GIỚI HẠN HÀM SỐ LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1). Giới hạn của hàm số tại một điểm:

a). Giới hạn hữu hạn: Giả sử $(a;b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và f là một hàm số xác định trên tập hợp $(a;b)\setminus\{x_0\}$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong tập hợp $(a;b)\setminus\{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$. Khi đó ta viết: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ hoặc $f(x)\to L$ khi $x\to x_0$.

Nhận xét:

- Nếu $f(x) = c, \forall x\in\mathbb{R}$, trong đó c là hằng số thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} c = c$.
- Nếu $f(x) = x, \forall x\in\mathbb{R}$ thì $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

b). Giới hạn vô cực: Giả sử $(a;b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và f là một hàm số xác định trên tập hợp $(a;b)\setminus\{x_0\}$.

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) trog tập hợp $(a;b)\setminus\{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) trog tập hợp $(a;b)\setminus\{x_0\}$ mà $\lim x_n = x_0$ ta đều có $\lim f(x) = -\infty$.

2). Giới hạn của hàm số tại vô cực:

Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn là số thực L khi x dần tới $+\infty$ nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(a;+\infty)$ mà $\lim x_n = +\infty$ ta đều có $\lim f(x_n) = L$. Khi đó ta viết: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ hoặc $f(x)\to L$ khi $x\to+\infty$.

Các giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ được định nghĩa hoàn toàn tương tự.

Nhận xét:

Áp dụng định nghĩa giới hạn của hàm số, có thể chứng minh được rằng: Với mọi số nguyên dương k, ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} x^k = +\infty \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^k} = 0 \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^k} = 0$$

3). Một số định lí về giới hạn hữu hạn:

Định lí 1: Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = M$ (với $L, M\in\mathbb{R}$).Khi đó:

- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right] = L+M$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right] = L-M$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right] = L.M$
- Nếu $M\neq 0$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$

Hệ quả:

- Nếu c là một hằng số thì $\lim\limits_{x\to x_0}\left[c.f(x)\right] = c.L$.
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left(a.x^k\right) = ax_0^k$ (a hằng số và $k\in\mathbb{N}^+$).

Định lí 2: Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$. Khi đó:

- $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |L|$ • $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[3]{f(x)} = \sqrt[3]{L}$
- Nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in J \setminus \{x_0\}$, trong đó J là một khoảng nào đó chứa x_0, thì $L \geq 0$ và $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

Chú ý:
Định lí 1 và định lí 2 vẫn đúng khi thay $x \to x_0$ bởi $x \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$.

Định lí 3: (Định lí kẹp về giới hạn hàm số): giả sử J là một khoảng chứa x_0 và f, g, h là ba hàm số xác định trên tập hợp $J \setminus \{x_0\}$. Nếu $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ với mọi $x \in J \setminus \{x_0\}$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$.

Chú ý: Định lí 3 vẫn đúng khi thay $x \to x_0$ bởi $x \to +\infty$ (trong các trường hợp này thay tập hợp $J \setminus \{x_0\}$ bằng khoảng $(a; +\infty)$) hoặc $x \to -\infty$ (trong các trường hợp này thay tập hợp $J \setminus \{x_0\}$ bằng khoảng $(-\infty; a)$).

Định lí 4: Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = +\infty$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

4). Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cực:

Qui tắc 1: Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$ (với $L \neq 0$) thì $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)]$ được cho bởi bảng sau:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$	Dấu của L	$\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)]$
$+\infty$	+	$+\infty$
$+\infty$	−	$-\infty$
$-\infty$	+	$-\infty$
$-\infty$	−	$+\infty$

Quy tắc 2: Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L, (L \neq 0)$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ và $g(x) > 0$ hoặc $g(x) < 0$ với mọi $x \in (a; b) \setminus \{x_0\}$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ được cho bởi bảng sau:

Dấu của L	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
+	+	$+\infty$
+	−	$-\infty$
−	+	$-\infty$
−	−	$+\infty$

5). Các dạng vô định:

Các dạng vô định trường gặp: $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty - \infty$.

6). Giới hạn một bên:

a). Giới hạn hữu hạn:

$*$ Giới hạn bên phải: Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(x_0;b),(x_0 \in \mathbb{R})$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn bên phải là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(x_0;b)$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$. Khi đó ta viết:

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^+$.

$*$ Giới hạn bên trái: Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a;x_0),(x_0 \in \mathbb{R})$. Ta nói rằng hàm số f có giới hạn bên trái là số thực L khi x dần đến x_0 (hoặc tại điểm x_0) nếu với mọi dãy số (x_n) trong khoảng $(a;x_0)$ mà $\lim x_n = x_0$, ta đều có $\lim f(x_n) = L$. Khi đó ta viết:

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$ hoặc $f(x) \to L$ khi $x \to x_0^-$.

Định lí 5: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$

$*$ Giới hạn vô cực:

$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \ \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ được phát biểu tương tự như các định nghĩa ở phần giới hạn hữu hạn.

Định lí 5 vẫn đúng với giới hạn vô cực.

Các định lí về giới hạn hữu hạn và các quy tắc tìm giới hạn vô cực vẫn đúng trong trường hợp $x \to x_0^+$ hay $x \to x_0^-$.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

VẤN ĐỀ 1: TÌM GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ BẰNG ĐỊNH NGHĨA:

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN:

a). Để tìm $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ta làm như sau:

$*$ Xét dãy số (x_n) bất kỳ thuộc tập xác định D với $x_n \neq x_0$ mà $\lim x_n = x_0$

$*$ Tìm $\lim f(x_n)$:

- Nếu ta có $\lim f(x_n) = L$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.
- Nếu ta có $\lim f(x_n) = \pm\infty$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$.

b). Để tìm $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ta làm như sau :

$*$ Xét dãy số (x_n) bất kỳ thuộc tập xác định mà $\lim x_n = +\infty$.

$*$ Tìm $\lim f(x_n)$:

- Nếu ta có $\lim f(x_n) = L$ thì $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.
- Nếu ta có $\lim f(x_n) = \pm\infty$ thì $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$.

Hoàn toàn tương tự khi tính $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

c). Để chứng minh hàm số $f(x)$ không có giới hạn khi $x \to x_0$ ta thường làm như sau :

Chọn hai dãy số (u_n) và (v_n) cùng thuộc tập xác định của hàm số sao cho $u_n \geq x_0, v_n \geq x_0$ và có $\lim u_n = \lim v_n = x_0$.

Chứng minh $\lim f(u_n) \neq \lim f(v_n)$ hoặc một trong hai giới hạn này không tồn tại.

Khi đó theo định nghĩa ta suy ra hàm số không có giới hạn khi $x \to x_0$.

Đối với các trường hợp $x \to x_0^+, x \to x_0^-, x \to -\infty, x \to +\infty$ ta cũng làm tương tự.

CÁCH KHỬ DẠNG VÔ ĐỊNH $\frac{0}{0}$ (Dạng này thường gặp khi $x \to x_0$).

DẠNG 1: Hàm số $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $P(x), Q(x)$ là đa thức theo biến x.

PHƯƠNG PHÁP: Phân tích đa thức thành nhân tử, sau đó rút gọn biểu thức làm cả tử và mẫu bằng 0.
Phân tích đa thức thành nhân tử có các phương pháp sau:

- Sử dụng bảy hằng đẳng thức đáng nhớ.
- Nếu tam thức bậc hai thì sử dụng $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), (a \neq 0)$ với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.
- Sử dụng phương pháp Hoocner . Phép chia đa thức $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ cho $(x - x_0)$ theo sơ đồ Hoocner như sau:

	a	b	c	d	e
x_0	a	$b_1 = ax_0 + b$	$c_1 = ax_0^2 + bx_0 + c$	$d_1 = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d$	0

Hàng thứ nhất điền hệ số của đa thức $P(x)$ từ ô thứ hai đến ô cuối cùng. Ở hàng thứ hai ô đầu tiên điền giá trị x_0 là một nghiệm của $P(x)$, ô thứ hai viết lại a, lấy $(x_0.a + b)$ đặt vào ô thứ ba, lấy $x_0(x_0a + b) + c = ax_0^2 + bx_0 + c$ điền váo ô thứ tư, lấy $x_0(ax_0^2 + bx_0 + c) + d = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d$ điền vào ô thứ năm, lấy $x_0(ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d) + e = 0$ (bắt buộc tổng này phải bằng 0, thì đây mới là phép chia hết).

Khi đó $P(x)$ được viết lại

$$P(x) = (x - x_0)(ax^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1)$$

Ví dụ: Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 11x + 18}$ b). $L = \lim_{x \to 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3}$ c). $\lim_{x \to 1} \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$

d). $\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{12}{x^3 - 8}\right)$ e). $\lim_{x \to 1} \frac{1 - x^3}{x^4 - 4x^2 + 3}$ f). $\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\right)$

LỜI GIẢI

a).Ta có $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 + 2x + 4)$ (áp dụng hằng đẳng thức), và $x^2 + 11x + 18 = (x + 2)(x + 9)$ (với $x_1 = -2$ và $x_2 = -9$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 + 11x + 18 = 0$).

Do đó $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 11x + 18} = \lim_{x \to -2} \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{(x + 2)(x + 9)} = \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 2x + 4}{x + 9} = \frac{12}{7}$.

b). $L = \lim_{x \to 3} \frac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3}$

Thay $x=3$ vào cả tử và mẫu thấy đều bằng 0, nên $x=3$ là một nghiệm của hai đa thức cả mẫu và tử. Có nghĩa $(x-3)$ là nhân tử chung, ta phân tích đa thức ở tử và mẫu thành nhân tử bằng phương pháp Hoocner. Cách làm như sau:

Phân tích tử số: $2x^3-5x^2-2x-3=(x-3)(2x^2+x+1)$

Kẻ bảng như sau. Sau đó điền hệ số của từng số hạng với số mũ giảm dần vào các ô ở hàng đầu tiên với ô thứ nhất để trống. Ở hàng thứ hai: điền giá trị làm đa thức bằng 0 ở đây là chữ số 3. Ô thứ hai điền lại giá trị ở ô thứ hai của hàng một xuống (ta thường hay nói "đầu rơi xuống"), sau đó lấy $3.2+(-5)=1$ điền chữ số 1 vào ô thứ ba, lấy $3.1+(-2)=1$ điền chữ số 1 vào ô thứ tư, cuối cùng lấy $3.1+(-3)=0$ điền vào ô cuối cùng.

	2	-5	-2	-3
3	2	1	1	0

Phân tích mẫu số: $4x^3-13x^2+4x-3=(x-3)(4x^2-x+1)$

	4	-13	4	-3
3	4	-1	1	0

Do đó $L=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(2x^2+x+1)}{(x-3)(4x^2-x+1)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2+x+1}{4x^2-x+1}=\dfrac{11}{17}$.

c). $L=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^3+5x^2+4x+1}{x^3+x^2-x-1}$. Ta thấy $\lim\limits_{x\to-1}(2x^3+5x^2+4x+1)=0$ và $\lim\limits_{x\to-1}(x^3+x^2-x-1)=0$ như vậy đây là dạng giới hạn vô định $\dfrac{0}{0}$ ta phải phân tích cả tử và mẫu thành nhân tử để khử vô định. Phân tích nhân tử bằng phương pháp Hoocner

Phân tích tử số: $2x^3+5x^2+4x+1=(x+1)(2x^2+3x+1)$

	2	5	4	1
-1	2	3	1	0

Phân tích mẫu số: $x^3+x^2-x-1=(x+1)(x^2+0x-1)=(x+1)(x^2-1)$

	1	1	-1	-1
-1	1	0	-1	0

Từ đó $L=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(2x^2+3x+1)}{(x+1)(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+3x+1}{x^2-1}$, ta thấy $\lim\limits_{x\to-1}(2x^2+3x+1)=0$ và $\lim\limits_{x\to-1}(x^2-1)=0$ ta vẫn còn dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ nên phân tích thành nhân tử tiếp, ta làm như sau:

$$L=\lim_{x\to-1}\frac{2x^2+3x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(2x+1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to-1}\frac{2x+1}{x-1}=\frac{1}{2}.$$

d). Bước đầu tiên ta phải quy đồng mẫu, sau đó phân tích đa thức của tử thành nhân tử và rút gọn hạng tử vô định $L=\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)=\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{(x-2)(x^2+2x+4)}\right)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+2x-8}{(x-2)(x^2+2x+4)}$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to2}\frac{x+4}{x^2+2x+4}=\frac{1}{2}.$$

e). $L=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^3}{x^4-4x^2+3}$. Phân tích tử số $1-x^3=(1-x)(1+x+x^2)$. Phân tích mẫu số x^4-4x^2+3 $=x^4+0x^3-4x^2+0x^2+3$ bằng Hoocner:

	1	0	−4	0	3
1	1	1	−3	−3	0

Do đó $x^4-4x^2+3=(x-1)(x^3+x^2-3x-3)$

Từ đó $L=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)(1+x+x^2)}{(x-1)(x^3+x^2-3x-3)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-(1+x+x^2)}{x^3+x^2-3x-3}=\frac{3}{4}$.

f). $L=\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-5x+6}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2}{(x-1)(x-3)}=-2$.

DẠNG 2: Hàm số $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ trong đó $P(x),Q(x)$ là các biểu thức có chứa căn thức theo biến x.

PHƯƠNG PHÁP:

Bước 1: Nhân lượng liên hợp.

- $a^2-b^2=(a+b)(a-b)\to\left[\begin{array}{l}a-b=\dfrac{a^2-b^2}{a+b}\\ a+b=\dfrac{a^2-b^2}{a-b}\end{array}\right.$
- $a-b=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ • $a+b=\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$.
- $\sqrt[3]{a}-b=\frac{\left(\sqrt[3]{a}-b\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.b+b^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.b+b^2}=\frac{a-b^3}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.b+b^2}$.
- $\sqrt[3]{a}+b=\frac{\left(\sqrt[3]{a}+b\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.b+b^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.b+b^2}=\frac{a+b^3}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.b+b^2}$
- $a-\sqrt[3]{b}=\frac{\left(a-\sqrt[3]{b}\right)\left[a^2+a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{a^2+a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\frac{a^3-b}{a^2+a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$
- $a+\sqrt[3]{b}=\frac{\left(a+\sqrt[3]{b}\right)\left[a^2-a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{a^2-a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\frac{a^3+b}{a^2-a.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$
- $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\frac{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\frac{a-b}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$.

- $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\dfrac{a+b}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$

Bước 2: Phân tích đa thức thành nhân tử, sau đó rút gọn hạng tử chung của cả tử và mẫu.

Ví dụ 1: Tìm các giới hạn sau :

a). $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ b). $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ c). $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$

d). $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$ e). $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{1-x}}{x^4+x}$ f). $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}$.

g). $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+6}}{\sqrt{x+3}-2}$ h). $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}$

LỜI GIẢI

a). $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+3-2^2}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\dfrac{1}{4}$.

b). $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}=\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2^2-(x-3)}{(x^2-49)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=\lim\limits_{x\to7}\dfrac{7-x}{(x-7)(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=\lim\limits_{x\to7}\dfrac{-1}{(x+7)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=-\dfrac{1}{56}$.

c). $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\left(x^2-2x+6\right)-\left(x^2+2x-6\right)}{\left(x^2-4x+3\right)\left(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{-4(x-3)}{(x-1)(x-3)\left(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}\right)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{-4}{(x-1)\left(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}\right)}=-\dfrac{1}{3}$.

d). $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\left(x+2-2^2\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(x+7-3^2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+2}+2}=\dfrac{3}{2}$.

e). $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{1-x}}{x^4+x}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\left(x^2+x+2\right)-(1-x)}{\left(x^4+x\right)\left(\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+2x+1}{x\left(x^3+1\right)\left(\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{1-x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)^2}{x(x+1)\left(x^2-x+1\right)\left(\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{1-x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{x\left(x^2-x+1\right)\left(\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{1-x}\right)}=0$.

f). $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+2-2x)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\right)}{(x-1-3+x)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{-(x-2)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\right)}{2(x-2)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}\right)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{-\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\right)}{2\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}\right)}=-\dfrac{1}{4}$.

g). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+6}}{\sqrt{x+3}-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(4x+5-3x-6)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x+3-4)\left(\sqrt{4x+5}+\sqrt{3x+6}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{4x+5}+\sqrt{3x+6}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{4x+5}+\sqrt{3x+6}}=\dfrac{2}{3}$

h). $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-2(x-3)\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+6}\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-5}\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-2\left(\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+6}\right)}{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3x-5}\right)}=-3$

Ví dụ 2: Tìm các giới hạn sau :

a). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2}$ b). $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{10+2x^3}+x-1}{x^2+3x+2}$ c). $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x+1-\sqrt[3]{4x^2+28}}$

d). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x-2}+1}$ e). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}$ f). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{4x-3}-1}{x-1}$.

LỜI GIẢI

a). Ta có $\sqrt[3]{4x}-2=\dfrac{\left(\sqrt[3]{4x}-2\right)\left[\left(\sqrt[3]{4x}\right)^2+2.\sqrt[3]{4x}+4\right]}{\underbrace{\left(\sqrt[3]{4x}\right)^2+2.\sqrt[3]{4x}+4}_{A}}=\dfrac{\left(\sqrt[3]{4x}\right)^3-2^3}{A}=\dfrac{4x-8}{A}=\dfrac{2(x-2)}{A}$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(x-2)}{(x-2).A}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2}{A}=\dfrac{2}{\left(\sqrt[3]{4.2}\right)^2+2.\sqrt[3]{4.2}+4}=\dfrac{1}{6}$.

b). Ta có $\sqrt[3]{10+2x^3}+(x-1)$

$$=\dfrac{\left[\sqrt[3]{10+2x^3}+(x-1)\right]\left[\left(\sqrt[3]{10+2x^3}\right)^2-\sqrt[3]{10+2x^3}.(x-1)+(x-1)^2\right]}{\underbrace{\left(\sqrt[3]{10+2x^3}\right)^2-\sqrt[3]{10+2x^3}.(x-1)+(x-1)^2}_{A}}$$

$$=\dfrac{\left(\sqrt[3]{10+2x^3}\right)^3+(x-1)^3}{A}=\dfrac{3x^3-3x^2+3x+9}{A}=\dfrac{3(x+1)\left(x^2-2x+3\right)}{A}$$

Và có $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$

Do đó $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{10+2x^3}+x-1}{x^2+3x+2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3(x+1)\left(x^2-2x+3\right)}{(x+1)(x+2).A}$

$=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3\left(x^2-2x+3\right)}{(x+2).A}=\dfrac{3.6}{12}=\dfrac{3}{2}$.

c). Ta có $x+1-\sqrt[3]{4x^2+28} = \dfrac{\left((x+1)-\sqrt[3]{4x^2+28}\right)\left[(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{4x^2+28}+\left(\sqrt[3]{4x^2+28}\right)^2\right]}{\underbrace{(x+1)^2+(x+1)\sqrt[3]{4x^2+28}+\left(\sqrt[3]{4x^2+28}\right)^2}_{A}}$

$= \dfrac{(x+1)^3-\left(\sqrt[3]{4x^2+28}\right)^3}{A} = \dfrac{x^3-x^2+3x-27}{A} = \dfrac{(x-3)(x^2+2x+9)}{A}$

Và $x^3-27 = x^3-3^3 = (x-3)(x^2+3x+9)$. Do đó $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-27}{x+1-\sqrt[3]{4x^2+28}} = \lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x^2+3x+9)}{\dfrac{(x-3)(x^2+2x+9)}{A}}$

$= \lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x^2+3x+9).A}{x^2+2x+9} = \dfrac{27.48}{24} = 54$.

d). Có $\sqrt[3]{x}-1 = \dfrac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]}{\underbrace{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1}_{A}} = \dfrac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-1}{A} = \dfrac{x-1}{A}$, và

$\sqrt[3]{x-2}+1 = \dfrac{\left(\sqrt[3]{x-2}+1\right)\left[\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^2-\sqrt[3]{x-2}+1\right]}{\underbrace{\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^2-\sqrt[3]{x-2}+1}_{B}} = \dfrac{\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^3+1}{B} = \dfrac{x-1}{B}$.

Từ đó $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x-2}+1} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{x-1}{A}}{\dfrac{x-1}{B}} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{B}{A} = \dfrac{3}{3} = 1$.

e). Có $\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{x} = \dfrac{\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{x}\right)\left[\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^2+\sqrt[3]{2x-1}.\sqrt[3]{x}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right]}{\underbrace{\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^2+\sqrt[3]{2x-1}.\sqrt[3]{x}+\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}_{A}} = \dfrac{\left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^3-\left(\sqrt[3]{x}\right)^3}{A} = \dfrac{x-1}{A}$ và

$\sqrt{x}-1 = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}$.

Do đó $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{\dfrac{x-1}{A}}{\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}} = \lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}+1}{A} = \dfrac{2}{3}$.

f). Có $\sqrt[4]{4x-3}-1 = \dfrac{\left(\sqrt[4]{4x-3}-1\right)\left(\sqrt[4]{4x-3}+1\right)}{\sqrt[4]{4x-3}+1} = \dfrac{\sqrt{4x-3}-1}{\left(\sqrt[4]{4x-3}+1\right)} = \dfrac{\left(\sqrt{4x-3}-1\right)\left(\sqrt{4x-3}+1\right)}{\underbrace{\left(\sqrt[4]{4x-3}+1\right)\left(\sqrt{4x-3}+1\right)}_{A}} = \dfrac{4(x-1)}{A}$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{4x-3}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{4(x-1)}{A}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4}{A}=\dfrac{4}{4}=1$.

DẠNG 3: Thêm bớt số hạng hoặc một biểu thức vắng để khử được dạng vô định: Các dạng hay gặp $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt[k]{f(x)}+\sqrt[k]{g(x)}+c}{x-x_0}$ **hoặc** $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt[k]{f(x)}+\sqrt[m]{g(x)}+c}{x-x_0}$ **hoặc** $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt[k]{f(x)}+\sqrt[m]{g(x)}+c}{(x-x_0)^n}$**. Trong đó k, m, n** $\in \mathbb{N}^*$ **và** $n\le \min(k,m)$**.**

PHƯƠNG PHÁP: Thông qua những ví dụ sau, rồi ta rút ra phương pháp giải:

Ví dụ 1: Tìm các giới hạn sau :

a). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+2}+\sqrt{5x+4}-5}{x-1}$ b). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt{5x-6}}{x-2}$

c). $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+4x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-4}$ d). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-1}+3\sqrt{x^2+x-1}-5\sqrt{2x^2-1}}{x-1}$

LỜI GIẢI

a). Ta có khi $x\to 1$ thì $\left(\sqrt{2x+2}+\sqrt{5x+4}-5\right)\to 0$ do đó đây là bài dạng vô định $\dfrac{0}{0}$, ta phải tách được về dạng $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{f(x)}-c}{x-1}+\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{g(x)}-m}{x-1}$ sao cho mỗi giới hạn nhân lượng liên hợp đều khử được dạng vô định . Kỹ thuật ta thay $x=1$ vào $\sqrt{2x+2}=2$ và $\sqrt{5x+4}=3$ nên số (-5) tách thành $(-2)+(-3)$ và gom lại như sau :

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+2}+\sqrt{5x+4}-5}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{2x+2}-2\right)+\left(\sqrt{5x+4}-3\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+2}-2}{x-1}+\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{x-1}$. Sau đó tính từng giới hạn.

- Tính $L_1=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+2}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{2x+2}-2\right)\left(\sqrt{2x+2}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x+2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{2x+2}\right)^2-4}{(x-1)\left(\sqrt{2x+2}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x+2}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{\sqrt{2x+2}+2}=\dfrac{1}{2}$.

- Tính $L_2=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{5x+4}-3\right)\left(\sqrt{5x+4}+3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{5x+4}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{5x+4}\right)^2-9}{(x-1)\left(\sqrt{5x+4}+3\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{5x+4}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5}{\sqrt{5x+4}+3}=\dfrac{5}{6}$.

Kết luận $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+2}+\sqrt{5x+4}-5}{x-1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{6}=\dfrac{4}{3}$.

b). $L=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt{5x-6}}{x-2}$. Ta dễ dàng thấy đây là dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ và tử số có hai căn thức khác loại, nên ta phải thêm bớt một hằng số c sao cho đưa được về dạng $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{f(x)}-c}{x-2}+\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{c-\sqrt{g(x)}}{x-2}$ và mỗi giới hạn đều tính được giới hạn khi khử được dạng vô định bằng phương pháp nhân lượng liên hợp.

Kỹ thuật 1: Thay $x=2$ vào $\sqrt[3]{3x+2}$ và $\sqrt{5x-6}$ đều bằng 2. Suy ra 2 là giá trị ta cần thêm bớt.

Kỹ thuật 2: Cho $x-2=0\Leftrightarrow x=2$ sau đó giải hệ $\begin{cases}\sqrt[3]{3x+2}=2\\ \sqrt{5x-6}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+2=8\\ 5x-6=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ x=2\end{cases}\Rightarrow c=2$ là giá trị cần thêm bớt.

Cụ thể làm như sau: $L=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt{5x-6}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt[3]{3x+2}-2\right)+\left(2-\sqrt{5x-6}\right)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}+\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{5x-6}}{x-2}$.

Tính $L_1=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt[3]{3x+2}-2\right)\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2.\sqrt[3]{3x+2}+4\right]}{(x-2)\underbrace{\left[\left(\sqrt[3]{3x+2}\right)^2+2.\sqrt[3]{3x+2}+4\right]}_{A}}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3(x-2)}{(x-2).A}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{A}=\dfrac{1}{4}$.

Tính $L_2=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{5x-6}}{x-2}=\dfrac{\left(2-\sqrt{5x-6}\right)\left(2+\sqrt{5x-6}\right)}{(x-2)\left(2+\sqrt{5x-6}\right)}=\dfrac{4-(5x-6)}{(x-2)\left(2+\sqrt{5x-6}\right)}$

$=\dfrac{-5(x-2)}{(x-2)\left(2+\sqrt{5x-6}\right)}=\dfrac{-5}{2+\sqrt{5x-6}}=-\dfrac{5}{4}$.

Do đó $L=L_1+L_2=\dfrac{1}{4}-\dfrac{5}{4}=-1$.

c). $L=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+4x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-4}$, tương tự câu b) thay $x=2$ vào $\sqrt[3]{2x^2+4x+11}$ và $\sqrt{x+7}$ đều bằng 3.

Như vậy 3 là giá trị cần thêm và bớt, cụ thể $L=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt[3]{2x^2+4x+11}-3\right)+\left(3-\sqrt{x+7}\right)}{x^2-4}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+4x+11}-3}{x^2-4}+\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-\sqrt{x+7}}{x^2-4}$.

- Tính $L_1 = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{2x^2+4x+11}-3}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt[3]{2x^2+4x+11}-3\right)\left[\left(\sqrt[3]{2x^2+4x+11}\right)^2+3.\sqrt[3]{2x^2+4x+11}+9\right]}{\left(x^2-4\right)\underbrace{\left[\left(\sqrt[3]{2x^2+4x+11}\right)^2+3.\sqrt[3]{2x^2+4x+11}+9\right]}_{A}}$

$= \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt[3]{2x^2+4x+11}\right)^3-27}{\left(x^2-4\right).A} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+4x-16}{\left(x^2-4\right).A} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(x-2)(x+4)}{(x+2)(x-2).A} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(x+4)}{(x+2).A} = \dfrac{1}{9}$.

- Tính: $L_2 = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-\sqrt{x+7}}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(3-\sqrt{x+7}\right)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}{\left(x^2-4\right)\left(3+\sqrt{x+7}\right)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{(x-2)(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-1}{(x+2)\left(3+\sqrt{x+7}\right)} = -\dfrac{1}{24}$.

Do đó $L = L_1 + L_2 = \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{24} = \dfrac{5}{72}$.

d). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-1}+3\sqrt{x^2+x-1}-5\sqrt{2x^2-1}}{x-1}$. Ta thấy khi $x\to 1$ thì cả tử và mẫu đều $\to 0$ nên đây là bài thuộc dạng vô định $\dfrac{0}{0}$. Kỹ thuật giải bài này cũng giống như các câu a, b, c. Bước đầu tiên thay $x=1$ vào $\sqrt{5x-1}$ được 2, thay $x=1$ vào $\sqrt{x^2+x-1}$ được 1 và thay $x=1$ vào $\sqrt{2x^2-1}$ được 1. Nên giới hạn được viết lại $L = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{5x-1}-2\right)+3\left(\sqrt{x^2+x-1}-1\right)-5\left(\sqrt{2x^2-1}-1\right)}{x-1}$

$L = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-1}-2}{x-1} + 3\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x-1}-1}{x-1} - 5\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x^2-1}-1}{x-1}$.

- Tính $L_1 = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-1}-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{5x-1}-2\right)\left(\sqrt{5x-1}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{5x-1}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{5x-1}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5}{\sqrt{5x-1}+2} = \dfrac{5}{4}$.

- Tính $L_2 = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x-1}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x-1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+x-1}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x-1}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x-1}+1\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+x-1}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+x-1}+1} = \dfrac{3}{2}$.

Tính $L_3 = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x^2-1}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{2x^2-1}-1\right)\left(\sqrt{2x^2-1}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x^2-1}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-2}{(x-1)\left(\sqrt{2x^2-1}+1\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)(x+1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x^2-1}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x+1)}{\sqrt{2x^2-1}+1} = 2$.

Từ đó suy ra $L = L_1 + 3L_2 - 5L_3 = \frac{5}{4} + \frac{9}{2} - 10 = -\frac{17}{4}$.

Ví dụ 2 *: Tính các giới hạn sau:

a). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{x^2}$ b). $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x^2-6x+5}-\sqrt[3]{3x^2-9x+7}}{(x-2)^2}$

c). $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-\sqrt[3]{9x^2+27x+27}}{x^3}$ d). $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{6x^2+2}-2\sqrt{x}}{x^3-x^2-x+1}$

LỜI GIẢI

Cách khử vô định $\frac{0}{0}$ dạng $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sqrt[k]{f(x)}-\sqrt[m]{g(x)}}{(x-x_0)^n}$ ta phải thêm và bớt một biểu thức $h(x)$ sao cho liên hợp thì tử xuất hiện một lượng nhân tử $(x-x_0)^n$ sau đó khử được vô định. Cách làm như sau:

$$L = \lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt[k]{f(x)}-\sqrt[m]{g(x)}}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0}\frac{\left(\sqrt[k]{f(x)}-h(x)\right)+\left(h(x)-\sqrt[m]{g(x)}\right)}{(x-x_0)^n}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{\left(\sqrt[k]{f(x)}-h(x)\right)}{(x-x_0)^n}+\lim_{x\to x_0}\frac{\left(h(x)-\sqrt[m]{g(x)}\right)}{(x-x_0)^n} = \frac{u(x)(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n P(x)}+\frac{v(x)(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n Q(x)}.$$

Trong đó $P(x)$ là lượng liên hợp của $\left(\sqrt[k]{f(x)}-h(x)\right)$ và $Q(x)$ là lượng liên hợp của $\left(h(x)-\sqrt[m]{g(x)}\right)$. Cụ thể qua những ví dụ các bạn sẽ hiểu rõ hơn.

a). Phân tích hướng giải, bước đầu tiên ta phải thêm một lượng $h(x)$ có nghĩa $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+4x}-h(x)\right)+\left(h(x)-\sqrt[3]{1+6x}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+4x}-h(x)\right)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\left(h(x)-\sqrt[3]{1+6x}\right)}{x^2}.$$

Tính $L_1 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+4x}-h(x)\right)}{x^2}$, ta có $\sqrt{1+4x}-h(x) = \frac{\left(\sqrt{1+4x}-h(x)\right)\left(\sqrt{1+4x}+h(x)\right)}{\sqrt{1+4x}+h(x)} = \frac{1+4x-h^2(x)}{\sqrt{1+4x}+h(x)}$

như vậy ta phải tìm hàm $h(x)$ sao cho $h^2(x)$ phải xuất hiện $(1+4x)$. Ta phân tích $1+4x+... = h^2(x) \Leftrightarrow 1+2.1.(2x)+(2x)^2 = h^2(x) \Leftrightarrow (1+2x)^2 = h^2(x) \Rightarrow h(x) = 1+2x$. Đến đây bài toán xem như đã hoàn thành (vì phương pháp nhân lượng liên hợp các bạn đã thành thạo trong những ví dụ trên).

Cách làm cụ thể: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+4x}-\sqrt[3]{1+6x}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+4x}-(1+2x)\right)+\left((1+2x)-\sqrt[3]{1+6x}\right)}{x^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+4x}-(1+2x)\right)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\left((1+2x)-\sqrt[3]{1+6x}\right)}{x^2}.$$

- Tính $L_1 = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+4x}-(1+2x)\right)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+4x}-(1+2x)\right)\left(\sqrt{1+4x}+(1+2x)\right)}{x^2\left(\sqrt{1+4x}+(1+2x)\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+4x}\right)^2-(1+2x)^2}{x^2\left(\sqrt{1+4x}+(1+2x)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+4x-\left(1+4x+4x^2\right)}{x^2\left(\sqrt{1+4x}+(1+2x)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-4x^2}{x^2\left(\sqrt{1+4x}+(1+2x)\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-4}{\sqrt{1+4x}+(1+2x)}=-2.$$

- Tính $L_2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left((1+2x)-\sqrt[3]{1+6x}\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[(1+2x)-\sqrt[3]{1+6x}\right]\left[(1+2x)^2+(1+2x)\sqrt[3]{1+6x}+\left(\sqrt[3]{1+6x}\right)^2\right]}{x^2\underbrace{\left[(1+2x)^2+(1+2x)\sqrt[3]{1+6x}+\left(\sqrt[3]{1+6x}\right)^2\right]}_{A}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)^3-\left(\sqrt[3]{1+6x}\right)^3}{x^2.A}=\lim_{x\to 0}\frac{1+6x+12x^2+8x^3-(1+6x)}{x^2.A}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2(3+2x)}{x^2.A}=\lim_{x\to 0}\frac{4(3+2x)}{A}=4$$

Do đó $L=L_1+L_2=-2+4=2$.

b). $L=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x^2-6x+5}-\sqrt[3]{3x^2-9x+7}}{(x-2)^2}$. Để dễ thêm bớt ta nên đặt $x-2=t\Rightarrow x=t+2$ vì $x\to 2$

$\Rightarrow (x-2)\to 0$ do đó $t\to 0$. Suy ra $L=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{2(t+2)^2-6(t+2)+5}-\sqrt[3]{3(t+2)^2-9(t+2)+7}}{t^2}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{2t^2+2t+1}-\sqrt[3]{3t^2+3t+1}}{t^2}$ đến đây ta phải thêm và bớt một lượng $h(t)$ để trên tử phải xuất hiện một lượng $t^2.u(t)$. Ta bắt đầu thực hiện $L=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{2t^2+2t+1}-h(t)\right)+\left(h(t)-\sqrt[3]{3t^2+3t+1}\right)}{t^2}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\left(\sqrt{2t^2+2t+1}-h(t)\right)}{t^2}+\lim_{t\to 0}\frac{\left(h(t)-\sqrt[3]{3t^2+3t+1}\right)}{t^2}.$$

Phân tích $L_1=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{2t^2+2t+1}-h(t)\right)}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{2t^2+2t+1}-h(t)\right)\left(\sqrt{2t^2+2t+1}+h(t)\right)}{t^2.\left(\sqrt{2t^2+2t+1}+h(t)\right)}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2t^2+2t+1-h^2(t)}{t^2.\left(\sqrt{2t^2+2t+1}+h(t)\right)}$ như vậy ta phải tìm hàm $h(t)$ sao cho $h^2(t)$ phải xuất hiện một lượng $(2t+1)$. Ta thực hiện như sau: $...+2t+1=h^2(t)\Leftrightarrow t^2+2t+1=h^2(t)\Leftrightarrow (t+1)^2=h^2(t)\Rightarrow h(t)=t+1$ mấu chốt của bài toán ta đã giải quyết xong. Ở đây vì sao ta lại lấy giới hạn đầu để phân tích? Thật ra lấy giới hạn nào cũng được vì thêm và bớt phải cùng một lượng $h(t)$, ta tìm được bớt lượng $h(t)$ ở giới hạn đầu thì giới hạn sau hiển nhiên phải nhận thêm lượng $h(t)$. Và tìm hàm $h(t)$ lấy giới hạn có căn thức bậc hai dễ nhân lượng liên hợp hơn.

Cách làm cụ thể ở bài này: $L=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{2t^2+2t+1}-(t+1)\right)+\left((t+1)-\sqrt[3]{3t^2+3t+1}\right)}{t^2}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{2t^2+2t+1}-(t+1)\right)}{t^2}+\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\left((t+1)-\sqrt[3]{3t^2+3t+1}\right)}{t^2}$.

- Tính $L_1=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{2t^2+2t+1}-(t+1)\right)}{t^2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\left[\sqrt{2t^2+2t+1}-(t+1)\right]\left[\sqrt{2t^2+2t+1}+(t+1)\right]}{t^2\left[\sqrt{2t^2+2t+1}+(t+1)\right]}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{2t^2+2t+1}\right)-(t+1)^2}{t^2\left[\sqrt{2t^2+2t+1}+(t+1)\right]}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2}{t^2\left[\sqrt{2t^2+2t+1}+(t+1)\right]}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{2t^2+2t+1}+(t+1)}=\dfrac{1}{2}$

- Tính $L_2=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\left((t+1)-\sqrt[3]{3t^2+3t+1}\right)}{t^2}$

$$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\left[(t+1)-\sqrt[3]{3t^2+3t+1}\right]\left[(t+1)^2+(t+1)\sqrt[3]{3t^2+3t+1}+\left(\sqrt[3]{3t^2+3t+1}\right)^2\right]}{t^2\left[\underbrace{(t+1)^2+(t+1)\sqrt[3]{3t^2+3t+1}+\left(\sqrt[3]{3t^2+3t+1}\right)^2}_{A}\right]}$$

$==\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(t+1)^2-\left(\sqrt[3]{3t^2+3t+1}\right)^3}{t^2.A}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^3}{t^2.A}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{A}=0$.

Kết luận $L=L_1+L_2=\dfrac{1}{2}+0=\dfrac{1}{2}$.

c). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-\sqrt[3]{9x^2+27x+27}}{x^3}$ .Tương tự câu a và b trước tiên ta phải tìm lượng $h(x)$. Có

$\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-h(x)=\dfrac{\left(\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-h(x)\right)\left(\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}+h(x)\right)}{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}+h(x)}$

$=\dfrac{8x^3+x^2+6x+9-h^2(x)}{\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}+h(x)}$ bài này tương đối dễ, ta thấy ngay $x^2+6x+9=(x+3)^2$ có nghĩa

$h^2(x)=(x+3)^2 \Rightarrow h(x)=(x+3)$. Cách làm cụ thể như sau:

$L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-(x+3)\right]+\left[(x+3)-\sqrt[3]{9x^2+27x+27}\right]}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-(x+3)\right]}{x^3}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[(x+3)-\sqrt[3]{9x^2+27x+27}\right]}{x^3}$

• Tính $L_1 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-(x+3)\right]}{x^3}$

$$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left[\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}-(x+3)\right]\left[\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}+(x+3)\right]}{x^3\underbrace{\left[\sqrt{8x^3+x^2+6x+9}+(x+3)\right]}_{A}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{8x^3+x^2+6x+9-(x+3)^2}{x^3.A}$$

$$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{8x^3}{x^3.A} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{8}{A} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

• Tính $L_2 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[(x+3)-\sqrt[3]{9x^2+27x+27}\right]}{x^3}$

$$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+3)^3-\left(9x^2+27x+27\right)}{x^3\underbrace{\left[(x+3)^2+(x+3)\sqrt[3]{9x^2+27x+27}+\left(\sqrt[3]{9x^2+27x+27}\right)^2\right]}_{B}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3.B} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{B} = \frac{1}{27}.$$

Kết luận $L = L_1 + L_2 = \dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{27} = \dfrac{37}{27}$.

d). $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{6x^2+2}-2\sqrt{x}}{x^3-x^2-x+1}$. Mẫu số được phân tích $x^3-x^2-x+1 = x^2(x-1)-(x-1) = (x-1)(x^2-1)$

$= (x-1)^2(x+1)$, nên giới hạn được viết lại $L = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{6x^2+2}-2\sqrt{x}}{(x-1)^2(x+1)}$. Đặt $t = x-1$ nên

$$L = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{6(t+1)^2}-2\sqrt{t-1}}{t^2(t+2)} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{6t^2+12t+6}-2\sqrt{t-1}}{t^2(t+2)}$$

$$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{6x^2+2}-2\sqrt{x}}{x^3-x^2-x+1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{6x^2+2}-(x+1)+(x+1)-2\sqrt{x}}{x^3-x^2-x+1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{6x^2+2}-(x+1)}{x^3-x^2-x+1} + \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+1)-2\sqrt{x}}{x^3-x^2-x+1}.$$