BÀI 3: NHỊ THỨC NIU-TON

1). Công thức nhị thức Niu-ton

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + \ldots + C_n^ka^{n-k}b^k + \ldots + C_n^nb^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^ka^{n-k}b^k \text{ (quy ước } a^0 = b^0 = 1) \text{ (*)}.$$

2). Nhận xét:

Công thức nhị thức Niu tơn (*) có :

* $(n+1)$ số hạng.
* Số hạng thứ $k+1$ là $T_{k+1} = C_n^ka^{n-k}b^k$.
* Các hệ số của nhị thức có tính đối xứng theo tính chất $C_n^k = C_n^{n-k}$.
* Trong mỗi số hạng tổng số mũ của a và b luôn bằng n.

2). Tam giác Pa-xcan

Trên đây ta thấy muốn khai triển $(a+b)^n$ thành đa thức, ta cần biết $n+1$ số $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}, C_n^n$ có mặt trong công thức nhị thức Niu-tơn. Các số này có thể tính được bằng cách sử dụng bảng số sau đây :

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
……………………………………………………

Bảng số này do nhà toán học Pháp Pa-xcan thiết lập vào năm 1653 và được người ta gọi là tam giác Pa-xcan.

Tam giác Pa-xcan được thiết lập theo quy luật sau :

– Đỉnh được ghi số 1. Tiếp theo là hàng thứ nhất ghi hai số 1.

– Nếu biết hàng thứ n $(n \geq 1)$ thì hàng thứ $n+1$ tiếp theo được thiết lập bằng cách cộng hai số liên tiếp của hàng thứ n rồi viết kết quả xuống hàng dưới ở vị trí giữa hai số này. Sau đó viết số 1 ở đầu và cuối hàng.

Chú ý:

$x^m.x^n = x^{m+n}$, $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$, $x^m.y^m = (xy)^m$, $\dfrac{x^m}{y^m} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^m$,

$\left(x^m\right)^n = \left(x^n\right)^m = x^{m.n}$, $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$, $\dfrac{1}{x^m} = x^{-m}$, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$ (với điều kiện x, y đều có nghĩa trong tất cả các công thức trên).

CÁC DẠNG THƯỜNG GẶP

DẠNG 1: TÌM HỆ SỐ CỦA SỐ HẠNG CHỨA x^k TRONG KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NIUTƠN

PHƯƠNG PHÁP:

- Sử dụng công thức tính số hạng tổng quát: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$
- Số hạng thứ $(k+1)$: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k, (0 \le k \le n, n \in ¢)$

Ví dụ 1: Khai triển các nhị thức sau:

a). $(x+2y)^5$ b). $(2x-3y)^6$ c). $\left(2x-\frac{1}{y}\right)^5$ d). $\left(\frac{1}{x}+2y\right)^6$

LỜI GIẢI

a). $(x+2y)^5 = C_5^0 x^5 + C_5^1 x^4.(2y) + C_5^2 x^3.(2y)^2 + C_5^3 x^2.(2y)^3 + C_5^4 x.(2y)^4 + C_5^5 (2y)^5$

$= x^5 + 10x^4 y + 40x^3 y^2 + 80x^2 y^3 + 80xy^4 + 32y^5$.

b). $(2x-3y)^6 = [2x+(-3y)]^6 = C_6^0 (2x)^6 + C_6^1 (2x)^5 (-3y) + C_6^2 (2x)^4 (-3y)^2$

$+ C_6^3 (2x)^3 (-3y)^3 + C_6^4 (2x)^2 (-3y)^4 + C_6^5 (2x)(-3y)^5 + C_6^6 (-3y)^6$

$= 64x^6 - 576x^5 y + 2160x^4 y^2 - 4320x^3 y^3 + 4860x^2 y^4 - 2916xy^5 + 729y^6$.

c). $\left(2x-\frac{1}{y}\right)^5 = \left[2x+\left(-\frac{1}{y}\right)\right]^5 = C_5^0 (2x)^5 + C_5^1 (2x)^4 \left(-\frac{1}{y}\right) + C_5^2 (2x)^3 \left(-\frac{1}{y}\right)^2$

$+ C_5^3 (2x)^2 \left(-\frac{1}{y}\right)^3 + C_5^4 (2x)\left(-\frac{1}{y}\right)^4 + C_5^5 \left(-\frac{1}{y}\right)^5$

$= 32x^5 - \frac{80x^4}{y} + \frac{80x^3}{y^2} - \frac{40x^2}{y^3} + \frac{10x}{y^4} - \frac{1}{y^5}$.

d). $\left(\frac{1}{x}+2y\right)^6 = C_6^0 \left(\frac{1}{x}\right)^6 + C_6^1 \left(\frac{1}{x}\right)^5 (2y) + C_6^2 \left(\frac{1}{x}\right)^4 (2y)^2 + C_6^3 \left(\frac{1}{x}\right)^3 (2y)^3$

$+ C_6^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 (2y)^4 + C_6^5 \left(\frac{1}{x}\right)(2y)^5 + C_6^6 (2y)^6$

$= \frac{1}{x^6} + \frac{12y}{x^5} + \frac{60y^2}{x^4} + \frac{160y^3}{x^3} + \frac{240y^4}{x^2} + \frac{192y^5}{x} + 64y^6$

Ví dụ 2: Tìm số hạng thứ k trong các khai triển nhị thức sau:

1). Tìm số hạng thứ 6 trong khai triển $(x+2y)^{13}$

2). Tìm số hạng thứ 6 trong khai triển $(x-3y)^{11}$

3). Tìm số hạng thứ 8 trong khai triển $\left(2x-\frac{2}{y}\right)^{15}$

4). Tìm hệ số của $x^{101}y^{99}$ trong khai triển $(2x-3y)^{200}$.

5). Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $(1+2x+3x^2)^{10}$

6). Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $(1+x^2-x^3)^8$

LỜI GIẢI

1). Tìm số hạng thứ 6 trong khai triển $(x+2y)^{13}$

Ta có số hạng tổng quát $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k=C_{13}^k x^{13-k}(2y)^k$. Để có số hạng thứ 6 thì $k+1=6 \Leftrightarrow k=5$. Vậy số hạng thứ 6 trong khai triển là $C_{13}^5 x^8(2y)^5=41184x^8y^5$

2). Tìm số hạng thứ 6 trong khai triển $(x-3y)^{11}$

Ta có số hạng tổng quát $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k=C_{11}^k x^{11-k}(-3y)^k$. Để có số hạng thứ 5 thì $k+1=5 \Leftrightarrow k=4$. Vậy số hạng thứ 5 trong khai triển là $C_{11}^4 x^7(-3y)^4=26730x^7y^4$.

3). Tìm số hạng thứ 8 trong khai triển $\left(2x-\frac{2}{y}\right)^{15}$

Ta có số hạng tổng quát $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k=C_{15}^k(2x)^{15-k}\left(-\frac{2}{y}\right)^k$. Để có số hạng thứ 8 thì $k+1=8 \Leftrightarrow k=7$.

Vậy số hạng thứ 8 trong khai triển là $C_{15}^7(2x)^8\left(-\frac{2}{y}\right)^7=-C_{15}^7 2^{15}.\frac{x^8}{y^7}$.

4). Tìm hệ số của $x^{101}y^{99}$ trong khai triển $(2x-3y)^{200}$.

Ta có $(2x-3y)^{200}=\left[2x+(-3y)\right]^{200}=\sum_{k=0}^{200}C_{200}^k(2x)^{200-k}(-3y)^k=\sum_{k=0}^{200}C_{200}^k 2^{200-k}(-3)^k x^{200-k}y^k$. Để có hệ số của $x^{101}y^{99}$ thì $\begin{cases}200-k=101\\k=99\end{cases} \Leftrightarrow k=99$ (đúng). Kết luận hệ số của $x^{101}y^{99}$ là $C_{200}^{99}2^{101}(-3)^{99}$.

5). Tìm hệ số của x^4 trong khai triển $\left(1+2x+3x^2\right)^{10}$

Ta có $\left(1+2x+3x^2\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k\left(2x+3x^2\right)^k=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k\sum_{m=0}^{k}C_k^m(2x)^{k-m}\left(3x^2\right)^m$

$=\sum_{k=0}^{10}\sum_{m=0}^{k}C_{10}^kC_k^m 2^{k-m}3^m x^{k+m}$. Để có hệ số của x^4 thì $\begin{cases}k+m=4\\0\le m\le k\le 10\\k,m\in ¢\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=0\\k=4\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}m=1\\k=3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}m=2\\k=2\end{cases}$. Kết luận hệ số của x^4 là :

$a_4=C_{10}^4C_4^0 2^4 3^0+C_{10}^3C_3^1 2^2 3^1+C_{10}^2C_2^2 2^0 3^2=8085$

6). Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $\left(1+x^2-x^3\right)^8$

Ta có $\left(1+x^2-x^3\right)^8=\sum_{k=0}^{8}C_8^k\left(x^2-x^3\right)^k=\sum_{k=0}^{8}C_8^k\sum_{m=0}^{k}C_k^m\left(x^2\right)^{k-m}\left(-x^3\right)^m$

$=\sum_{k=0}^{8}\sum_{m=0}^{k}C_8^kC_k^m(-1)^m x^{2k+m}$. Để có hệ số của x^8 thì $\begin{cases}2k+m=8\\0\le m\le k\le 8\\m,k\in ¢\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=0\\k=4\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}m=2\\k=3\end{cases}$. Kết luận hệ số của x^8 là : $a_8=C_8^4C_4^0++C_8^3C_3^2=238$

Ví dụ 3: Tìm số hạng không chứa x trong các triển khai sau:

a). $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^{15}$ b). $\left(x^2+\dfrac{1}{x^4}\right)^{12}$ c). $\left(2x-\dfrac{2}{x}\right)^{12}$

LỜI GIẢI

a). Ta có $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^{15}=\sum\limits_{k=0}^{15}C_{15}^k\left(x^2\right)^{15-k}\left(\dfrac{1}{x}\right)^k=\sum\limits_{k=0}^{15}C_{15}^k x^{30-2k}.x^{-k}=\sum\limits_{k=0}^{15}C_{15}^k x^{30-3k}$. Để có số hạng không chứa x thì $30-3k=0\Leftrightarrow k=10$. Kết luận hệ số của số hạng không chứ x là C_{15}^{10}.

b). Ta có $\left(x^2+\dfrac{1}{x^4}\right)^{12}=\sum\limits_{k=0}^{12}C_{12}^k\left(x^2\right)^{12-k}\left(\dfrac{1}{x^4}\right)^k=\sum\limits_{k=0}^{12}C_{12}^k x^{24-2k}x^{-4k}=\sum\limits_{k=0}^{12}C_{12}^k x^{24-6k}$. Để có số hạng không chứa x thì $24-6k=0\Leftrightarrow k=4$. Kết luận hệ số của số hạng không chứ x là C_{12}^4.

c). Ta có $\left(2x-\dfrac{2}{x}\right)^{12}=\sum\limits_{k=0}^{12}C_{12}^k(2x)^{12-k}\left(-\dfrac{2}{x}\right)^k=\sum\limits_{k=0}^{12}C_{12}^k 2^{12-k}x^{12-k}(-2)^k x^{-k}=\sum\limits_{k=0}^{12}C_{12}^k 2^{12-k}(-2)^k x^{12-2k}$. Để có số hạng không chứa x thì $12-2k=0\Leftrightarrow k=6$. Kết luận hệ số của số hạng không chứ x là $C_{12}^6 2^6(-2)^6=C_{12}^6 2^{12}$.

Ví dụ 4: Trong khai triển của nhị thức $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^n$ cho biết tổng hệ số của 3 số hạng đầu tiên trong khai triển trên bằng 97. Tìm hệ số của số hạng có chứa x^4.

LỜI GIẢI

Ta có $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^n=C_n^0\left(x^2\right)^n+C_n^1\left(x^2\right)^{n-1}\left(-\dfrac{2}{x}\right)+C_n^2\left(x^2\right)^{n-2}\left(-\dfrac{2}{x}\right)^2+\dots+C_n^n\left(-\dfrac{2}{x}\right)^n$

$=C_n^0x^{2n}-2C_n^1x^{2n-3}+4C_n^2x^{2n-6}+\dots+C_n^n\left(-\dfrac{2}{x}\right)^n$

Theo đề bài ta có $C_n^0-2C_n^1+4C_n^2=97\Leftrightarrow 1-2\dfrac{n!}{(n-1)!}+4\dfrac{n!}{2!(n-2)!}=97$

$\Leftrightarrow -2\dfrac{n(n-1)!}{(n-1)!}+4\dfrac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!}=96\Leftrightarrow -n+n(n-1)=48$

$\Leftrightarrow n^2-2n-48=0\Leftrightarrow n=8\vee n=-6$. Nhận $n=8$.

Vậy $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^n=\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^8=\sum\limits_{k=0}^{8}C_8^k\left(x^2\right)^{8-k}\left(-\dfrac{2}{x}\right)^k=\sum\limits_{k=0}^{8}C_8^k x^{16-2k}(-2)^k x^{-k}$

$=\sum\limits_{k=0}^{8}C_8^k(-2)^k x^{16-3k}$. Để có hệ số của số hạng chứa x^4 thì $16-3k=4\Rightarrow k=4$.

Kết luận hệ số của số hạng chứa x^4 là $a_4=C_8^4(-2)^4=1120$.

Ví dụ 5: Tìm hệ số của x^5 trong khai triển của biểu thức sau thành đa thức $f(x)=(2x+1)^4+(2x+1)^5+(2x+1)^6+(2x+1)^7$.

LỜI GIẢI

Ta có $(2x+1)^n=C_n^0(2x)^n+C_n^1(2x)^{n-1}+\dots+C_n^n$.

Số hạng tổng quát là $a_{k+1} = C_n^k (2x)^{n-k} = 2^{n-k}.C_n^k.x^{n-k}$. Ta cần $n - k = 5$, tức là $k = n - 5$.

Như vậy trong khai triển $(2x+1)^4$ không có x^5.

Hệ số x^5 trong khai triển của:

- nhị thức $(2x+1)^5$ ứng với $k = 5-5 = 0$ là $2^5C_5^0 = 2^5$,
- nhị thức $(2x+1)^6$ ứng với $k = 6-5 = 1$ là $2^5C_6^1 = 6.2^5$,
- nhị thức $(2x+1)^7$ ứng với $k = 7-5 = 2$ là $2^5C_7^2 = 21.2^5$.

Vậy hệ số cần tìm là $2^5 + 6.2^5 + 21.2^5 = 28.2^5 = 896$.

Ví dụ 6: Trong khai triển $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$, hệ số số hạng thứ ba lớn hơn hệ số số hạng thứ hai là 35. Tính số hạng không chứa x.

LỜI GIẢI

Ta có $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.x^{n-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.x^{n-2k}$

Từ giả thiết suy ra $C_n^2 - C_n^1 = 35 \Leftrightarrow n^2 - 3n - 70 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 10 \\ n = -7 (\text{loai}). \end{array}\right.$

Vậy $n = 10$: Số hạng $a_{k+1} = C_{10}^k.x^{10-2k}$ không phụ thuộc x khi

$10 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = 5$. Vậy số hạng ấy là $C_{10}^5 = 252$.

Ví dụ 7: Khai triển và rút gọn đa thức

$P(x) = (1+x)^6 + (1+x)^7 + (1+x)^8 + ... + (1+x)^{10}$

Được $P(x) = a_{10}x^{10} + a_9x^9 + ... + a_0$. Tính a_8.

LỜI GIẢI

a_8 là hệ số của số hạng chứa x^8 . Ta có

- Hệ số của x^8 trong $(1+x)^8$ là C_8^8.
- Hệ số của x^8 trong $(1+x)^9$ là C_9^8.
- Hệ số của x^8 trong $(1+x)^{10}$ là C_{10}^8.

Vậy $a_8 = C_8^8 + C_9^8 + C_{10}^8 = 55$.

DẠNG 2: TÍNH TỔNG hoặc CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

PHƯƠNG PHÁP

Dựa vào các công thức khai triển nhị thức Niutơn sau:

- $(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^nb^n$
- $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \cdots + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^nx^n$
- $(x+1)^n = C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1} + C_n^2x^{n-2} + \cdots + C_n^{n-1}x + C_n^n$.

Sau đó chọn a, b, x các giá trị thích hợp $\Rightarrow$ ...

Ví dụ 1: Tính các giá trị của biểu thức sau:

$S_1 = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n$

$S_2 = C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \cdots + 2^n C_n^n$

$S_3 = 2^n C_n^0 + 2^{n-1} C_n^1 + 2^{n-2} C_n^2 + \cdots + C_n^n$

LỜI GIẢI

Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \cdots + C_n^n x^n \quad (*)$

a). Chọn x = 1 thay vào (*) ta được: $(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n$

Kết luận: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$

b). Chọn x = 2 thay vào (*) ta được: $(1+2)^n = C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \cdots + 2^n C_n^n$

Kết luận $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \cdots + 2^n C_n^n = 3^n$

c). Ta có $(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + C_n^3 x^{n-3} + \cdots + C_n^n \quad (**)$

Chọn x = 2 thay vào (**) ta được: $(2+1)^n = 2^n C_n^0 + 2^{n-1} C_n^1 + 2^{n-2} C_n^2 + \cdots + C_n^n$

Kết luận $2^n C_n^0 + 2^{n-1} C_n^1 + 2^{n-2} C_n^2 + \cdots + C_n^n = 3^n$

Những kết quả này áp dụng rất nhiều cho các bài tập ở sau.

Ví dụ 2: Chứng minh các đẳng thức sau:

a). $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 2^{2n}$

b). $C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + \cdots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 0$

c). $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}$

LỜI GIẢI

Ta có $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + C_{2n}^3 x^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + C_{2n}^{2n} x^{2n} \quad (*)$

a). Chọn x = 1 thay vào (*) ta được:

$(1+1)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$

Kết luận: $C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 2^{2n}$ (1).

b). Chọn x = -1 thay vào (*) ta được:

$(1-1)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + \cdots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n}$

Kết luận: $C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + \cdots - C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} = 0$ (2).

c). Từ (2) ta suy ra: $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1}$ (3)

lấy (1) + (2) vế theo vế ta được:

$$2\left(C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{2n}^{2n}\right) = 2^{2n} \Rightarrow C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{2n}^{2n} = 2^{2n-1} \qquad (4)$$

Từ (3) và (3) suy ra $C_{2n}^0 + C_{2n}^2 + \cdots + C_{2n}^{2n} = C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \cdots + C_{2n}^{2n-1} = 2^{2n-1}$

Những kết quả này áp dụng rất nhiều cho các bài tập ở sau

BÀI TẬP TỔNG HỢP

DẠNG 1: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC DỰA VÀO CÔNG THỨC VÀ TÍNH CHẤT CỦA TỔ HỢP VÀ CHỈNH HỢP

Nhắc lại: $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$; $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{A_n^k}{k!}$

Câu 1: Chứng minh rằng các đẳng thức sau:

a). $C_n^k = C_n^{n-k}$

b). $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$.

c). $C_n^k + 3C_n^{k+1} + 3C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+3}^{k+3}$.

LỜI GIẢI

a). Ta có: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-(n-k)!)(n-k)!} = C_n^{n-k}$.

b). Ta có:

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right)$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\frac{n+1}{k(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k.$$

c). Áp dụng kết quả bài 2 ta có:

$$VT = \left(C_n^k + C_n^{k+1}\right) + 2\left(C_n^{k+1} + C_n^{k+2}\right) + \left(C_n^{k+2} + C_n^{k+3}\right)$$

$$= C_{n+1}^{k+1} + 2C_{n+1}^{k+2} + C_{n+1}^{k+3} = \left(C_{n+1}^{k+1} + C_{n+1}^{k+2}\right) + \left(C_{n+1}^{k+2} + C_{n+1}^{k+3}\right)$$

$$= C_{n+2}^{k+2} + C_{n+2}^{k+3} = C_{n+3}^{k+3} = VP$$

Kết quả bài này các bạn phải nhớ kỹ để áp dụng vào những bài tính tổng.

Câu 2: Chứng minh với các số k, n nguyên, không âm sao cho $1 \le k \le n$, ta có $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$

LỜI GIẢI

$$kC_n^k = k.\frac{n!}{k!(n-k)!} = k.\frac{n.(n-1)!}{k.(k-1)!\left[(n-1)-(k-1)\right]!}$$

$$= n.\frac{(n-1)!}{(k-1)!\left[(n-1)-(k-1)\right]!} = nC_{n-1}^{k-1}$$

Kết quả bài này các bạn phải nhớ kỹ để áp dụng vào những bài tính tổng.

Câu 3: Chứng minh với các số k, n nguyên, không âm sao cho $2 \le k \le n$, ta có $k(k-1)C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$

LỜI GIẢI

Ta có: $k(k-1)C_n^k = k(k-1)\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$$=n\left(n-1\right)\frac{\left(n-2\right)!}{\left(k-2\right)!\left[\left(n-2\right)-\left(k-2\right)\right]!}=n\left(n-1\right)C_{n-2}^{k-2}$$

Kết quả bài này các bạn phải nhớ kỹ để áp dụng vào những bài tính tổng.

Câu 4: Chứng minh với các số k, n nguyên, không âm sao cho $2\le k\le n,$ ta có $k^2C_n^k=n\left(n-1\right)C_{n-2}^{k-2}+nC_{n-1}^{k-1}$

LỜI GIẢI

Ta có: $k^2C_n^k=k\left(k-1+1\right)C_n^k=k\left(k-1\right)C_n^k+kC_n^k=n\left(n-1\right)C_{n-2}^{k-2}+nC_{n-1}^{k-1}$ (áp dụng kết quả của hai bài kế trên).

Kết quả bài này các bạn phải nhớ kỹ để áp dụng vào những bài tính tổng.

Câu 5: Chứng minh với các số k, n nguyên,không âm sao cho $0\le k\le n,$ ta có $\frac{C_n^k}{k+1}=\frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$

LỜI GIẢI

Ta có: $\frac{C_n^k}{k+1}=\frac{1}{k+1}.\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}=\frac{1}{n+1}.\frac{\left(n+1\right)n!}{\left(k+1\right)!\left(n-k\right)!}$

$$=\frac{1}{n+1}.\frac{\left(n+1\right)!}{\left(k+1\right)!\left[\left(n+1\right)-\left(k+1\right)\right]!}=\frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$$

Kết quả bài này các bạn phải nhớ kỹ để áp dụng vào những bài tính tổng.

Câu 6: Chứng minh với các số k, n nguyên,không âm sao cho $0\le k\le n,$ ta có $nC_n^k=(k+1)C_n^{k+1}+kC_n^k.$

LỜI GIẢI

$$nC_n^k=n.\frac{n!}{k!(n-k)!}=\left[(n-k)+k\right].\frac{n!}{k!(n-k)!}=(n-k).\frac{n!}{k!(n-k)!}+k.\frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\left(n-k\right)\left(k+1\right)\frac{n!}{\left(k+1\right)!.\left(n-k\right)\left(n-k-1\right)!}+r.\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$=(k+1).\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}+r.\frac{n!}{r!(n-r)!}=(r+1)C_n^{r+1}+rC_n^r.$$

Câu 7: Chứng minh rằng các đẳng thức sau:

a). $C_n^k+3C_n^{k+1}+3C_n^{k+2}+C_n^{k+3}=C_{n+3}^{k+3}$ với $n\in N^*,0\le k\le n-3.$

b). $A_{n+k}^{n+2}+A_{n+k}^{n+1}=k^2.A_{n+k}^{n}$ với $n,k\in N^*,k\ge 2.$

LỜI GIẢI

a). Ta có:

$$C_n^k+C_n^{k-1}=\frac{n!}{\left(n-k\right)!k!}+\frac{n!}{\left(k-1\right)!\left(n-k+1\right)!}=\frac{n!}{\left(k-1\right)!\left(n-k\right)!}\left[\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k+1}\right]$$

$$=\frac{n!}{\left(k-1\right)!\left(n-k\right)!}.\frac{n+1}{k\left(n-k+1\right)}=\frac{\left(n+1\right)!}{k!\left(n+1-k\right)!}=C_{n+1}^k.$$

Áp dụng kết quả trên ta có:

$$VT=\left(C_n^k+C_n^{k+1}\right)+2\left(C_n^{k+1}+C_n^{k+2}\right)+\left(C_n^{k+2}+C_n^{k+3}\right)$$

$$=C_{n+1}^{k+1}+2C_{n+1}^{k+2}+C_{n+1}^{k+3}=\left(C_{n+1}^{k+1}+C_{n+1}^{k+2}\right)+\left(C_{n+1}^{k+2}+C_{n+1}^{k+3}\right)$$

$$=C_{n+2}^{k+2}+C_{n+2}^{k+3}=C_{n+3}^{k+3}=VP$$

b). Ta có: $A_{n+k}^{n+2}+A_{n+k}^{n+1}=\dfrac{(n+k)!}{(k-2)!}+\dfrac{(n+k)!}{(k-1)!}=\dfrac{(n+k)!}{(k-2)!}\left(1+\dfrac{1}{k-1}\right)$

$$=\frac{(n+k)!}{(k-2)!}.\frac{k}{k-1}=k^2.\frac{(n+k)!}{k!}=k^2.A_{n+k}^n.$$

Câu 8: Chứng minh các đẳng thức sau:

a). $A_{n+k}^{n+2}+A_{n+k}^{n+1}=k^2A_{n+k}^n$ với $n,k\in N^*,k\ge 2.$

b). $A_n^k-A_{n-1}^k=k.A_{n-1}^{k-1}$ với $n,k\in N^*,n\ge 2,k\le n-1.$

c). $\dfrac{n+1}{n+2}\left(\dfrac{1}{C_{n+1}^k}+\dfrac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right)=\dfrac{1}{C_n^k}$ với $n,k\in N^*,k\le n.$

LỜI GIẢI

a). Ta có: $A_{n+k}^{n+2}+A_{n+k}^{n+1}=\dfrac{(n+k)!}{(k-2)!}+\dfrac{(n+k)!}{(k-1)!}=\dfrac{(n+k)!}{(k-2)!}\left(1+\dfrac{1}{k-1}\right)$

$$=\frac{(n+k)!k}{(k-2)!k-1}=k^2\frac{(n+k)!}{k!}=k^2.A_{n+k}^n.$$

b). Ta có:

$$A_n^k-A_{n-1}^k=\frac{n!}{(n-k)!}-\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}=\frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}.\left(\frac{n}{n-k}-1\right)=k\frac{(n-1)!}{(n-k)!}=kA_{n-1}^{k-1}.$$

c). Ta có: $\dfrac{n+1}{n+2}\left(\dfrac{1}{C_{n+1}^k}+\dfrac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right)=\dfrac{n+1}{n+2}.\dfrac{k!(n+1-k)!+(k+1)!(n-k)!}{(n+1)!}$

$$=\frac{1}{n+2}.\frac{k!(n-k)!}{n!}\left[(n+1-k)+(k+1)\right]=\frac{k!(n-k)!}{n!}=\frac{1}{C_n^k}.$$

Câu 9: Chứng minh $\forall k,n\in$ ¥ * thỏa mãn $3\le k\le n$ ta luôn có:

$$C_n^k+3C_n^{k-1}+2C_n^{k-2}=C_{n+3}^k-C_n^{k-3}-C_n^{k-2}.$$

LỜI GIẢI

Ta có:

$$C_n^k+3C_n^{k-1}+2C_n^{k-2}=C_{n+3}^k-C_n^{k-3}-C_n^{k-2}\Leftrightarrow C_n^k+3C_n^{k-1}+3C_n^{k-2}+C_n^{k-3}=C_{n+3}^k \quad (5)$$

$$VT(5)=C_n^k+C_n^{k-1}+2\left(C_n^{k-1}+C_n^{k-2}\right)+C_n^{k-2}+C_n^{k-3}=C_{n+1}^k+2C_{n+1}^{k-1}+C_{n+1}^{k-2}$$

$=\left(C_{n+1}^k+C_{n+1}^{k-1}\right)+\left(C_{n+1}^{k-1}+C_{n+1}^{k-2}\right)=C_{n+2}^k+C_{n+2}^{k-1}=C_{n+3}^k$ (điều phải chứng minh).

10. Chứng minh rằng các đẳng thức sau:

a. $C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+4}^k$ với $4 \le k \le n$.

b. $P_k.A_{n+1}^2.A_{n+3}^2.A_{n+5}^2 = n.k!.A_{n+5}^5$.

c. $C_n^0.C_n^k + C_n^1.C_{n-1}^{k-1} + ... + C_n^k.C_{n-k}^0 = 2^k.C_n^k$.

LỜI GIẢI

a). Ta có: $VT = \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) + 3\left(C_n^{k-1} + C_n^{k-2}\right) + 3\left(C_n^{k-2} + C_n^{k-3}\right) + \left(C_n^{k-3} + C_n^{k-4}\right)$

$$= C_{n+1}^k + 3C_{n+1}^{k-1} + 3C_{n+1}^{k-2} + C_{n+1}^{k-3} = C_{n+4}^k.$$

b). Ta có: $VT = k!\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}.\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!}.\dfrac{(n+5)!}{(n+3)!} = k!\dfrac{(n+5)!}{(n-1)!} = nk!A_{n+5}^5$.

c). Ta có:

$$C_n^m C_{n-m}^{k-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.\frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!} = \frac{n!}{m!(k-m)!(n-k)!}$$

$$= \frac{k!}{m!(k-m)!}.\frac{n!}{k!(n-k)!} = C_k^m.C_n^k$$

Suy ra: $\sum\limits_{m=0}^{k} C_n^m C_{n-m}^{k-m} = \sum\limits_{m=0}^{k} C_k^m C_n^k = C_n^k \sum\limits_{m=0}^{k} C_k^m = 2^k.C_n^k$.

11. Chứng minh rằng các đẳng thức sau:

a). $A_n^k - A_{n-1}^k = k.A_{n-1}^{k-1}$ với $n,k \in N^*, n \ge 2, k \le n-1$.

b). $\dfrac{n+1}{n+2}\left[\dfrac{1}{C_{n+1}^k} + \dfrac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right] = \dfrac{1}{C_n^k}$ với $n,k \in N^*, k \le n$.

LỜI GIẢI

a. Ta có:

$$A_n^k - A_{n-1}^k = \frac{n!}{(n-k)!} - \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!}\left(\frac{n}{n-k} - 1\right) = k\frac{(n-1)!}{(n-k)!} = k.A_{n-1}^{k-1}.$$

b. Ta có: $\dfrac{n+1}{n+2}\left(\dfrac{1}{C_{n+1}^k} + \dfrac{1}{C_{n+1}^{k+1}}\right) = \dfrac{n+1}{n+2}.\dfrac{k!(n+1-k)! + (k+1)!(n-k)!}{(n+1)!}$

$$= \frac{1}{n+2}.\frac{k!(n-k)!}{n!}\left[(n+1-k) + (k+1)\right] = \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{1}{C_n^k}.$$

12. Chứng minh rằng các đẳng thức sau:

a). $C_n^1...C_n^{n-1} \le \left(\dfrac{2^n - 1}{n}\right)^n$ với $n \in N^*, n \ge 2$.

b). $C_{2n+k}^n.C_{2n-k}^n \le \left(C_{2n}^n\right)^2$ với $\forall n,k \in Z$ và $0 \le k \le n$.

LỜI GIẢI

a. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho n số, ta có:

$$C_n^0C_n^1...C_n^{n-1} \le \left(\frac{C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n - C_n^n}{n}\right)^n = \left(\frac{2^n - 1}{n}\right)^n$$

b. Ta đặt $a_k = C_{2n+k}^n.C_{2n-k}^n \Rightarrow \begin{cases} a_k = \dfrac{(2n+k)!}{n!(n+k)!}.\dfrac{(2n-k)!}{n!(n-k)!} \\ a_{k+1} = \dfrac{(2n+k+1)!}{n!(n+k+1)}.\dfrac{(2n-k-1)!}{n!(n-k-1)!} \end{cases}$

Để chứng minh BĐT trên ta chứng minh $a_k > a_{k+1}, \forall k \in Z, 0 \le k \le n$

Ta có: $a_k > a_{k+1} \Leftrightarrow \dfrac{(2n+k)!}{n!(n+k)!}.\dfrac{(2n-k)!}{n!(n-k)!} > \dfrac{(2n+k+1)}{n!(n+k+1)}.\dfrac{(2n-k-1)!}{n!(n-k-1)!}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2n-k}{n-k} > \dfrac{2n+k+1}{n+k+1} \Leftrightarrow 1 + \dfrac{n}{n-k} > 1 + \dfrac{n}{n+k+1}$

$\Rightarrow a_0 > a_1 > ... > a_k > a_{k+1} \Rightarrow a_0 > a_k \Rightarrow C_{2n+k}^n.C_{2n-k}^n \le \left(C_{2n}^n\right)^2$.

13. Chứng minh các đẳng thức sau:

$2C_n^k + 5C_n^{k+1} + 4C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+2}^{k+2} + C_{n+3}^{k+3}$.

$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + ... + C_k^{k-1} + C_{k-1}^{k-1}, 1 \le k \le n$.

$C_n^1 + 2\dfrac{C_n^2}{C_n^1} + 3\dfrac{C_n^3}{C_n^2} + ... + n\dfrac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = C_{n+1}^2$.

$P_n = 1 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + ... + (n+1)P_{n-1}$.

LỜI GIẢI

Ta có: $VT = 2\left(C_n^k + C_n^{k+1}\right) + 3\left(C_n^{k+1} + C_n^{k+2}\right) + C_n^{k+2} + C_n^{k+3}$

$2\left(C_{n+1}^{k+1} + C_{n+1}^{k+2}\right) + C_{n+1}^{k+2} + C_{n+2}^{k+3} = C_{n+2}^{k+2} + C_{n+2}^{k+2} + C_{n+2}^{k+3} = C_{n+2}^{k+2} + C_{n+3}^{k+3}$.

Ta có: $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k \Rightarrow C_{n-1}^{k-1} = C_n^k - C_{n-1}^k$

Suy ra: $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + ... + C_{k+1}^{k-1} + C_k^{k-1} = C_n^k - C_k^k$

Hay $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + ... + C_k^{k-1} + C_{k-1}^{k-1}$ vì $C_k^k = C_{k-1}^{k-1} = 1$.

Ta có: $k.\dfrac{C_n^k}{C_n^{k-1}} = n - k + 1$

Suy ra $C_n^1 + 2\dfrac{C_n^2}{C_n^1} + 3\dfrac{C_n^3}{C_n^2} + ... + n\dfrac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = \dfrac{n(n-1)}{2} = C_{n+1}^2$.

Ta có: $P_k - P_{k-1} = k! - (k-1)! = (k-1)P_{k-1}$

Suy ra: $\sum_{k=2}^{n}(k-1)P_{k-1} = P_n - P_1 \Rightarrow P_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}kP_k$.

DẠNG 2: CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC DỰA VÀO KHAI TRIỂN $(1+x)^n$

Câu 10: Chứng minh : $C_n^k C_m^0 + C_n^{k-1} C_m^1 + C_n^{k-2} C_m^2 + \cdots + C_n^{k-m} C_m^m = C_{n+m}^k$,

với $\begin{cases} 0 \le m \le k \le n \\ k, m, n \in ¥ \end{cases}$

LỜI GIẢI

Ta có $\begin{cases} (1+x)^m = C_m^0 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + \cdots + C_m^m x^m \\ (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n \\ (1+x)^{m+n} = C_{m+n}^0 + C_{m+n}^1 x + C_{m+n}^2 x^2 + \cdots + C_{m+n}^{m+n} x^{m+n} \end{cases}$

Suy ra hệ số x^k trong $(1+x)^m (1+x)^n$ là : $C_m^0 C_n^k + C_n^1 C_n^{k-1} + \cdots + C_m^m C_n^{k-m}$, và hệ số của x^k trong $(1+x)^{m+n}$ là C_{m+n}^k

Ta có $(1+x)^m (1+x)^n = (1+x)^{m+n}$. Từ đó suy ra :

$C_n^k C_m^0 + C_n^{k-1} C_m^1 + C_n^{k-2} C_m^2 + \cdots + C_n^{k-m} C_m^m = C_{n+m}^k$ (đpcm) .

Kết quả bài này các bạn phải nhớ kỹ để áp dụng vào những bài tính tổng.

Bạn đọc hãy lấy ý tưởng trong bài tập trên áp dụng với khai triển $(1-x)^{n+m}$.

Từ đó chứng minh rằng $(C_{2n}^0)^2 - (C_{2n}^1)^2 + ... + (C_{2n}^{2n})^2 = (-1)^n . C_{2n}^n$.

Câu 11: Tính tổng $S = C_{20}^0 C_{12}^{11} + C_{20}^1 C_{12}^{10} + C_{20}^2 C_{12}^9 + \cdots + C_{20}^{10} C_{20}^1 + C_{20}^{11} C_{12}^0$

LỜI GIẢI

Ta có $(1+x)^{32} = (1+x)^{20} (1+x)^{12}$ (1)

Mà $(1+x)^{32} = C_{32}^0 + C_{32}^1 x + C_{32}^2 x^2 + \cdots + C_{32}^{32} x^{32}$.

Hệ số của x^{11} trong khai triển là C_{32}^{11} (2) .

Và $(1+x)^{20}(1+x)^{12} = (C_{20}^0 + C_{20}^1 x + C_{20}^2 x^2 + \cdots + C_{20}^{20} x^{20})(C_{12}^0 + C_{12}^1 x + C_{12}^2 x^2 + \cdots + C_{12}^{12} x^{12})$. Hệ số của x^{11} trong khai triển là $C_{20}^0 C_{12}^{11} + C_{20}^1 C_{12}^{10} + C_{20}^2 C_{12}^9 + \cdots + C_{20}^{10} C_{20}^1 + C_{20}^{11} C_{12}^0$ (3)

Từ (1) , (2) , (3) ta có $S = C_{20}^0 C_{12}^{11} + C_{20}^1 C_{12}^{10} + C_{20}^2 C_{12}^9 + \cdots + C_{20}^{10} C_{20}^1 + C_{20}^{11} C_{12}^0 = C_{32}^{11}$

Câu 12: Chứng minh rằng với mọi cặp số nguyên k, n thỏa $(0 \le k \le n - 2013)$ ta có:

$C_{2013}^0 C_n^k + C_{2013}^1 C_n^{k+1} + C_{2013}^2 C_n^{k+2} + \cdots + C_{2013}^{2013} C_n^{k+2013} = C_{n+2013}^{k+2013}$

LỜI GIẢI

Ta có: $(1+x)^{n+2013} = (1+x)^{2013} (1+x)^n$ (1)

Ta có: $\begin{cases} (x+1)^{2013} = C_{2013}^0 x^{2013} + C_{2013}^1 x^{2012} + C_{2013}^2 x^{2011} + \cdots + C_{2013}^{2013} \\ (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots C_n^k x^k + \cdots + C_n^n x^n \\ (1+x)^{n+2013} = C_{n+2013}^0 + C_{n+2013}^1 x + \cdots + C_{n+2013}^{k+2013} x^{k+2013} + \cdots + C_{n+2013}^{n+2013} x^{n+2013} \end{cases}$

Hệ số của x^{k+2013} trong khai triển $(1+x)^{2013}(1+x)^n$ là:

$$C_{2013}^0C_n^k + C_{2013}^1C_n^{k+1} + C_{2013}^2C_n^{k+2} + \cdots + C_{2013}^{2013}C_n^{k+2013} \quad (2)$$

Hệ số của x^{k+2013} trong khai triển $(1+x)^{n+2013}$ là: C_{n+2013}^{k+2013} (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $C_{2013}^0C_n^k + C_{2013}^1C_n^{k+1} + C_{2013}^2C_n^{k+2} + \cdots + C_{2013}^{2013}C_n^{k+2013} = C_{n+2013}^{k+2013}$

Câu 13: Chứng minh đẳng thức sau:

$C_{11}^0a_0 - C_{11}^1a_1 + C_{11}^2a_2 - C_{11}^3a_3 + ... + C_{11}^{10}a_{10} - C_{11}^{11}a_{11} = 11$

LỜI GIẢI

Xét $x \neq 1$ từ khai triển trên nhân hai vế với $(x-1)^{11}$ ta có:

$(x^{11}-1)^{11} = (x-1)^{11}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{110}x^{110})$ (2)

$VT(2) = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k x^{11k}(-1)^{11-k}$ $\Rightarrow$ Hệ số của x^{11} trong vế trái bằng $C_{11}^1 = 11$.

$VP(2) = \left(\sum_{k=0}^{11} C_{11}^k x^{11-k}(-1)^k\right)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{110}x^{110})$

$\Rightarrow$ Hệ số của x^{11} trong vế phải bằng

$$C_{11}^0a_0 - C_{11}^1a_1 + C_{11}^2a_2 - C_{11}^3a_3 + ... + C_{11}^{10}a_{10} - C_{11}^{11}a_{11}$$

Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh

Câu 14: Chứng minh rằng : $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + ... + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$

LỜI GIẢI

Ta có $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$

Ta có $(1+x)^n(1+x)^n = (C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1} + ... + C_n^n)(C_n^0 + C_n^1x + ... + C_n^nx^n)$

Hệ số của x^n trong hệ thức trên là: $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^n)^2$

Hệ số của x^n trong khai triển $(1+x)^{2n}$ là C_{2n}^2.

Ta có hệ số của x^n trong khai triển $(1+x)^n(1+x)^n$ và hệ số của x^n trong khai triển $(1+x)^{2n}$ giống nhau.

Từ đó suy ra $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + ... + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$ (đpcm).

1. Chứng minh: $C_{2n}^0 + C_{2n}^2.3^2 + C_{2n}^4.3^4 + ... + C_{2n}^{2n}.3^{2n} = 2^{2n-1}(2^{2n}+1)$

LỜI GIẢI

Ta có $(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1x + C_{2n}^2x^2 + \cdots + C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1} + C_{2n}^{2n}x^{2n}$ (1)

Chọn x = 3 thay vào hai vế của (1) ta được:

$4^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1.3^1 + C_{2n}^2.3^2 + ... + C_{2n}^{2n-1}.3^{2n-1} + C_{2n}^{2n}.3^n$ (2)

Chọn $x=-3$ thay vào hai vế của (1) ta được:

$2^{2n}=C_{2n}^0-C_{2n}^1.3^1+C_{2n}^2.3^2+...-C_{2n}^{2n-1}.3^{2n-1}+C_{2n}^{2n}.3^n$ (3)

Lấy (2) + (3) ta được: $4^{2n}+2^{2n}=2\left(C_{2n}^0+C_{2n}^2.3^2+C_{2n}^4.3^4+...+C_{2n}^{2n}.3^{2n}\right)$

$$\Rightarrow C_{2n}^0+C_{2n}^2.3^2+C_{2n}^4.3^4+...+C_{2n}^{2n}.3^{2n}=\frac{4^{2n}+2^{2n}}{2}=\frac{\left(2^{2n}\right)^2+2^{2n}}{2}$$

$$=\frac{2^{2n}\left(2^{2n}+1\right)}{2}=2^{2n-1}\left(2^{2n}+1\right)$$

2. Với n là số nguyên dương, hãy chứng minh các hệ thức sau:

a. $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=2^n$

b. $C_{2n}^1+C_{2n}^3+C_{2n}^5+...+C_{2n}^{2n-1}=C_{2n}^0+C_{2n}^2+C_{2n}^4+...+C_{2n}^{2n}$

LỜI GIẢI

a. Ta có: $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^nx^n$ (1)

Chọn $x=1$ thay vào (1) ta được: $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=2^n$ (đpcm)

b. Ta có: $(1-x)^{2n}=C_{2n}^0-C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2-C_{2n}^3x^3+...+C_{2n}^{2n}x^{2n}$ (2)

Chọn $x=1$ thay vào (2), ta được: $C_{2n}^0-C_{2n}^1+C_{2n}^2-C_{2n}^3+...+C_{2n}^{2n}=0$

$\Leftrightarrow C_{2n}^0+C_{2n}^2+\cdots+C_{2n}^{2n}=C_{2n}^1+C_{2n}^3+\cdots+C_{2n}^{2n-1}$ (đpcm).

3. Chứng minh rằng:

$$C_{2001}^0+3^2C_{2001}^2+3^4C_{2001}^4+...+3^{2000}C_{2001}^{2000}=2^{2000}(2^{2001}-1)$$

LỜI GIẢI

Ta có: $\left(1+x\right)^{2001}=C_{2001}^0+C_{2001}^1x+C_{2001}^2x^2+\cdots+C_{2001}^{2000}x^{2000}+C_{2001}^{2001}x^{2001}$ (1).

Thay $x=3$ vào hai vế của (1):

$4^{2001}=C_{2001}^0+3C_{2001}^1+3^2C_{2001}^2+...3^{200}C_{2001}^{2000}+3^{2001}C_{2001}^{2001}$ (*).

Thay $x=-3$ vào hai vế của (1):

$\left(-2\right)^{2001}=C_{2001}^0-3C_{2001}^1+3^2C_{2001}^2+...+3^{200}C_{2001}^{2000}-3^{2001}C_{2001}^{2001}$ (**).

Lấy (*) + (**), ta được:

$4^{2001}-2^{2001}=2\left(C_{2001}^0+3^2C_{2001}^2+3^4C_{2001}^4+...+3^{2000}C_{2001}^{2000}\right)$

$\Leftrightarrow C_{2001}^0+3^2C_{2001}^2+3^4C_{2001}^4+...+3^{2000}C_{2001}^{2000}=2^{2000}(2^{2001}-1)$ (đpcm).

6. Chứng minh: $C_n^03^n-C_n^13^{n-1}+...+(-1)^nC_n^n=C_n^0+C_n^1+...+C_n^n$

LỜI GIẢI

Theo khai triển nhị thức Newton ta có: $(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+...+C_n^nb^n$ (*)

- Với $a=3,b=-1$ thay vào (*) được:

$C_n^03^n-C_n^13^{n-1}+...+(-1)^nC_n^n=\left(3-1\right)^n=2^n$ (1)

- Với $a = 1, b = 1$ thay vào (*) được:

  $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$ (2)

  Từ (1) và (2) suy ra $C_n^0 3^n - C_n^1 3^{n-1} + ... + (-1)^n C_n^n = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n$

8. Với n, k là các số nguyên dương và $1 \le k \le n$, chứng minh rằng

$$C_n^0.C_n^k - C_n^1.C_{n-1}^{k-1} + C_n^2.C_{n-2}^{k-2} - ... + (-1)^k.C_n^k.C_{n-k}^0 = 0.$$

LỜI GIẢI

Với mọi x và k là số nguyên dương , ta có

$(1+x)^k = C_k^0 + C_k^1.x + C_k^2.x^2 + ... + C_k^k.x^k.$

$\Leftrightarrow C_n^k(1+x)^k = C_k^0.C_n^k + C_k^1.C_n^k.x + C_k^2.C_n^k.x^2 + ... + C_k^k.C_n^k.x^k$ **(1)**

Ta có

$$C_k^m C_n^k = \frac{k!}{m!(k-m)!}.\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.\frac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!} = C_n^m C_{n-m}^{k-m}$$

Do đó **(1)** có dạng:

$C_n^k(1+x)^k = C_n^0.C_n^k + C_n^1.C_{n-1}^{k-1}.x + C_n^2.C_{n-2}^{k-2}.x^2 + ... + C_n^k.C_{n-k}^0.x^k$ **(2)**

Thay $x = -1$ vào **(2)**, ta được:

$0 = C_n^0.C_n^k - C_n^1.C_{n-1}^{k-1} + C_n^2.C_{n-2}^{k-2} - ... + (-1)^k.C_n^k.C_{n-k}^0 = 0$, đpcm.

15. Với n là số nguyên dương, chứng minh rằng:

$$C_n^0 + C_n^2 + ... = C_n^1 + C_n^3 + ... = 2^{n-1},$$

LỜI GIẢI

Ta có

$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^k + ...(1)$

$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^k C_n^k + ...(2).$

Suy ra:

$(1)+(2)$ ta được $2^n = 2(C_n^0 + C_n^2 + ...) \Leftrightarrow C_n^0 + C_n^2 + ... = 2^{n-1}.$

$(1)-(2)$ ta được $2^n = 2(C_n^1 + C_n^3 + ...) \Leftrightarrow C_n^1 + C_n^3 + ... = 2^{n-1}.$

TÌM n DỰA VÀO NHỊ THỨC NIUTƠN

3. Tìm số nguyên dương $n > 4$, biết rằng

$$2C_n^0 + 5C_n^1 + 8C_n^2 + \cdots + (3n+2)C_n^n = 1600$$

LỜI GIẢI

Xét số hạng tổng quát

$$\left(3k+2\right)C_n^k = 3k.C_n^k + 2.C_n^k = 3.k.\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!} + 2.C_n^k$$

$$= 3.n\frac{\left(n-1\right)!}{\left(k-1\right)!\left(n-1-\left(k-1\right)\right)!} + 2.C_n^k = 3nC_{n-1}^{k-1} + 2.C_n^k$$

Giả thuyết $\Leftrightarrow 3n\left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \cdots + C_{n-1}^{n-1}\right) + 2\left(C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n\right) = 1600$

$\Leftrightarrow 3n\left(1+1\right)^{n-1} + 2\left(1+1\right)^n = 1600 \Leftrightarrow 3n.2^{n-1} + 2.2^n = 1600 \Leftrightarrow 2^{n-1}\left(3n+4\right) = 1600$ Chia hai vế cho 16 ta được :

$$2^{n-5}\left(3n+4\right) = 100 \Leftrightarrow 2^{n-5}\left(3n+4\right) = 2^2.25 \Leftrightarrow \begin{cases} n-7=2 \\ 3n+4=25 \end{cases} \Leftrightarrow n=7$$

7. Cho khai triển nhị thức:

$$\left(2^{\frac{x-1}{2}} + 2^{\frac{-x}{3}}\right)^n = C_n^0\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^n + C_n^1\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-1}\left(2^{\frac{-x}{3}}\right) + \cdots + C_n^{n-1}\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^{n-1} + C_n^n\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^n$$

(n là số nguyên dương). Biết rằng trong khai triển đó $C_n^3 = 5C_n^1$ và số hạng thứ tư bằng 20n. Tìm n và x.

LỜI GIẢI

Từ $C_n^3 = 5C_n^1$ ta có $n \ge 3$ và $\frac{n!}{3!(n-3)!} = 5\frac{n!}{(n-1)!} \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 5n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 28 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=-4 \\ n=7 \end{array}\right.$. Chọn $n = 7$.

Ta có số hạng thứ tư ứng với $k = 3$. Theo đề bài có: $C_7^3\left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^4\left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^3 = 140$

$\Leftrightarrow 35.2^{2x-2}.2^{-x} = 140 \Leftrightarrow 2^{x-2} = 4 \Leftrightarrow x-2 = 2 \Leftrightarrow x = 4$.

Kết luận $n = 7$ và $x = 4$.

8. Tìm số nguyên dương n sao cho: $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + ... + 2^n C_n^n = 243$

LỜI GIẢI

Ta có: $\left(1+x\right)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$ (1).

Thay $x = 1$ vào hai vế của (1) ta được: $3^n = C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + ... + 2^n C_n^n$

Theo đề bài có $3^n = 243 \Leftrightarrow n = 5$

9. Giả sử n là số nguyên dương và:

$(1 + x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots + a_nx^n$

Biết rằng tồn tại số k nguyên ($1 \le k \le n-1$) sao cho $\frac{a_{k-1}}{2} = \frac{a_k}{9} = \frac{a_{k+1}}{24}$. Hãy tìm n.

LỜI GIẢI

Ta có: $\frac{a_{k-1}}{2} = \frac{a_k}{9} = \frac{a_{k+1}}{24}$ (1) ($1 \le k \le n-1$) $\Leftrightarrow \frac{C_n^{k-1}}{2} = \frac{C_n^k}{9} = \frac{C_n^{k+1}}{24}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}=\frac{1}{9}\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{1}{24}\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

$\Leftrightarrow 2.(k-1)!(n-k+1)! = 9.k!(n-k)! = 24.(k+1)!(n-k-1)!$

$\Leftrightarrow 2.(n-k+1)(n-k) = 9.k(n-k) = 24.(k+1)k$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(n-k+1)=9k \\ 9(n-k)=24(k+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\dfrac{2n+2}{11} \\ k=\dfrac{3n-8}{11} \end{cases}$$

Để tồn tại k thoả mãn hệ thức (1), điều kiện ắt có và đủ là:

$$\frac{2n+2}{11}=\frac{3n-8}{11} \Leftrightarrow n=10$$

10. Với n là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $\left(x^2+1\right)^n\left(x+2\right)^n$. Tìm n để $a_{3n-3}=26n$.

LỜI GIẢI

Ta có $\left(x^2+1\right)^n\left(x+2\right)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\left(x^2\right)^k\sum\limits_{m=0}^{n}C_n^m 2^{n-m}.x^m=\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{m=0}^{n}C_n^kC_n^m.2^{n-m}.x^{2k+m}$

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} 2k+m=3n-3 \\ 0\le k,m\le n;\ k,m\in \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=n \\ m=n-3 \end{cases} \vee \begin{cases} k=n-1 \\ m=n-1 \end{cases}$

Vậy hệ số của x^{3n-3} là: $a_{3n-3}=C_n^nC_n^{n-3}2^3+C_n^{n-1}C_n^{n-1}2^1$

Theo đề bài ta có:

$$C_n^nC_n^{n-3}2^3+C_n^{n-1}C_n^{n-1}2^1=26n \Leftrightarrow 8.\frac{n!}{(n-3)!3!}+2.\left(\frac{n!}{(n-1)!}\right)^2=26n$$

$$\Leftrightarrow \frac{4n(n-1)(n-2)}{3}+2n^2=26n \Leftrightarrow \begin{cases} 4n^2-6n-70=0 \\ n\ge 3, n\in\mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow n=5$$

13. Tìm số tự nhiên n thoả mãn đẳng thức sau:

$$C_{2n}^0+C_{2n}^2 3^2+\ldots+C_{2n}^{2k}3^{2k}+\ldots+C_{2n}^{2n-2}3^{2n-2}+C_{2n}^{2n}3^{2n}=2^{15}(2^{16}+1)$$

LỜI GIẢI

Ta có: $4^{2n}=(1+3)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1 3^1+C_{2n}^2 3^2+\ldots+C_{2n}^{2n-1}3^{2n-1}+C_{2n}^{2n}3^{2n}$ (1)

$2^{2n}=(1-3)^{2n}=C_{2n}^0-C_{2n}^1 3^1+C_{2n}^2 3^2-\ldots-C_{2n}^{2n-1}3^{2n-1}+C_{2n}^{2n}3^{2n}$ (2)

Lấy $(1)+(2)\Leftrightarrow 4^{2n}+2^{2n}=2\left(C_{2n}^0+C_{2n}^2 3^2+\ldots+C_{2n}^{2n}3^{2n}\right)$

$$\Rightarrow C_{2n}^0+C_{2n}^2 3^2+\ldots+C_{2n}^{2n}3^{2n}=\frac{4^{2n}+2^{2n}}{2}$$

Theo đề bài có: $2.2^{15}\left(2^{16}+1\right)=4^{2n}+2^{2n}\Leftrightarrow\left(2^{16}\right)^2+2^{16}=\left(2^{2n}\right)^2+2^{2n}$

$$\Leftrightarrow\left[\left(2^{16}\right)^2-\left(2^{2n}\right)^2\right]+\left(2^{16}-2^{2n}\right)=0\Leftrightarrow\left(2^{16}-2^{2n}\right)\left(2^{16}+2^{2n}\right)+\left(2^{16}-2^{2n}\right)=0$$

$\Leftrightarrow \left(2^{16}-2^{2n}\right)\left(2^{16}+2^{2n}+1\right)=0 \Leftrightarrow \left(2^{16}-2^{2n}\right)=0$ (vì $2^{16}+2^{2n}+1>0\ \forall n$)

$2n=16 \Leftrightarrow n=8$

14. Tính giá trị của biểu thức: $M=\dfrac{A_{n+1}^4+3A_n^3}{(n+1)!}$.

Biết $C_{n+1}^2+2C_{n+2}^2+2C_{n+3}^2+C_{n+4}^2=149.$

LỜI GIẢI

Điều kiện: $n \geq 3$.

Ta có: $C_{n+1}^2+2C_{n+2}^2+2C_{n+3}^2+C_{n+4}^2=149$

$\Leftrightarrow \dfrac{(n+1)!}{2!(n-1)!}+2\dfrac{(n+2)!}{2!n!}+2\dfrac{(n+3)!}{2!(n+1)!}+\dfrac{(n+4)!}{2!(n+2)!}=149$

$\dfrac{(n+1)n}{2}+\dfrac{2(n+2)(n+1)}{2}+\dfrac{2(n+3)(n+2)}{2}+\dfrac{(n+4)(n+3)}{2}=149$

$\Leftrightarrow n^2+4n-45=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=5 \\ n=-9 \end{array}\right.$. So với điều kiện nhận $n=5$.

Vậy: $M=\dfrac{A_{n+1}^4+3A_n^3}{(n+1)!}=\dfrac{A_6^4+3A_5^3}{6!}=\dfrac{3}{4}$

15. Tìm $n \in N$ sao cho: $C_{4n+2}^0+C_{4n+2}^2+C_{4n+2}^4+\ldots+C_{4n+2}^{2n}=256$

LỜI GIẢI

Ta có: $C_{4n+2}^0+C_{4n+2}^1+C_{4n+2}^2+\ldots+C_{4n+2}^{4n+2}=2^{4n+2}$

$C_{4n+2}^0+C_{4n+2}^2+C_{4n+2}^4+\ldots+C_{4n+2}^{4n+2}=2^{4n+1}$

$C_{4n+2}^0+C_{4n+2}^2+C_{4n+2}^4+\ldots+C_{4n+2}^{2n}=2^{4n}$

Vậy có: $2^{4n}=256 \Leftrightarrow n=2$

16. Với $n \in ¥, n \geq 3$. Tìm n thỏa $\dfrac{1}{C_3^3}+\dfrac{1}{C_4^3}+\dfrac{1}{C_5^3}+\ldots+\dfrac{1}{C_n^3}=\dfrac{89}{30}$

LỜI GIẢI

Ta có $C_k^3=\dfrac{k!}{3!(k-3)!}=\dfrac{k(k-1)(k-2)}{6} \Rightarrow \dfrac{1}{C_k^3}=\dfrac{6}{k(k-1)(k-2)}\,(k \geq 3)$

Ta lại có $\dfrac{1}{(k-1)(k-2)}-\dfrac{1}{k(k-1)}=\dfrac{2}{k(k-1)(k-2)}$

Đặt $f(k)=\dfrac{1}{(k-1)(k-2)} \Rightarrow \dfrac{1}{C_k^3}=3\left[f(k)-f(k+1)\right]$.

Cho k chạy từ 3 đến n ta được:

$\sum_{k=3}^{n}\dfrac{1}{C_k^3}=3\left[f(3)-f(4)+(4)-f(5)+\cdots-f(n)+f(n)-f(n+1)\right]$

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{C_k^3}=3\left[f(3)-f(n+1)\right]=3\left(1-\frac{1}{n(n-1)}\right)=\frac{3(n^2-n-1)}{n^2-n}$$

Hay $\frac{1}{C_3^3}+\frac{1}{C_4^3}+\frac{1}{C_5^3}+...+\frac{1}{C_n^3}=\frac{3(n^2-n-1)}{n^2-n}\Leftrightarrow\frac{3(n^2-n-1)}{n^2-n}=\frac{89}{30}$

$\Leftrightarrow n^2-n-90=0\Leftrightarrow n=10$

17. Tìm số nguyên dương n thỏa

$$(n+1)\left(C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\frac{1}{4}C_n^3+\cdots+\frac{1}{n+1}C_n^n\right)=1023\ (1)$$

LỜI GIẢI

$(1)\Leftrightarrow C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\frac{1}{4}C_n^3+\cdots+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{1023}{n+1}$

Xét số hạng tổng quát: $\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{1}{n+1}\frac{(n+1)n!}{(k+1)k!(n-k)!}$

$=\frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)!\left[(n+1)-(k+1)\right]!}=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}, \forall k, 0\le k\le n, k\in ¥$.

Vậy $C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\frac{1}{4}C_n^3+\cdots+\frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+\cdots+C_{n+1}^{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)$

Theo đề bài ta có:

$\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)=\frac{1023}{n+1}\Leftrightarrow 2^{n+1}-1=1023\Leftrightarrow 2^{n+1}=1024\Leftrightarrow n+1=10\Leftrightarrow n=9$

18. Khai triển nhị thức Niu tơn $P(x)=(1-6x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$.

Tính giá trị của biểu thức $T=a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}$, biết rằng n là số nguyên dương thỏa mãn $2C_n^2-8C_n^1=n$.

LỜI GIẢI

$2C_n^2-8C_n^1=n\ (1)$. Điều kiện $n\ge 2, n\in ¥$

$(1)\Leftrightarrow 2\frac{n!}{2!(n-2)!}-8\frac{n!}{(n-1)!}=n\Leftrightarrow n(n-1)-8n=n\Leftrightarrow n=10$

Chọn $x=\frac{1}{2}$ thay vào P(x): $(1-3)^{10}=a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_{10}}{2^{10}}\Leftrightarrow T=2^{10}$

TÍNH TỔNG: DỰA VÀO CÔNG THỨC NHỊ THỨC NIU TƠN

DẠNG 1: TÍNH TỔNG DỰA VÀO CÔNG THỨC $(a+b)^n, (1+x)^n$

3. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a). $S_1=2^nC_n^0+2^{n-2}C_n^2+2^{n-4}C_n^4+...+C_n^n$.

b). $S_2=2^{n-1}C_n^1+2^{n-3}C_n^3+2^{n-5}C_n^5+...+C_n^n$.

LỜI GIẢI

Ta có: $(2+1)^n = 2^n C_n^0 + 2^{n-1}C_n^{n-1} + 2^{n-2}C_n^{n-2} + 2^{n-3}C_n^{n-3} + \cdots + C_n^n$ (1).

Ta có: $(2-1)^n = 2^n C_n^0 - 2^{n-1}C_n^{n-1} + 2^{n-2}C_n^{n-2} - 2^{n-3}C_n^{n-3} + \cdots + (-1)^n C_n^n$ (2).

Suy ra

•$(1)+(2)$ ta được $S_1 = 2^n C_n^0 + 2^{n-2}C_n^2 + 2^{n-4}C_n^4 + \ldots + C_n^n = \dfrac{3^n+1}{2}$.

•$(1)-(2)$ ta được $S_2 = 2^{n-1}C_n^1 + 2^{n-3}C_n^3 + 2^{n-5}C_n^5 + \ldots + C_n^n = \dfrac{3^n-1}{2}$.

6. Tính tổng : $S = C_{2012}^0 + 2C_{2012}^1 + 3C_{2012}^2 + 4C_{2012}^3 + \cdots + 2013C_{2012}^{2012}$

LỜI GIẢI

Ta có:

$$(k+1)C_{2012}^k = kC_{2012}^k + C_{2012}^k = k.\frac{2012!}{k!(2012-k)!} + C_{2012}^k = 2012\frac{2011!}{(k-1)!(2011-(k-1))!} + C_{2012}^k$$

$= 2012C_{2011}^{k-1} + C_{2012}^k \forall k = 0,1,2,\ldots,2012$.

$$S = 2012\left(C_{2011}^0 + C_{2011}^1 + \cdots + C_{2011}^{2011}\right) + \left(C_{2012}^0 + C_{2012}^1 + \cdots + C_{2012}^{2012}\right)$$

$$S = 2012(1+1)^{2011} + (1+1)^{2012} = 2012.2^{2011} + 2^{2012} = 1007.2^{2012}$$

7. Tính tổng $S = 1^2.C_{2013}^1 + 2^2.C_{2013}^2 + 3^2.C_{2013}^3 + \ldots + 2013^2.C_{2013}^{2013}$

LỜI GIẢI

Số hạng tổng quát là : $a_k = k^2.C_{2013}^k = k(k-1+1)C_{2013}^k \ \forall k = 2,3,\ldots,2013$

$$a_k = k(k-1)C_{2013}^k + kC_{2013}^k = k(k-1).\frac{2013!}{k!(2013-k)!} + k.\frac{2013!}{k!(2013-k)!} \ \forall k = 2,3,\ldots,2013$$

$a_k = 2012.2013C_{2011}^{k-2} + 2013C_{2011}^{k-1} \ \forall k = 2,3,\ldots,2013$.

$$S_1 = 2012.2013\left(C_{2011}^0 + C_{2011}^1 + C_{2011}^2 + \ldots + C_{2011}^{2011}\right) + 2013\left(C_{2011}^0 + C_{2011}^1 + C_{2011}^2 + \ldots + C_{2012}^{2012}\right)$$

$$S_1 = 2012.2013(1+1)^{2011} + 2013(1+1)^{2012} = 2012.2013.2^{2011} + 2013.2^{2012} = 2013.2014.2^{2011}$$

8. Tính tổng $S = 1^2.C_n^1 + 2^2.C_n^2 + 3^2.C_n^3 + \ldots + n^2.C_n^n$

LỜI GIẢI

Áp dụng công thức: $k^2C_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2} + nC_{n-1}^{k-1}, \ \forall k = 2,3,4,\ldots,n$ (đã chứng minh ở phần Chứng Minh đẳng thức

$$\text{Ta có } \begin{cases} 1^2C_n^1 = 0 \qquad\qquad + nC_{n-1}^0 \\ 2^2C_n^2 = n(n-1)C_{n-2}^0 + nC_{n-1}^1 \\ \ldots \\ n^2C_n^n = n(n-1)C_{n-2}^{n-2} + nC_{n-1}^{n-1} \end{cases}$$

Cộng vế theo vế ta được:

$$1^2.C_n^1+2^2.C_n^2+3^2.C_n^3+...+n^2.C_n^n=n(n-1)\left(C_{n-2}^0+C_{n-2}^1+\cdots+C_{n-2}^{n-2}\right)+n\left(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+\cdots+C_{n-1}^{n-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1^2.C_n^1+2^2.C_n^2+3^2.C_n^3+...+n^2.C_n^n=n(n-1).2^{n-2}+n.2^{n-1}=n(n+1).2^{n-2}$$

9. Tính tổng $S=\dfrac{C_{2013}^0}{1}+\dfrac{C_{2013}^1}{2}+\dfrac{C_{2013}^2}{3}+\cdots+\dfrac{C_{2013}^{2013}}{2014}$

LỜI GIẢI

Số hạng tổng quát của tổng là $a_k=\dfrac{C_{2013}^k}{k+1}\ \forall k=0,1,2,...,2013$

$$a_k=\frac{C_{2013}^k}{k+1}=\frac{2013!}{(k+1)k!(2013-k)!}=\frac{1}{2014}.\frac{2014!}{(k+1)!(2013-k)!}$$

$$=\frac{1}{2014}.\frac{2014!}{(k+1)!(2013-k)!}=\frac{1}{2014}.\frac{2014!}{(k+1)!(2014-(k+1))!}==\frac{C_{2014}^{k+1}}{2014}\quad \forall k=0,1,2,...,2013$$

Vậy ta được $a_k=\dfrac{C_{2014}^{k+1}}{2014}\ \forall k=0,1,2,...,2013$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2014}\left(C_{2014}^1+C_{2014}^2+\cdots+C_{2014}^{2014}\right)=\frac{1}{2014}\left[(1+1)^{2014}-C_{2014}^0\right]=\frac{2^{2014}-1}{2014}$$

10. Tính tổng $S=C_n^0+\dfrac{1}{2}.C_n^1+\dfrac{1}{3}.C_n^2+\cdots+\dfrac{1}{n}.C_n^{n-1}+\dfrac{1}{n+1}.C_n^n\ \left(n\in ¥\ *\right)$

LỜI GIẢI

Xét số hạng tổng quát:

$$a_k=\frac{1}{k+1}.C_n^k=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)n!}{(k+1)k!.(n-k)!}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{(k+1)!\left[(n+1)-(k+1)\right]!}=\frac{1}{n+1}.C_{n+1}^{k+1}.$$

Vậy $a_k=\dfrac{1}{k+1}.C_n^k=\dfrac{1}{n+1}.C_{n+1}^{k+1}$ (1).

Từ (1) ta có:

$$C_n^0=\frac{1}{n+1}.C_{n+1}^1;\ \frac{1}{2}C_n^1=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^2;\ \frac{1}{3}C_n^1=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^3;...;\ \frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}.$$

Vậy $S=\dfrac{1}{n+1}.C_{n+1}^1+\dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^2+\dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^3+\cdots+\dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$

$$=\frac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+C_{n+1}^3+\cdots+C_{n+1}^{k+1}\right)\Leftrightarrow(n+1).S=C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+C_{n+1}^3+\cdots+C_{n+1}^{k+1}$$

$$(n+1).S+1=C_{n+1}^0+C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+C_{n+1}^3+\cdots+C_{n+1}^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow(n+1).S+1=2^{n+1}\Leftrightarrow S=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

11. Tính tổng $S=\dfrac{C_{12}^{12}}{11.12}+\dfrac{C_{13}^{12}}{12.13}+\dfrac{C_{14}^{12}}{13.14}+\cdots+\dfrac{C_{2013}^{12}}{2012.2013}+\dfrac{C_{2014}^{12}}{2013.2014}$

LỜI GIẢI

Ta có số hạng tổng quát:

$$\frac{C_n^{12}}{(n-1)n}=\frac{n!}{(n-1)n.12!(n-12)!}=\frac{(n-2)!}{12!(n-12)!}=\frac{1}{11.12}.\frac{(n-2)!}{10!.(n-2-10)!}=\frac{1}{11.12}.C_{n-2}^{10}$$

$\forall n=\overline{12,12,...,2014}$

Từ đó ta có $S=\frac{1}{11.12}\left(C_{10}^{10}+C_{11}^{10}+C_{12}^{10}+\cdots+C_{2011}^{10}+C_{2012}^{10}\right)$

Áp dụng công thức $C_h^{i-1}+C_h^{i}=C_{h+1}^{i}\forall i=\overline{1,h}$; $i,h\in ¥$ ta được

$$S=\frac{1}{132}\left(C_{10}^{10}+C_{12}^{11}-C_{11}^{11}+C_{13}^{11}-C_{12}^{11}+\cdots+C_{2013}^{11}-C_{2012}^{11}\right)=\frac{1}{132}C_{2013}^{11}$$

12. Tính tổng: $S=\frac{-C_n^1}{2.3}+\frac{2C_n^2}{3.4}-\frac{3C_n^3}{4.5}+...+\frac{(-1)^n nC_n^n}{(n+1)(n+2)}$.

LỜI GIẢI

Ta có $\frac{C_n^k}{k+1}=\frac{n!}{k!(k+1)(n-k)!}=\frac{1}{n+1}.\frac{(n+1)!}{(k+1)!\left[(n+1)-(k+1)\right]!}=\frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$ (3)

Áp dụng 2 lần công thức (3) ta được: $\frac{(-1)^k kC_n^k}{(k+1)(k+2)}=\frac{(-1)^k kC_{n+2}^{k+2}}{(n+1)(n+2)}$.

Cho k chạy từ 1 đến n rồi cộng vế các đẳng thức trên ta có

$$(n+1)(n+2)S=-C_{n+2}^3+2C_{n+2}^4-3C_{n+2}^5+...+(-1)^n nC_{n+2}^{n+2}$$

$$=-\left(C_{n+1}^2+C_{n+1}^3\right)+2\left(C_{n+1}^3+C_{n+1}^4\right)-3\left(C_{n+1}^4+C_{n+1}^5\right)+...+(-1)^n nC_{n+1}^{n+1}$$

$$=-C_{n+1}^2+C_{n+1}^3-C_{n+1}^4+...+(-1)^n C_{n+1}^{n+1}$$

$$=C_{n+1}^0-C_{n+1}^1-\left(C_{n+1}^0-C_{n+1}^1+C_{n+1}^2-C_{n+1}^3+C_{n+1}^4-C_{n+1}^5+...+(-1)^{n+1}C_{n+1}^{n+1}\right)$$

$$=1-(n+1)-(1-1)^{n-1}=-n$$

Vậy $S=\frac{-n}{(n+1)(n+2)}$.

12. Tính tổng : $T=C_{50}^0-C_{50}^1+C_{50}^2-....+C_{50}^{24}-C_{50}^{25}$.

LỜI GIẢI

Ta có : $C_{50}^0-C_{50}^1+C_{50}^2-C_{50}^3+...-C_{50}^{49}+C_{50}^{50}=(1-1)^{50}=0$

Mà : $C_{50}^0=C_{50}^{50}, C_{50}^1=C_{50}^{49}, ..., C_{50}^{24}=C_{50}^{26}$

Suy ra : $2C_{50}^0-2C_{50}^1+2C_{50}^2-2C_{50}^3+...+2C_{50}^{24}-C_{50}^{25}=0$

$\Rightarrow\quad 2T+C_{50}^{25}=0\Rightarrow T=-\frac{C_{50}^{25}}{2}$.

13. (CĐ Công nghiệp HN 2003) Cho đa thức: $P(x) = (16x - 15)^{2003}$. Khai triển đa thức đó dưới dạng: $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{2003}x^{2003}$. Tính tổng $S = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{2003}$.

LỜI GIẢI

Ta có: $(16x - 15)^{2003} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{2003}x^{2003}$ (1)

Thay x = 1 vào (1) ta được: $(16.1 - 15)^{2003} = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{2003}$.

Kết luận $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{2003} = 1$.

8. Tính tổng $S = 1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + 3.4.C_n^4 + ... + (n-1)n.C_n^n$ với $n \in N$ và $n > 2$.

LỜI GIẢI

Áp dụng công thức trên hai lần $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$

$\Leftrightarrow (k-1)kC_n^k = (k-1)nC_{n-1}^{k-1} = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$ suy ra $(k-1)kC_n^k = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$

Như vậy:

$$S = 1.2.C_n^2 + 2.3.C_n^3 + 3.4.C_n^4 + ... + (n-1)n.C_n^n$$

$$= n(n-1)\left[C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + .. + C_{n-2}^{n-2}\right] = n(n-1)2^{n-2}$$

9. Tính tổng $S = \frac{1}{2!.2012!} + \frac{1}{4!.2010!} + \cdots + \frac{1}{2012!.2!} + \frac{1}{2014!}$

LỜI GIẢI

Ta có $2014!S = \frac{2014!}{2!.2012!} + \frac{2014!}{4!.2010!} + \cdots + \frac{2014!}{2012!.2!} + \frac{2014!}{2014!}$

Theo công thức tổ hợp ta có $2014!S = C_{2014}^2 + C_{2014}^4 + \cdots + C_{2014}^{2012} + C_{2014}^{2014}$

Xét khai triển:

$$(1+x)^{2014} = C_{2014}^0 + C_{2014}^1x + C_{2014}^2x^2 + \cdots + C_{2014}^{2012}x^{2012} + C_{2014}^{2013}x^{2013} + C_{2014}^{2014}x^{2014}$$

Chọn $x = -1$ ta có $0 = C_{2014}^0 - C_{2014}^1 + C_{2014}^2 + \cdots + C_{2014}^{2012} - C_{2014}^{2013}x^{2013} + C_{2014}^{2014}$

$$\Leftrightarrow C_{2014}^0 + C_{2014}^2 + \cdots + C_{2014}^{2012} + C_{2014}^{2014} = C_{2014}^1 + C_{2014}^3 + \cdots + C_{2014}^{2013}x^{2013}$$

$$\Rightarrow C_{2014}^0 + C_{2014}^2 + \cdots + C_{2014}^{2012} + C_{2014}^{2014} = \frac{1}{2}\left(C_{2014}^0 + C_{2014}^1 + \cdots + C_{2014}^{2013}x^{2013} + C_{2014}^{2014}\right)$$

$$\Leftrightarrow C_{2014}^0 + C_{2014}^2 + \cdots + C_{2014}^{2012} + C_{2014}^{2014} = \frac{1}{2}.2^{2014} = 2^{2013}$$

$$\Rightarrow C_{2014}^2 + \cdots + C_{2014}^{2012} + C_{2014}^{2014} = 2^{2013} - 1$$

Vậy $S = \frac{2^{2013} - 1}{2014!}$