrt{149}}{2}$. So với điều kiện nhận

$t = \frac{13 - \sqrt{149}}{2}$, suy ra : $\sin 2x = \frac{13 - \sqrt{149}}{2}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\arcsin\frac{13-\sqrt{149}}{2}+k2\pi\\2x=\pi-\arcsin\frac{13-\sqrt{149}}{2}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\arcsin\frac{13-\sqrt{149}}{2}}{2}+k\pi\\x=\dfrac{\pi-\arcsin\frac{13-\sqrt{149}}{2}}{2}+k\pi\end{array}\right.$$

Hoặc đặt $\frac{13-\sqrt{149}}{2}=\sin\alpha$, suy ra $\sin 2x=\sin\alpha$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\alpha+k2\pi\\2x=\pi-\alpha+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\alpha}{2}+k\pi\\x=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}+k\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình:

$$x=\dfrac{\arcsin\frac{13-\sqrt{149}}{2}}{2}+k\pi,x=\dfrac{\pi-\arcsin\frac{13-\sqrt{149}}{2}}{2}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$$

4). $\tan^2 x+\left(\sqrt{3}-1\right)\tan x-\sqrt{3}=0\,(1)$. Đặt $\tan x=t,\left(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$.

Phương trình (1) trở thành: $t^2+\left(\sqrt{3}-1\right)t-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow t=1\vee t=-\sqrt{3}$.

Với $t=1\Leftrightarrow\tan x=1\Leftrightarrow\tan x=\tan\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

Với $t=-\sqrt{3}\Leftrightarrow\tan x=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

So với điều kiện nhận cả hai nghiệm

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

5). $4\cos^2 x-2\left(1+\sqrt{3}\right)\cos x+\sqrt{3}=0$ (1)

Đặt $\cos x=t,t\in[-1;1]$. Phương trình (1) trở thành: $4t^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)t+\sqrt{3}=0$

$\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\vee t=\frac{\sqrt{3}}{2}$. So với điều kiện hai nghiệm đều nhận

Với $t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$

Với $t=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\cos x=\cos\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình:

$x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi$ $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

6). $\cot^2 x+4\cot x+3=0$

Đặt $\cot x=t, \left(x\neq k\pi\right)$. Phương trình (1) trở thành: $t^2+4t+3=0 \Leftrightarrow t=-1 \vee t=-3$

Với $t=-1 \Leftrightarrow \cot x=-1 \Leftrightarrow \cot x=\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Với $t=-3 \Leftrightarrow \cot x=-3 \Leftrightarrow \cot x=\operatorname{arccot}\left(-3\right) \Leftrightarrow x=\operatorname{arccot}\left(-3\right)+k\pi, \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $x=\operatorname{arccot}\left(-3\right)+k\pi, \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

7). $\cos 2x-3\sin x-2=0$

$\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x-3\sin x-2=0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x+3\sin x+1=0$ (1) . Đặt $\sin x=t, t\in[-1;1]$.

Phương trình (1) trở thành: $2t^2+3t+1=0 \Leftrightarrow t=-1 \vee t=-\frac{1}{2}$

So với điều kiện hai nghiệm đều nhận.

Với $t=-1 \Leftrightarrow \sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi, \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Với $t=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, \left(k\in\mathbb{Z}\right) \\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi, \left(k\in\mathbb{Z}\right) \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$, $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi, \left(k\in\mathbb{Z}\right)$

8). $\sin^2 x-\cos x+1=0$ (1)

$(1) \Leftrightarrow 1-\cos^2 x-\cos x+1=0 \Leftrightarrow \cos^2 x+\cos x-2=0$ (1')

Đặt $\cos x=t, t\in[-1;1]$. Phương trình (1') trở thành: $t^2+t-2=0 \Leftrightarrow t=1 \vee t=-2$.

So với điều kiện nhận $t=1$. Với $t=1 \Leftrightarrow \cos x=1 \Leftrightarrow x=k2\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x=k2\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$

Câu 2: Giải các phương trình lượng giác sau:

1). $\tan x-\cot x=\frac{3}{2}$

2). $\frac{1}{\sin^2 x}=\cot x+3$

3). $5\cos x-2\sin\frac{x}{2}+7=0$

4). $\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)+3\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1=0$

5). $23\sin x-\sin 3x=24$

6). $\sin^3 x+3\sin^2 x+2\sin x=0$

7). $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=4$

8). $\cos 4x+12\sin x\cos x-5=0$

9). $\frac{3}{\sin^2 x}-2\sqrt{3}\cot x-6=0$

10). $4\cos^2\left(6x-2\right)+16\cos^2\left(1-3x\right)=13$

11). $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2 \frac{x}{2}$

12). $2\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 6\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2 = 0$

13). $\cos 5x.\cos x = \cos 4x.\cos 2x + 3\cos^2 x + 1$

LỜI GIẢI

1). $\tan x - \cot x = \frac{3}{2}$ (1) . Điều kiện $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq k\pi \end{cases}, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

$\left(1\right) \Leftrightarrow \tan x - \frac{1}{\tan x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\tan^2 x - 3\tan x - 2 = 0 \quad \left(1'\right)$

Đặt $\tan x = t$. Phương trình (1') trở thành: $2t^2 - 3t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = -\frac{1}{2}$

Với $t = 2 \Leftrightarrow \tan x = 2 \Leftrightarrow x = \arctan 2 + k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Với $t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \tan x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \arctan 2 + k\pi,\ x = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

2). $\frac{1}{\sin^2 x} = \cot x + 3$ (1) . Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$

$\left(1\right) \Leftrightarrow 1 + \cot^2 x = \cot x + 3 \Leftrightarrow \cot^2 x - \cot x - 2 = 0 \quad \left(1'\right)$

Đặt $\cot x = t$. Phương trình (1') trở thành: $t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \vee t = 2$

Với $t = -1 \Leftrightarrow \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Với $t = 2 \Leftrightarrow \cot x = 2 \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} 2 + k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ x = \operatorname{arccot} 2 + k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

3). $5\cos x - 2\sin\frac{x}{2} + 7 = 0 \Leftrightarrow 5\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) - 2\sin\frac{x}{2} + 7 = 0$

$\Leftrightarrow 10\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2} - 12 = 0 \ \left(1\right)$. Đặt $t = \sin\frac{x}{2}, t \in [-1;1]$. Phương trình (1') trở thành: $5t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = -\frac{6}{5}$ (loại).

Với $t = 1 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pi + k4\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \pi + k4\pi\left(k \in \mathbb{Z}\right)$

4). $\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + 3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2 = 0$

Các bạn để ý: $\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$*, nên ta nghĩ ngay đến công thức nhân đôi để đưa về phương trình bậc 2 theo cos, ta thực hiện như sau:*

$\Leftrightarrow 2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-1+3\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2=0 \Leftrightarrow 2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+3\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+1=0$

$\Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-1 \vee \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$, cả hai nghiệm này đều nhận.

- $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-1 \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3}=\pi+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.
- $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \\ x+\frac{\pi}{3}=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=-\pi+k2\pi \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi, x=\frac{\pi}{3}+k2\pi, x=-\pi+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

5). $23\sin x-\sin 3x=24 \Leftrightarrow 23\sin x-\left(3\sin x-4\sin^3 x\right)=24$

$\Leftrightarrow 4\sin^3 x+20\sin x-24=0$ (1). Đặt $\sin x=t, t\in[-1;1]$. Phương trình (1) trở thành: $4t^3+20t-24=0 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

6). $\sin^3 x+3\sin^2 x+2\sin x=0$ (1)

Đặt $\sin x=t, t\in[-1;1]$. Phương trình (1) trở thành: $t^3+3t^2+2t=0$

$\Leftrightarrow t=-1 \vee t=-2 \vee t=0$, so với điều kiện nhận $t=-1 \vee t=0$.

Với $t=-1 \Leftrightarrow \sin x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Với $t=0 \Leftrightarrow \sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi,\ x=k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

7). $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+4\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=4$ (1)

Ta có $\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$

$(1) \Leftrightarrow 1-\sin^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+4\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=4$ $(1')$

Đặt $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=t, t\in[-1;1]$. Phương trình (1') trở thành: $t^2-4t+3=0$

$\Leftrightarrow t=3\vee t=1$, so với điều kiện nhận $t=1$, suy ra $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=1$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}+x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

8). $\cos 4x+12\sin x\cos x-5=0 \Leftrightarrow 1-2\sin^2 2x+6\sin 2x-5=0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x-3\sin 2x+2=0 \Leftrightarrow \sin 2x=1\vee \sin 2x=2$ (loại).

Với $\sin 2x=1 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

9). $\frac{3}{\sin^2 x}-2\sqrt{3}\cot x-6=0$. Điều kiện $\sin x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 3\left(1+\cot^2 x\right)-2\sqrt{3}\cot x-6=0 \Leftrightarrow 3\cot^2 x-2\sqrt{3}\cot x-3=0$

$\Leftrightarrow \cot x=-\frac{\sqrt{3}}{3}\vee \cot x=\sqrt{3}$.

Với $\cot x=-\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \cot x=\cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Với $\cot x=\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot x=\cot\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,\ x=\frac{\pi}{6}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

10). $4\cos^2\left(6x-2\right)+16\cos^2\left(1-3x\right)=13 \quad \left(1\right)$. Đặt $t=3x-1$

$\left(1\right) \Leftrightarrow 4\cos^2 2t+16\cos^2\left(-t\right)=13 \Leftrightarrow 4\cos^2 2t+16\cos^2 t=13$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 2t+16.\frac{1+\cos 2t}{2}=13 \Leftrightarrow 4\cos^2 2t+8\cos 2t-5=0$

$\Leftrightarrow \cos 2t=\frac{1}{2}\vee \cos 2t=-\frac{5}{2}$ (loại).

Với $\cos 2t=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2t=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2t=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ 2t=\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=\frac{\pi}{6}+k\pi\\ t=\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3x-1=\frac{\pi}{6}+k\pi\\ 3x-1=-\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}\\ x=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}\end{array}\right.,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}, x=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3},\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

11). $\cos 2x-3\cos x=4\cos^2\frac{x}{2}\Leftrightarrow\left(2\cos^2x-1\right)-3\cos x=4.\frac{1+\cos x}{2}$

$\Leftrightarrow 2\cos^2x-5\cos x-3=0\Leftrightarrow\cos x=-\frac{1}{2}\vee\cos x=3$ (loại).

$\cos x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x=\cos\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

12). $2\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-6\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2=0\quad(1)$

$(1)\Leftrightarrow\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+2=0\Leftrightarrow\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0\vee\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=2$ (loại).

Với $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{3}=k\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

13). $\cos 5x.\cos x=\cos 4x.\cos 2x+3\cos^2x+1\quad(1)$

Biến đổi tích về tổng được:

$\frac{1}{2}\left(\cos 4x+\cos 6x\right)=\frac{1}{2}\left(\cos 2x+\cos 6x\right)+3\cos^2x+1\Leftrightarrow\cos 4x=\cos 2x+6\cos^2x+2$

Sau đó sử dụng công thức nhân đôi và hạ bậc:

$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-1=\cos 2x+3\left(1+\cos 2x\right)+2\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-4\cos 2x-6=0\quad(1')$.

Đặt $\cos 2x=t, t\in[-1;1]$. Phương trình (1') trở thành: $2t^2-4t-6=0$

$\Leftrightarrow t=-1\vee t=3$. So với điều kiện nhận $t=-1$, suy ra:

$\cos 2x=-1\Leftrightarrow 2x=\pi+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Câu 3: Giải các phương trình lượng giác sau:

1). $4\left(\sin^2x+\frac{1}{\sin^2x}\right)+4\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)-7=0$

2). $2\left(\cos^2x+\frac{4}{\cos^2x}\right)+9\left(\frac{2}{\cos x}-\cos x\right)-1=0$

3). $3\left(\tan^2x+\cot^2x\right)+4\left(\tan x+\cot x\right)+2=0$

4). $\tan x+\tan^2x+\tan^3x+\cot x+\cot^2x+\cot^3x=6$

LỜI GIẢI

1). $4\left(\sin^2 x+\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)+4\left(\sin x+\dfrac{1}{\sin x}\right)-7=0\ \ (1)$

Đặt $t=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}\Leftrightarrow t^2=\left(\sin x+\dfrac{1}{\sin x}\right)^2\Rightarrow \sin^2 x+\dfrac{1}{\sin^2 x}=t^2-2$

$(1)\Leftrightarrow 4(t^2-2)+4t-7=0\Leftrightarrow 4t^2+4t-15=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{5}{2}\vee t=\dfrac{3}{2}$.

- Với $t=-\dfrac{5}{2}$: $\sin x+\dfrac{1}{\sin x}=-\dfrac{5}{2}\ \ (2)$, đặt $u=\sin x, u\in[-1;1]/\{0\}$

$(2)\Leftrightarrow 2u^2+5u+2=0\Leftrightarrow u=-\dfrac{1}{2}\vee u=-2$ (loại).

* $u=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \sin x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow \sin x=\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. (k\in\mathbb{Z})$

- Với $t=\dfrac{3}{2}\ \Leftrightarrow \sin x+\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{3}{2}\ \ (3)$, đặt $v=\sin x, v\in[-1;1]/\{0\}$

$(3)\Leftrightarrow 2v^2-3v+2=0$ (phương trình vô nghiệm).

Vậy nghiệm của phương trình: $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi, x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi, (k\in\mathbb{Z})$.

2). $2\left(\cos^2 x+\dfrac{4}{\cos^2 x}\right)+9\left(\dfrac{2}{\cos x}-\cos x\right)-1=0\ \ (1)$

Đặt $t=\dfrac{2}{\cos x}-\cos x\Rightarrow t^2=\left(\dfrac{2}{\cos x}-\cos x\right)^2\Rightarrow \cos^2 x+\dfrac{4}{\cos^2 x}=t^2+4$

$(1)\Leftrightarrow 2(t^2+4)+9t-1=0\Leftrightarrow 2t^2+9t+7=0\Leftrightarrow t=-1\vee t=-\dfrac{7}{2}$

Với $t=-1\Leftrightarrow \dfrac{2}{\cos x}-\cos x=-1\Leftrightarrow \cos^2 x-\cos x-2=0\Leftrightarrow \cos x=-1\vee \cos x=2$ (loại).

- $\cos x=-1\Leftrightarrow x=\pi+k2\pi, (k\in\mathbb{Z})$.

Với $t=-\dfrac{7}{2}\Leftrightarrow \dfrac{2}{\cos x}-\cos x=-\dfrac{7}{2}\Leftrightarrow 2\cos^2 x-7\cos x-4=0\Leftrightarrow \cos x=-\dfrac{1}{2}$ hoặc $\cos x=4$ (loại).

- $\cos x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi, (k\in\mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\pi+k2\pi,\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi, (k\in\mathbb{Z})$

3). $3(\tan^2 x+\cot^2 x)+4(\tan x+\cot x)+2=0\ \ (1)$

Đặt $t=\tan x+\cot x\Rightarrow t^2=(\tan x+\cot x)^2\Rightarrow \tan^2 x+\cot^2 x=t^2-2$

$(1) \Leftrightarrow 3\left(t^2-2\right)+4t+2=0 \Leftrightarrow 3t^2+4t-4=0 \Leftrightarrow t=-2 \vee t=\dfrac{2}{3}$

• Với $t=-2 \Leftrightarrow \tan x+\cot x=-2 \Leftrightarrow \tan x+\dfrac{1}{\tan x}=-2 \Leftrightarrow \tan^2 x+2\tan x+1=0$

$\Leftrightarrow \tan x=-1 \Leftrightarrow \tan x=\tan\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

• Với $t=\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \tan x+\cot x=\dfrac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \tan x+\dfrac{1}{\tan x}=\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 3\tan^2 x+2\tan x+3=0$ (phương trình vô nghiệm).

Vậy nghiệm của phương trình: $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

4). $\tan x+\tan^2 x+\tan^3 x+\cot x+\cot^2 x+\cot^3 x=6 \quad (1)$

Đặt $t=\tan x+\cot x$.

Có: $\tan^2 x+\cot^2 x=\left(\tan x+\cot x\right)^2-2\tan x\cot x=t^2-2$.

Có: $\tan^3 x+\cot^3 x=\left(\tan x+\cot x\right)^3-3\tan x.\cot x\left(\tan x+\cot x\right)=t^3-3t$.

$(1) \Leftrightarrow \left(\tan x+\cot x\right)+\left(\tan^2 x+\cot^2 x\right)+\left(\tan^3 x+\cot^3 x\right)=6$.

$\Leftrightarrow t+t^2-2+t^3-3t=6 \Leftrightarrow t^3+t^2-2t-8=0 \Leftrightarrow t=2$.

Với $t=2 \Leftrightarrow \tan x+\cot x=2 \Leftrightarrow \tan x+\dfrac{1}{\tan x}=2 \Leftrightarrow \tan^2 x-2\tan x+1=0$

$\Leftrightarrow \tan x=1 \Leftrightarrow \tan x=\tan\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Câu 4: Giải các phương trình lượng giác sau:

1). $\sin^4+\cos^4 x-2\sin 2x+\dfrac{3}{4}\sin^2 2x=0$

2). $\cos^6 2x+\sin^6 2x=\dfrac{15}{8}\cos 4x-\dfrac{1}{2}$

3). $\sin^4 x+\dfrac{5}{3}\cos^4 x=1$

4). $\sin^4 x+\cos^4 x+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\dfrac{3\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$

5). $\sin^4 x+\cos 2x+4\sin^6 x=0$

6). $\cos 8x+\sin^3 x\cos x-\cos^3 x\sin x-1=0$

LỜI GIẢI

1). $\sin^4+\cos^4 x-2\sin 2x+\dfrac{3}{4}\sin^2 2x=0 \quad (1)$

$\Leftrightarrow \left(1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x\right)-2\sin 2x+\dfrac{3}{4}\sin^2 2x=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\sin^2 2x-2\sin 2x+1=0 \quad (1')$

Đặt $\sin 2x=t, t\in[-1;1]$. Phương trình (1') trở thành: $\dfrac{1}{4}t^2-2t+1=0$

$\Leftrightarrow t=4+2\sqrt{3} \vee t=4-2\sqrt{3}$. So với điều kiện nhận $t=4-2\sqrt{3} \Rightarrow \sin 2x=4-2\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\arcsin\left(4-2\sqrt{3}\right)+k2\pi\\2x=\pi-\arcsin\left(4-2\sqrt{3}\right)+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\arcsin\left(4-2\sqrt{3}\right)}{2}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)\\x=\dfrac{\pi-\arcsin\left(4-2\sqrt{3}\right)}{2}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\dfrac{\arcsin\left(4-2\sqrt{3}\right)}{2}+k\pi, x=\dfrac{\pi-\arcsin\left(4-2\sqrt{3}\right)}{2}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

2). $\cos^6 2x+\sin^6 2x=\dfrac{15}{8}\cos 4x-\dfrac{1}{2}\quad(1)$

$(1)\Leftrightarrow 1-\dfrac{3}{4}\sin^2 2x=\dfrac{15}{8}\cos 4x-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 1-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1-\cos 4x}{2}=\dfrac{15}{8}\cos 4x-\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 8-3\left(1-\cos 4x\right)=15\cos 4x-4\Leftrightarrow \cos 4x=\dfrac{3}{4}$

$\Leftrightarrow 4x=\pm\arccos\dfrac{3}{4}+k2\pi\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{4}\arccos\dfrac{3}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\pm\dfrac{1}{4}\arccos\dfrac{3}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

3). $\sin^4 x+\dfrac{5}{3}\cos^4 x=1\Leftrightarrow\left(\sin^2 x\right)^2+\dfrac{5}{3}\left(\cos^2 x\right)^2=1$

$\Leftrightarrow\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\dfrac{5}{3}\left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=1\quad(1)$. Đặt $\cos 2x=t, t\in[-1;1]$

$(1)\Leftrightarrow\dfrac{1-2t+t^2}{4}+\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{1+2t+t^2}{4}=1\Leftrightarrow 8t^2+4t-4=0\Leftrightarrow t=-1\vee t=\dfrac{1}{2}$.

Với $t=-1\Leftrightarrow\cos 2x=-1\Leftrightarrow 2x=\pi+k2\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Với $t=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\cos 2x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\\2x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi, x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

4). $\sin^4 x+\cos^4 x+\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\dfrac{3\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\left(1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x\right)+\dfrac{1}{2}\left[\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin\left(2x-\pi\right)\right]=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x+\dfrac{1}{2}\left(-1-\sin 2x\right)=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\sin^2 2x+\sin 2x=0\Leftrightarrow\sin 2x=0\vee\sin 2x=-1$

Với $\sin 2x=0\Leftrightarrow 2x=k\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{k\pi}{2},\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Với $\sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \frac{k\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

5). $\sin^4 x + \cos 2x + 4\sin^6 x = 0 \Leftrightarrow (\sin^2 x)^2 + \cos 2x + 4(\sin^2 x)^3 = 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \cos 2x + 4\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 = 0$ (1). Đặt $\cos 2x = t, t \in [-1;1]$. Phương trình (1) trở thành: $\left(\frac{1-t}{2}\right)^2 + t + 4\left(\frac{1-t}{2}\right)^3 = 0 \Leftrightarrow 2t^3 - 7t^2 + 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 3$ (loại).

Kết luận phương trình vô nghiệm.

6). $\cos 8x + \sin^3 x \cos x - \cos^3 x \sin x - 1 = 0 \quad (1)$

$(1) \Leftrightarrow \cos 8x + \sin x \cos x(\sin^2 x - \cos^2 x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 8x - \frac{1}{2}\sin 2x \cos 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 4x - \frac{1}{4}\sin 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 4x + \frac{1}{4}\sin 4x = 0 \Leftrightarrow \sin 4x = 0 \vee \sin 4x = -\frac{1}{8}$

Với $\sin 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z})$.

Với

$$\sin 4x = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x = \arcsin\left(-\frac{1}{8}\right) + k2\pi \\ 4x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{8}\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{4}\arcsin\left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\arcsin\left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{k\pi}{2} \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình:

$x = \frac{k\pi}{4}$, $x = \frac{1}{4}\arcsin\left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{k\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\arcsin\left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$

Câu 5: Giải các phương trình lượng giác sau:

1). $\left(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x\right)^2 = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$

2). $\cot x + \left(1 + \tan x \tan\frac{x}{2}\right)\sin x = 4$

3). $\cot x - \tan x = \frac{2}{\sin 2x} - 4\sin 2x$

4). $\sqrt{2}(2\sin x - 1) = 4(\sin x - 1) - \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

5). $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x$ (ĐH khối A 2003)

6). $5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\tan^2 x$ (ĐH khối B 2004)

7). $\cos^2 3x\cos 2x-\cos^2 x=0$ (ĐH khối A 2005).

8). $\sin^4 x+\cos^4 x+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{3}{2}=0$ (ĐH khối D 2005).

9). $\frac{\left(1+\sin x+\cos 2x\right)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$ (ĐH khối A 2010).

10). $\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{5\sin 2x}=\frac{1}{2}\cot 2x-\frac{1}{8\sin 2x}$ (1) [Dự bị 2 ĐH02]

11). $\cot x-\tan x+4\sin 2x=\frac{2}{\sin 2x}$.[ĐH B03]

12). $3\cos 4x-8\cos^6 x+2\cos^2 x+3=0$ (1) [Dự bị 1 ĐH B03]

13). $\cot x=\tan x+\frac{2\cos 4x}{\sin 2x}$ [Dự bị 2 ĐH D03]

LỜI GIẢI

1). $\left(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x\right)^2=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ (1)

$$(1)\Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)^2=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\cos 2x\cos\frac{\pi}{6}+\sin 2x\sin\frac{\pi}{6}\right)^2=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0\Leftrightarrow\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0\vee\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$$

Với $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=0\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Với $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\x=-\frac{\pi}{12}+k\pi\end{array}\right.,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},x=\frac{\pi}{4}+k\pi,x=-\frac{\pi}{12}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

2). $\cot x+\left(1+\tan x\tan\frac{x}{2}\right)\sin x=4$ $\left(1\right)$. Điều kiện $\begin{cases}\sin x\neq 0\\\cos x\neq 0\\\cos\frac{x}{2}\neq 0\end{cases}$

Ta có: $1+\tan x\tan\frac{x}{2}=1+\frac{\sin x\sin\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}}=\frac{\cos x\cos\frac{x}{2}+\sin x\sin\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}}=\frac{\cos\left(x-\frac{x}{2}\right)}{\cos x\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{\cos x}$

$(1)\Leftrightarrow\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=4\Leftrightarrow\cos^2 x+\sin^2 x=4\sin x\cos x\Leftrightarrow 2\sin 2x=1$

$\Leftrightarrow\sin 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\2x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+k\pi\\x=\frac{5\pi}{12}+k\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{12}+k\pi,x=\frac{5\pi}{12}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

3). $\cot x-\tan x=\frac{2}{\sin 2x}-4\sin 2x\ \ (1)$. Điều kiện $\sin 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2}$

$(1)\Leftrightarrow\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}-4\sin 2x\quad\Leftrightarrow\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}-4\sin 2x$

$\Leftrightarrow\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{2}{\sin 2x}-4\sin 2x\quad\Leftrightarrow 2\cos 2x=2-4\sin^2 2x$

$\Leftrightarrow\cos 2x=1-2\left(1-\cos^2 2x\right)\quad\Leftrightarrow 2\cos^2 2x-\cos 2x-1=0$

$\Leftrightarrow\cos 2x=1\vee\cos 2x=-\frac{1}{2}$.

Với $\cos 2x=1\Leftrightarrow 2x=k2\pi\Leftrightarrow x=k\pi,(k\in\mathbb{Z})$ (loại)

Với $\cos 2x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos 2x=\cos\frac{2\pi}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\\2x=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k\pi\\x=-\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.,(k\in\mathbb{Z})$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{3}+k\pi,x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$

4). $\sqrt{2}(2\sin x-1)=4(\sin x-1)-\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\ \ (1)$

$\Leftrightarrow\sqrt{2}(2\sin x-1)=4(\sin x-1)-\left[\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$\Leftrightarrow\sqrt{2}(2\sin x-1)=4(\sin x-1)-\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow\sqrt{2}(2\sin x-1)=4(\sin x-1)-\sqrt{2}\cos 2x$

$\Leftrightarrow\sqrt{2}(2\sin x-1)=4(\sin x-1)-\sqrt{2}\left(1-2\sin^2 x\right)$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin^2 x+2\left(2-\sqrt{2}\right)\sin x-4=0$

$\Leftrightarrow\sin x=1\vee\sin x=-\sqrt{2}$ (loại).

Với $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Với Vậy nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

5). $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x \quad \left(1\right)$. Điều kiện $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ 1 + \tan x \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - 1 = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} + \sin^2 x - \sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \frac{\cos x\left(\cos x - \sin x\right)\left(\cos x + \sin x\right)}{\cos x + \sin x} + \sin x\left(\sin x - \cos x\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \cos x\left(\cos x - \sin x\right) - \sin x\left(\cos x - \sin x\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x - \sin x\right)\left(\frac{1}{\sin x} - \cos x + \sin x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin x = 0 \vee \frac{1}{\sin x} - \cos x + \sin x = 0$$

Với $\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Với $\frac{1}{\sin x} - \cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow 1 - \sin x \cos x + \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1 - \cos 2x}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \sin 2x + \cos 2x = 3 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 3 \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ (vô nghiệm).

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

6). $5\sin x - 2 = 3\left(1 - \sin x\right)\tan^2 x \quad \left(1\right)$. Điều kiện: $\cos x \neq 0$.

$$\Leftrightarrow 5\sin x - 2 = 3\left(1 - \sin x\right)\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

$$\Leftrightarrow 5\sin x - 2 = 3\left(1 - \sin x\right)\frac{\sin^2 x}{1 - \sin^2 x}.$$

$$\Leftrightarrow 5\sin x - 2 = 3\left(1 - \sin x\right)\frac{\sin^2 x}{\left(1 - \sin x\right)\left(1 + \sin x\right)}.$$

$$\Leftrightarrow 5\sin x - 2 = 3.\frac{\sin^2 x}{1 + \sin x}.$$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$ hoặc $\sin x = -2$ (vô nghiệm).

Với $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right., \left(k \in \mathbb{Z}\right)$, so với điều kiện thỏa.

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

7). $\cos^2 3x\cos 2x - \cos^2 x = 0 \quad (1)$ (ĐH khối A 2005).

$(1) \Leftrightarrow \frac{1+\cos 6x}{2}.\cos 2x - \frac{1+\cos 2x}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(1+\cos 6x\right)\cos 2x - \left(1+\cos 2x\right) = 0$

$\cos 6x\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\cos 4x + \cos 8x\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 4x + \cos 8x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 4x + \cos 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = 1 \vee \cos 4x = -\frac{3}{2}$ (loại).

Với $\cos 4x = 1 \Leftrightarrow 4x = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \frac{k\pi}{2}, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

8). $\sin^4 x + \cos^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0 \quad (1)$ (ĐH khối D 2005).

$(1) \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{2}\left[\sin 2x + \sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right)\right] - \frac{3}{2} = 0$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{2}\left(\sin 2x - \cos 4x\right) - \frac{3}{2} = 0$

$\Leftrightarrow -\sin^2 2x + \sin 2x - \cos 4x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow -\sin^2 2x + \sin 2x - \left(1 - 2\sin^2 2x\right) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \sin 2x = 1$ hoặc $\sin 2x = -2$ (loại).

Với $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Vậy nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

9). $\frac{\left(1 + \sin x + \cos 2x\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$ (ĐH khối A 2010).

Điều kiện $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ 1 + \tan x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \tan x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(1 + \sin x + \cos 2x\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x.$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x\left(1+\sin x+\cos 2x\right)}{\sin x+\cos x}.\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x.$$

$\Leftrightarrow 1+\sin x+\cos 2x=1 \Leftrightarrow -2\sin^2 x+\sin x+1=0 \Leftrightarrow \sin x=-\frac{1}{2} \vee \sin x=1$ (loại).

Với $\sin x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \vee x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

So với điều kiện nghiệm của phương trình $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \vee x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

10). $\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{5\sin 2x}=\frac{1}{2}\cot 2x-\frac{1}{8\sin 2x}$ (1) [Dự bị 2 ĐH02]

LỜI GIẢI

Điều kiện : $\sin 2x\neq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{5\sin 2x}=\frac{1}{2}.\frac{\cos 2x}{\sin 2x}-\frac{1}{8\sin 2x} \Leftrightarrow 8\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)=20\cos 2x-5$$

$$\Leftrightarrow 8\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)=20\cos 2x-5 \Leftrightarrow 8-4\left(1-\cos^2 2x\right)=20\cos 2x-5$$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 2x-20\cos 2x+9=0 \Leftrightarrow \cos 2x=\frac{1}{2}$ (nhận) hoặc $\cos 2x=\frac{9}{2}$ (loại).

Với $\cos 2x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=\frac{\pi}{3}+k2\pi \\ x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}+k\pi \\ x=-\frac{\pi}{6}+k\pi \end{array}\right.,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=\frac{\pi}{6}+k\pi, x=-\frac{\pi}{6}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

11). $\cot x-\tan x+4\sin 2x=\frac{2}{\sin 2x}$.[ĐH B03]

LỜI GIẢI

$\cot x-\tan x+4\sin 2x=\frac{2}{\sin 2x}$ (1)

Điều kiện : $\sin 2x\neq 0$

$(1)\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}+4\sin 2x=\frac{2}{\sin 2x} \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cos x}+4\sin 2x=\frac{2}{\sin 2x}$

$\Leftrightarrow 2\cos 2x+4\sin^2 2x=2 \Leftrightarrow 2\cos 2x+4\left(1-\cos^2 2x\right)=2$.

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-\cos 2x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=1 \\ \cos 2x=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi \end{array}\right.,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=k\pi, x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

12). $3\cos 4x-8\cos^6 x+2\cos^2 x+3=0$ (1) [Dự bị 1 ĐH B03]

LỜI GIẢI

$(1) \Leftrightarrow 3\cos 4x - 8\left(\cos^2 x\right)^3 + 2\cos^2 x + 3 = 0$.

$$\Leftrightarrow 3\left(2\cos^2 2x - 1\right) - 8\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 + \left(1+\cos 2x\right) + 3 = 0$$

Đặt $t = \cos 2x, t \in [-1;1]$

$$\Leftrightarrow 3\left(2t^2 - 1\right) - \left(1+t\right)^3 + t + 4 = 0 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \vee t = 1 \vee t = 2 \text{ (loại)}.$$

Với $t = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Với $t = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

Kết luận nghiệm của phương trình $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $x = k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

13). $\cot x = \tan x + \frac{2\cos 4x}{\sin 2x}$ [Dự bị 2 ĐH D03]

LỜI GIẢI

$\cot x = \tan x + \frac{2\cos 4x}{\sin 2x} \quad (1)$

Điều kiện : $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

$(1) \Leftrightarrow \cot x - \tan x = \frac{2\cos 4x}{\sin 2x}$

$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos 4x}{\sin x \cos x} \qquad \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 4x$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \cos 4x \qquad \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \vee \cos 2x = 1$

Với $\cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi; \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Với $\cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

So với điều kiện nghiệm của phương trình $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi; \left(k \in \mathbb{Z}\right)$