# $\xi 8$ HÀM SỐ LIÊN TỤC

## A.KIẾN THỨC CẦN NHỚ THEO CHUẨN KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

### 1. Hàm số liên tục tại 1 điểm:

**Định nghĩa:** Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0 \in (a;b)$. Hàm số $y = f(x)$ gọi là liên tục tại điểm $x_0$ nếu: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Hàm số không liên tục tại điểm $x_0$ gọi là gián đoạn tại $x_0$.

### 2. Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn

**Định nghĩa:** Giả sử hàm số f xác định trên khoảng $(a;b)$.Ta nói rằng hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

Hàm số $y = f(x)$ gọi là liên tục trên đoạn $[a;b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a), \lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Nhận xét:

a). Nếu hai hàm số f và g liên tục tại điểm $x_0$ thì các hàm số $f \pm g, fg, cf$ (c là một hằng số) đều liên tục tại điểm $x_0$.

b). Hàm đa thức và hàm số phân thức hữu tỉ liên tục trên tập xác định của chúng.

### 3. Tính chất của hàm số liên tục:

**Định lí 2** (định lí về giá trị trung gian của hàm số liên tục)

Giả sử hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ .Nếu $f(a) \neq f(b)$ thì với mỗi số thực M nằm giữa $f(a), f(b)$, tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = M$.

**Ý nghĩa hình học của định lí**

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và M là một số thực nằm giữa $f(a), f(b)$ thì đường thẳng $y = M$ cắt đồ thị của hàm số $y = f(x)$ tại ít nhất một điểm có hoành độ $c \in (a;b)$.

**Hệ quả**

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = 0$.

**Ý nghĩa hình học của hệ quả**

Nếu hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành ít nhất tại một điểm có hoành độ $c \in (a;b)$.

## B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

### DẠNG 1: XÉT TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

**PHƯƠNG PHÁP 1:**

Bước 1: Tính $f(x_0)$.

Bước 2: Tính $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số f(x) liên tục tại $x_0$.

**PHƯƠNG PHÁP 2:**

Bước 1: Tìm $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$

Bước 2: Tìm $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.

Nếu $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số f(x) liên tục tại $x_0$.

**Ví dụ 1.** Xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm $x=-2$

a) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ b) $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x+2} & x\neq -2\\ -4 & x=-2\end{cases}$

LỜI GIẢI

a). Vì $f(-2)$ không xác định, suy ra hàm số không liên tục tại $x=-2$.

b) Ta có: $\lim\limits_{x\to -2} g(x)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(x-2)=-4=f(-2)$

Do đó hàm số liên tục tại $x=-2$.

**Ví dụ 2.** Cho hàm số: $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{x^2+5}}{x^2-4} & x\neq \pm 2\\ -\dfrac{1}{6} & x=2\end{cases}$

a). Tính $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

b). Xét tính liên tục của hàm số $f(x)$ tại $x=2; x=-2$.

**LỜI GIẢI**

a).Ta có $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3-\sqrt{x^2+5}}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9-x^2-5}{(x^2-4)\left(3+\sqrt{x^2+5}\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-1}{3+\sqrt{x^2+5}}=-\dfrac{1}{6}$.

b). Từ câu a) suy ra $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$. Vậy hàm số đã cho liên tục tại $x=2$.

hàm số đã cho không xác định tại $x=-2$ , do đó hàm số không liên tục tại $x=-2$.

**Ví dụ 3 :** Xét tính liên tục tại giá trị $x_0$ của các hàm số sau:

1). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & x\neq 2\\ 1 & x=2\end{cases}$ tại $x_0=2$ và tại $x_0=4$

2). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & x\neq 1\\ \dfrac{1}{4} & x=1\end{cases}$ tại $x_0=1$

3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2} & x\neq 0\\ \dfrac{1}{4} & x=0\end{cases}$ tại $x_0=0$ và tại $x=\dfrac{\pi}{3}$

4). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2-7x+5x^2-x^3}{x^2-3x+2} & x\neq 2\\ 1 & x=2\end{cases}$ tại $x_0=2$ và tại $x_0=5$

5). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & x>5\\ (x-5)^2+3 & x\leq 5\end{cases}$ tại $x_0=5$, tại $x_0=6$ và tại $x_0=4$

6). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{x+1} & x>-1\\ \dfrac{\sqrt{3-x}}{2} & x\le -1\end{cases}$ tại $x_0=-1$

7). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & x>1\\ \dfrac{1}{2} & x=1\\ x-\dfrac{3}{2} & x<1\end{cases}$ tại $x_0=1$

**LỜI GIẢI**

1).

- Xét tính liên tục tại $x_0=2$:

Có $f(x_0)=f(2)=1$

Có $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x-1)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-1)=1$

Ta có $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)\Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x=2$.

- Xét tính liên tục tại $x_0=4$:

Có $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\dfrac{4^2-3.4+2}{4-2}=3=f(4)\Rightarrow$ hàm số f(x) liên tục tại $x_0=4$.

2). Có $f(x_0)=f(1)=\dfrac{1}{4}$ (1)

Có $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+3-4}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}=\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\dfrac{1}{4}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$. Vậy hàm số liên tục tại $x=1$.

3).

- Xét tính liên tục tại $x_0=0$

Có $f(x_0)=f(0)=\dfrac{1}{4}$

Có $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2\dfrac{1}{1+\sqrt{\cos x}}=\dfrac{1}{4}$

Vì $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)\Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x=0$

- Xét tính liên tục tại $x_0=\dfrac{\pi}{3}$

Có $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2} = \frac{1-\sqrt{\cos\frac{\pi}{3}}}{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2} = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ suy ra hàm số f(x) liên tục tại $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

4). • Xét tính liên tục tại $x_0 = 2$

Ta có $f(x) = f(2) = 1$

Ta có $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \lim\limits_{x\to2} \frac{2-7x+5x^2-x^3}{x^2-3x+2} = \frac{(x-2)(-x^2+3x-1)}{(x-2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to2}\frac{-x^2+3x-1}{x-1} = 1$

Vì $\lim\limits_{x\to2} f(x) = f(2) \Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x = 2$.

- Xét tính liên tục tại $x_0 = 5$

Ta có $\lim\limits_{x\to5} f(x) = \frac{2-7.5+5.5^2-5^3}{5^2-3.5+2} = f(5) \Rightarrow$ hàm số f(x) liên tục tại $x_0 = 5$.

5). $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & x > 5 \\ (x-5)^2+3 & x \le 5 \end{cases}$ tại $x_0 = 5$, tại $x_0 = 6$ và tại $x_0 = 4$

- Xét tính liên tục tại $x_0 = 5$

*Áp dụng nếu* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) \Rightarrow$ *hàm số liên tục tại* $x_0$.

Có $\lim\limits_{x\to5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to5^+} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} = \lim\limits_{x\to5^+} \frac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{2x-1-9} = \lim\limits_{x\to5^+} \frac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{2x-10}$

$= \lim\limits_{x\to5^+} \frac{(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{2(x-5)} = \lim\limits_{x\to5^+} \frac{(\sqrt{2x-1}+3)}{2} = \frac{\sqrt{2.5-1}+3}{2} = 3.$

Có $\lim\limits_{x\to5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to5^-}\left[(x-5)^2+3\right] = 0+3 = 3 = f(5).$

Vì $\lim\limits_{x\to5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to5^-} f(x) = f(5) \Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x_0 = 5$.

- Xét tính liên tục tại $x_0 = 6$

Có $\lim\limits_{x\to6} f(x) = \lim\limits_{x\to6} \frac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} = \frac{6-5}{\sqrt{2.6-1}-3} = \frac{1}{\sqrt{11}-3} = f(6)$. Vậy hàm số f(x) liên tục tại $x_0 = 6$.

- Xét tính liên tục tại $x_0 = 4$

Có $\lim\limits_{x\to4} f(x) = \lim\limits_{x\to4}\left[(x-5)^2+3\right] = (4-5)^2+3 = 4 = f(4) \Rightarrow$ hàm số f(x) liên tục tại $x_0 = 4$.

6). Có $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \frac{\sqrt{2x+3}-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1^+} \frac{2x+3-1}{(\sqrt{2x+3}+1)(x+1)}$

$= \lim\limits_{x\to-1^+} \frac{2(x+1)}{(\sqrt{2x+3}+1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to-1^+} \frac{2}{\sqrt{2x+3}+1} = \frac{2}{\sqrt{2.(-1)+3}+1} = 1.$

Có $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \frac{\sqrt{3-x}}{2} = \frac{\sqrt{3-(-1)}}{2} = 1.$

Có $f(-1) = \frac{\sqrt{3-(-1)}}{2} = 1$

Vì $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) \Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x_0 = -1$.

7). Ta có $f(x_0) = f(1) = \frac{1}{2}$

Có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x-2}{x+1} = \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2}$.

Có $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(x - \frac{3}{2}\right) = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$.

Vì $f(1) \neq \lim\limits_{x\to -1} f(x) \Rightarrow$ hàm số không liên tục tại $x_0 = 1$.

**Ví dụ 4.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & x \neq 2 \\ a & x = 2 \end{cases}$

Với giá trị nào của a thì hàm số đã cho liên tục tại điểm $x = 2$ ?

**LỜI GIẢI**

Ta có $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x-1) = 1$.

Hàm liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow a = 1$.

Vậy hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$ khi $a = 1$.

**Ví dụ 5:** Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{|2x^2-7x+6|}{x-2} & \text{khi } x < 2 \\ a + \dfrac{1-x}{2+x} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$. Xác định a để hàm số f(x) liên tục tại $x_0 = 2$.

**LỜI GIẢI**

Ta có :

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \frac{|2x^2-7x+6|}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{|(x-2)(2x-3)|}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{(2-x)(2x-3)}{x-2}$
  $= \lim\limits_{x\to 2^-}(3-2x) = -1$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \left(a + \frac{1-x}{2+x}\right) = a - \frac{1}{4} = f(2)$.

Hàm số liên tục tại $x_0 = 2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow a - \frac{1}{4} = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4}$.

**Ví dụ 6:** Cho các hàm số $f(x)$ sau đây . Có thể định nghĩa $f(0)$ để hàm số $f(x)$ trở thành liên tục tại $x = 0$ được không?

a) $f(x) = \frac{7x^2-5x}{12x}$ với $x \neq 0$

b) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x+4}-2}$ với $x \neq 0$

c) $f(x) = \frac{3}{2x}$ với $x \neq 0$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}{3x}$ với $x \neq 0$

**LỜI GIẢI**

a). Ta có $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(7x-5)}{12x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{7x-5}{12} = -\frac{5}{12}$.

Hàm số liên tục tại $x = 0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ .

Vậy nếu bổ sung $f(0)=-\dfrac{5}{12}$ thì hàm số trở thành liên tục tại $x=0$.

b). Ta có $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{x+4}-2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x+4-4}=\lim\limits_{x\to 0}3\left(\sqrt{x+4}+2\right)=12.$

Hàm số liên tục tại $x=0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

Vậy nếu bổ sung $f(0)=12$ thì hàm số trở nên liên tục tại $x=0$.

c). Ta có $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3}{2x}=+\infty$.

hàm số không có giới hạn tại $x=0$, do đó hàm không thể liên tục tại $x=0$.

d). Ta có $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2-2+x}{3x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{3\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}\right)}=\dfrac{2}{6\sqrt{2}}=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}.$

Hàm số liên tục tại $x=0$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$.

Vậy nếu bổ sung $f(0)=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$ thì hàm số trở nên liên tục tại $x=0$.

## DẠNG 2: HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT TẬP HỢP

**Ví dụ 1:** Chứng minh các hàm số sau liên tục trên R.

a). $f(x)=x^4-x^2+2$

b). $f(x)=x^2.\sin x-2\cos^2 x+3$

c). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^3+x+3}{x^3+1} & x\neq -1\\ \dfrac{7}{3} & x=-1\end{cases}$

d). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & x>1\\ -\sqrt{5-x} & x\leq 1\end{cases}$

**LỜI GIẢI**

a). $f(x)=x^4-x^2+2$. TXĐ: $D=R$

$\forall x_0\in\mathbb{R}$ ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(x^4-x^2+2\right)=x_0^4-x_0^2+2=f(x_0)$. Suy ra hàm số liên tục trên R.

b) $f(x)=x^2.\sin x-2\cos^2 x+3$. TXĐ: $D=R$

$\forall x_0\in\mathbb{R}$ ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(x^2.\sin x-2\cos^2 x+3\right)$

$=x_0^2\sin x_0-2\cos^2 x_0+3=f(x_0)$. Suy ra hàm số liên tục trên R.

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^3+x+3}{x^3+1} & x\neq -1\\ \dfrac{7}{3} & x=-1\end{cases}$. Tập xác định của f(x) là $D=\mathbb{R}$

Nếu $x\neq -1$ thì $f(x)=\dfrac{2x^3+x+3}{x^3+1}$ là hàm số phân thức hữu tỉ, nên liên tục trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$ (1).

Bây giờ ta xét tính liên tục của f(x) tại $x_0=-1$

Ta có: $f(x_0)=f(-1)=\dfrac{7}{3}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to -1} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3+x+3}{x^3+1} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left(x+1\right)\left(2x^2-2x+3\right)}{\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-2x+3}{x^2-x+1} = \dfrac{7}{3}$

Vì $\lim\limits_{x\to -1} f\left(x\right) = f\left(-1\right) \Rightarrow$ Hàm số liên tục tại $x_0 = -1$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra hàm số f(x) liên tục trên R.

d) $f\left(x\right) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & x > 1 \\ -\sqrt{5-x} & x \le 1 \end{cases}$. Tập xác định của f(x) là $D = ¡$

Với mọi $x_0 \in \left(1;+\infty\right)$, ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} = \dfrac{x_0^2-4x_0+3}{x_0-1} = f(x_0)$. Suy ra hàm số f(x) liên tục trên khoảng $\left(1;+\infty\right)$ (1).

Với mọi $x_0 \in \left(-\infty;1\right)$, ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\left(-\sqrt{5-x}\right) = -\sqrt{5-x_0} = f(x_0)$. Suy ra hàm số f(x) liên tục trên khoảng $\left(-\infty;1\right)$ (2).

Ta xét tính liên tục của $f(x)$ tại $x_0 = 1$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\left(x-1\right)\left(x-3\right)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}(x-3) = -2.$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(-\sqrt{5-x}\right) = -2.$

Và có $f\left(1\right) = -\sqrt{5-1} = 2$

Vì $\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right) = f\left(1\right) \Rightarrow$ Hàm số liên tục tại 1 (3)

Từ (1) (2) và (3) suy ra $f(x)$ liên tục trên R.

**Ví dụ 2:** Cho hàm số $f\left(x\right) = \begin{cases} 1 & x \le 3 \\ ax+b & 3 < x < 5 \\ 7 & x \ge 5 \end{cases}$

Xác định a, b để hàm số liên tục trên R.

**LỜI GIẢI**

Ta có tập xác định của hàm số f(x) là $D = ¡$ .

Ta có: hàm số liên tục trên khoảng $\left(-\infty;3\right),\left(3;5\right),\left(5;+\infty\right)$ (vì là hàm đa thức).

Do đó hàm số liên tục trên R khi và chỉ khi hàm số liên tục tại các điểm $x = 3$ và $x = 5$ .

$+$ Tại $x = 3$ :

Ta có $\lim\limits_{x\to 3^-} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 3^-} 1 = 1$ và $\lim\limits_{x\to 3^+} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 3^+}\left(ax+b\right) = 3a+b$ và $f\left(3\right) = 1.$

Do đó hàm liên tục tại $x = 3$ khi và chỉ khi

$\lim\limits_{x\to 3^-} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 3^+} f\left(x\right) = f\left(3\right) \Leftrightarrow 3a+b = 1 \quad \left(1\right)$

$+$ Tại $x = 5$

Ta có $\lim\limits_{x\to 5^-} f\left(x\right) = 5a+b$ và $\lim\limits_{x\to 5^+} f\left(x\right) = 7 = f\left(5\right).$

Do đó hàm số liên tục tại $x = 5$ khi và chỉ khi

$\lim\limits_{x\to 5^-} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 5^+} f\left(x\right) = f\left(5\right) \Leftrightarrow 5a+b = 7 \quad \left(2\right)$

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra hàm số liên tục trên R khi và chỉ khi: $\begin{cases} 3a+b=1 \\ 5a+b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-8 \end{cases}.$

Vậy với $a=3, b=-8$ thì hàm số liên tục trên R.

**Ví dụ 3 :** Xét xem các hàm số sau có liên tục với $\forall x \in R$ không? Nếu không? Chỉ ra các điểm gián đoạn.

a) $f(x)=2x^4-4x^3+2x-1$

b) $f(x)=\dfrac{3x^2-4x+5}{x^2-3x+2}$

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+1}{2x^2+3x+1} & x \neq -\dfrac{1}{2} \\ 2 & x=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^3+6x^2+x+3}{x+3} & x \neq -3 \\ 19 & x=-3 \end{cases}$

**LỜI GIẢI**

a). Hàm số $f(x)=2x^4-4x^3+2x-1$ liên tục với $\forall x \in R$ vì $f(x)$ là hàm đa thức.

b). Hàm số $f(x)=\dfrac{3x^2-4x+5}{x^2-3x+2}$ liên tục với $\forall x \in R \setminus \{1;2\}$, gián đoạn tại các điểm $x=1, x=2$ vì $f(x)$ không xác định tại $x=1$ và $x=2$.

c). Hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x+1}{2x^2+3x+1} & x \neq -\dfrac{1}{2} \\ 2 & x=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

-Với $x \in R \setminus \left\{-1;-\dfrac{1}{2}\right\}, f(x)$ là hàm phân thức hữu tỉ nên liên tục.

-Với $x=-\dfrac{1}{2}; \lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} f(x)=\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \dfrac{1}{x+1}=2=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$. Do đó hàm số liên tục tại $x=-\dfrac{1}{2}$.

-Hàm số gián đoạn tại $x=-1$ vì nó không xác định tại $x=-1$.

d). Với $x \neq -3, f(x)$ là phân thức hữu tỉ nên liên tục.

Tại $x=-3; f(-3)=19$;

$$\lim_{x \to -3} f(x)=\lim_{x \to -3} \frac{(x+3)(2x^2+1)}{x+3}=\lim_{x \to -3}(2x^2+1)=19=f(-3).$$

Do đó hàm số liên tục tại $x=-3$.

Vậy hàm số liên tục với $\forall x \in R$.

**Ví dụ 4:** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3+8}{x^2-4} & \text{khi } x>-2 \\ -3 & \text{khi } x=-2 \\ \sqrt{3+x}-5 & \text{khi } -3 \le x<-2 \end{cases}$. Tìm các khoảng, nửa khoảng mà trên đó hàm số f(x) liên tục.

**LỜI GIẢI**

Vì $x^2-4 \neq 0$ với mọi $x>-2$ nên hàm số $f(x)=\dfrac{x^3+8}{x^2-4}$ xác định trên khoảng $(-2;+\infty)$. Ta có

$\forall x_0 \in (-2;+\infty)$ thì $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^3+8}{x^2-4}=\dfrac{x_0^3+8}{x_0^2-4}=f(x_0)$ nên hàm số f(x) liên tục trên khoảng $(-2;+\infty)$.

Với mọi $x \in [-3;-2)$ thì $3+x \geq 0$, do đó hàm số $f(x)=\sqrt{3+x}-5$ xác định trên nửa khoảng $[-3;-2)$.

$\forall x_0 \in [-3;-2)$ ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\sqrt{3+x}-5\right)=\sqrt{3+x_0}-5=f(x_0)$ nên hàm số f(x) liên tục trên nửa khoảng $[-3;-2)$.

Tại $x_0=-2$, ta có $f(-2)=-3$. Và $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^-}\left(\sqrt{3+x}-5\right)=-4\neq f(-2)$ nên hàm số f(x) không liên tục tại $x=-2$.

Kết luận hàm số f(x) liên tục trên $(-2;+\infty)$ và trên $[-3;-2)$.

**DẠNG 3: CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM**

PHƯƠNG PHÁP:

Bước 1: Biến đổi phương trình về dạng $f(x)=0$.

Bước 2: Tìm hai số a và b sao cho $f(a).f(b)<0$.

Bước 3: Chứng minh hàm số f(x) liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Từ đó suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(a;b)$.

Chú ý:

Nếu $f(a).f(b)\leq 0$ thì phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc $[a;b]$

Nếu hàm số f(x) liên tục trên $[a;+\infty)$ và có $f(a).\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(a;+\infty)$.

Nếu hàm số f(x) liên tục trên $(-\infty;a]$ và có $f(a).\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-\infty;a)$.

**Ví dụ 1:** Chứng minh rằng phương trình $4x^3-8x^2+1=0$ có nghiệm trong khoảng $(-1;2)$

LỜI GIẢI

Hàm số $f(x)=4x^3-8x^2+1$ liên tục trên R.

Ta có $f(-1)=-11, f(2)=1$ nên $f(-1).f(2)<0$

Do đó theo tính chất hàm số liên tục, phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1;2)$

**Ví dụ 2 :** Chứng minh phương trình $4x^4+2x^2-x-3=0$ có ít nhất 2 nghiệm thuộc khoảng $(-1;1)$.

**LỜI GIẢI**

Đặt $f(x)=4x^4+2x^2-x-3$ thì $f(x)$ liên tục trên R.

$f(-1)=4+2+1-3=4; f(0)=-3; f(1)=2.$

Vì $f(-1).f(0)<0$ nên phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$

$f(1).f(0)<0$ suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

Mà hai khoảng $(-1;0),(0;1)$ không giao nhau. Từ đó suy ra phương trình đã cho có ít nhất 2 nghiệm thuộc khoảng $(-1;1)$.

**Ví dụ 3 :** Chứng minh phương trình $x^5-5x^3+4x-1=0$ có đúng năm nghiệm.

**LỜI GIẢI**

Đặt $f(x)=x^5-5x^3+4x-1$ thì $f(x)$ liên tục trên R

Ta có $f(x)=x(x^4-5x^2+4)-1=(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)-1$

$f(-2)=-1;f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{105}{32}-1>0;f(-1)=-1<0$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{45}{32}-1>0;f(1)=-1<0;f(3)=120-1=119>0$

Vì $f(-2).f\left(-\frac{3}{2}\right)<0$ nên phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$.

Vì $f\left(-\frac{3}{2}\right).f(-1)<0$ nên phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{3}{2};-1\right)$.

Vì $f(-1).f\left(\frac{1}{2}\right)<0$ nên phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

Vì $f\left(\frac{1}{2}\right).f(1)<0$ nên phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Vì $f(1).f(3)<0$ nên phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(1;3)$.

Do các khoảng $\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$, $\left(-\frac{3}{2};-1\right)$, $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2};1\right)$, $(1;3)$ không giao nhau nên phương trình có ít nhất 5 nghiệm thuộc các khoảng trên.

Mà phương trình bậc 5 có không quá 5 nghiệm suy ra phương trình đã cho có đúng 5 nghiệm.

**Ví dụ 4.** Chứng minh rằng nếu $2a+3b+6c=0$ thì phương trình $a\tan^2 x+b\tan x+c=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $\left(k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\right),k\in Z$.

**LỜI GIẢI**

Đặt $t=\tan x$ , vì $x\in\left(k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$ nên $t\in(0;1)$ phương trình đã cho trở thành:

$at^2+bt+c=0 \quad (*)$ với $t\in(0;1)$

Đặt $f(t)=at^2+bt+c$ thì $f(t)$ liên tục trên R.

Ta sẽ chứng minh phương trình $(*)$ luôn có nghiệm $t\in(0;1)$ .

Cách 1: Ta có $f(0).f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{c}{9}(4a+6b+9c)=\frac{c}{9}\left[2(2a+3b+6c)-3c\right]=-\frac{c^2}{3}$.

-Nếu $c=0$ thì $f\left(\frac{2}{3}\right)=0$ do đó phương trình $(*)$ có nghiệm $t=\frac{2}{3}\in(0;1)$

-Nếu $c\neq 0$ thì $f(0).f\left(\frac{2}{3}\right)<0$ do đó phương trình $(*)$ có nghiệm $t\in\left(0;\frac{2}{3}\pi\right)$ do đó phương trình $(*)$ có nghiệm $t\in(0;1)$

Vậy phương trình $a\tan^2 x+b\tan x+c=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $\left(k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\right),k\in Z$.

Cách 2:

Ta có $f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)=c+4\left(\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c\right)+a+b+c=2a+3b+6c=0 \quad (**)$

-Nếu $a=0$ từ giả thiết suy ra $3b+6c=0$ do đó phương trình $(*)$ có nghiệm $t=\frac{1}{2}\in(0;1)$

-Nếu $a\neq 0$ thì $f(x),f\left(\frac{1}{2}\right),f(1)$ không thể đồng thời bằng 0 (vì phương trình bậc hai không có quá hai nghiệm).

Khi đó, từ $(**)$ suy ra trong ba số $f(0),f\left(\frac{1}{2}\right),f(1)$ phải có hai giá trị trái dấu nhau ( Ví nếu cả ba giá trị đó cùng âm hoặc cùng dương thì tổng của chúng không thể bằng 0).

Mà hai giá trị nào trong chúng trái dấu thì theo tính chất hàm liên tục ta đều suy ra phương trình $(*)$ có ít nhất một nghiệm $t\in(0;1)$.

Vậy phương trình $a\tan^2 x+b\tan x+c=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $\left(k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\right),k\in Z.$

**Ví dụ 5:** Cho hàm số $y=f(x)=x^3-\frac{3}{2}m^2x^2+32$ (với m là tham số). Chứng minh rằng với $m<-2\vee m>2$ thì phương trình $f(x)=0$ có đúng ba nghiệm phân biệt $x_1,x_2,x_3$ và thỏa điều kiện $x_1<0<x_2<x_3$.

**LỜI GIẢI**

Ta có $f(0)=32$ , $f(m^2)=\frac{1}{2}(64-m^6)$ khi $m<-2\vee m>2$ thì $\frac{1}{2}(64-m^6)<0$ và $m^2>0$.

Mà $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-\frac{3}{2}m^2x^2+32\right)=-\infty\Rightarrow\exists\alpha<0$ sao cho $f(\alpha)<0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-\frac{3}{2}m^2x^2+32\right)=+\infty\Rightarrow\exists\beta>m^2$ sao cho $f(\beta)>0$.

Do đó ta có $\begin{cases} f(\alpha).f(0)<0\\ f(0).f(m^2)<0\\ f(m^2).f(\beta)<0\end{cases}$. Vì hàm số f(x) xác định và liên tục trên R nên liên tục trên các đoạn $[\alpha;0],[0;m^2],[m^2;\beta]$ nên phương trình $f(x)=0$ có ít nhất ba nghiệm lần lượt thuộc các khoảng $(\alpha;0),(0;m^2),(m^2;\beta)$. Vì f(x) là hàm bậc ba nên nhiều nhất chỉ có ba nghiệm.

Kết luận với $m<-2\vee m>2$ thì phương trình $f(x)=x^3-\frac{3}{2}m^2x^2+32=0$ có đúng ba nghiệm phân biệt thỏa $x_1<0<x_2<x_3$.

**Ví dụ 6:** Chứng minh rằng phương trình $(m^2-m+3)x^{2n}-2x-4=0$ với $n\in ¥ *$ luôn có ít nhất một nghiệm âm với mọi giá trị của tham số m.

**LỜI GIẢI**

Đặt $f(x)=\left(m^2-m+3\right)x^{2n}-2x-4$.

Ta có $f(-2)=\left(m^2-m+3\right)(-2)^{2n}-2(-2)-4=\left(m^2-m+3\right).2^{2n}>0,\forall m\in\mathbb{R}$ , $f(0)=-4<0,\forall m\in\mathbb{R}$ . Từ đó có $f(-2).f(0)<0,\forall m\in\mathbb{R}$ (1). Do hàm số xác định và liên tục trên R nên hàm số liên tục trên đoạn $[-2;0]$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-2;0),\forall m\in\mathbb{R}$ .

Kết luận phương trình $f(x)=0$ luôn có ít nhất một nghiệm âm với mọi giá trị tham số m.

## BÀI TẬP TỔNG HỢP

**Câu 1:** Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x-2 & x\le 2 \\ ax+b & 2<x<6 \\ x+4 & x\ge 6 \end{cases}$

Với giá trị nào của a, b thì hàm số $f(x)$ liên tục trên R?

**LỜI GIẢI**

Hàm số đã cho liên tục tại mọi x khác 2 và khác 6. Hàm số đã cho liên tục trên R khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x=2$ và $x=6$.

+ Tại $x=2$ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2-1=0;\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2a+b;f(2)=0.$

Hàm số liên tục tại $x=2$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)\Leftrightarrow 2a+b=0.$

+ Tại $x=6;\lim\limits_{x\to 6^+} f(x)=6+4=10;\lim\limits_{x\to 6^-} f(x)=6a+b;f(6)=10.$

Hàm số liên tục tại $x=6$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 6^+} f(x)=f(6)\Leftrightarrow 6a+b=10.$

Do đó hàm số đã cho liên tục trên R khi và chỉ khi $\begin{cases} 2a+b=0 \\ 6a+b=10 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=\dfrac{5}{2} \\ b=-5. \end{cases}$

**Câu 2:** Tìm a, b, c để hàm số sau liên tục trên R: $f(x)=\begin{cases} \sin x & x<-\dfrac{\pi}{2} \\ a\sin x+b & -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2} \\ 2+\cos x & x>\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

**LỜI GIẢI**

Hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{\pi}{2}\right),\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right),\left(\dfrac{\pi}{2};+\infty\right)$. Do đó hàm số liên tục trên R khi và chỉ khi hàm số liên tục tại các điểm $x=-\dfrac{\pi}{2},x=\dfrac{\pi}{2}$.

+ Tại $x=-\dfrac{\pi}{2}$ ta có $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-a+b;$

$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^-}\sin x=-1;\ \lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+}(a\sin x+b)=-a+b.$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=-\frac{\pi}{2}$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)} f(x)=f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow -a+b=-1.$

+ Tại $x=\frac{\pi}{2}$, ta có $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a+b;$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}(2+\cos x)=2; \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(a\sin x+b)=a+b.$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=\frac{\pi}{2}$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow a+b=2.$

Do đó hàm đã cho liên tục trên R $\Leftrightarrow \begin{cases}-a+b=-1\\ a+b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{1}{2}\\ a=\frac{3}{2}.\end{cases}$

**Câu 3 : Tìm a để các hàm số sau liên tục tại $x_0$ :**

1). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} & x\neq 2\\ ax+1 & x=2\end{cases}$ tại $x_0=2$

2). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3} & x\neq -3\\ ax+3 & x=-3\end{cases}$ $x_0=-3$

3). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & x<0\\ a+\dfrac{4-x}{x+2} & x\geq 0\end{cases}$ tại $x_0=0$

4). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & x<0\\ a+\dfrac{x^3-3x+1}{x+2} & x\geq 0\end{cases}$ tại $x_0=0$

**LỜI GIẢI**

1). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3} & x\neq 2\\ ax+1 & x=2\end{cases}$ tại $x_0=2$

Ta có: $f(x_0)=f(2)=2a+1$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}{(x+\sqrt{x+2})(4x+1-9)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)(x+\sqrt{x+2})}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x+\sqrt{x+2})}=\dfrac{9}{8}$

Để hàm số liên tục tại $x_0=2$ thì $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow\frac{9}{8}=2a+1\Leftrightarrow a=\frac{1}{16}.$

2). $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3} & x\neq -3\\ ax+3 & x=-3\end{cases}\quad x_0=-3$

Ta có: $f\left(x_0\right)=f\left(-3\right)=ax+3$

Ta có: $\lim\limits_{x\to -3}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\left(x+3\right)\left(x^3-3x^2+3x-9\right)}{\left(x+3\right)\left(x^2+1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3-3x^2+3x-9}{x^2+1}=\dfrac{\left(-3\right)^3-3.\left(-3\right)^2+3.\left(-3\right)-9}{\left(-3\right)^2+1}=-\dfrac{36}{5}$

Để hàm số liên tục tại $x_0=-3$ thì $\lim\limits_{x\to -3}f\left(x\right)=f\left(-3\right)\Leftrightarrow\dfrac{-36}{5}=-3a+3\Leftrightarrow a=\dfrac{17}{5}$.

3). $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & x<0\\ a+\dfrac{4-x}{x+2} & x\geq 0\end{cases}$ tại $x_0=0$.

Có $\lim\limits_{x\to 0^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-x-1-x}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2x}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=\dfrac{-2}{\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0}}=\dfrac{-2}{2}=-1.$

Có $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(a+\dfrac{4-x}{x+2}\right)=a+\dfrac{4-0}{0+2}=a+2$.

Để hàm số liên tục tại $x_0=0$ thì $\lim\limits_{x\to 0^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(x\right)\Leftrightarrow -1=a+2\Leftrightarrow a=-3$.

4). $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x} & x<0\\ a+\dfrac{x^3-3x+1}{x+2} & x\geq 0\end{cases}$ tại $x_0=0$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-x-1-x}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2x}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-2}{\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\right)}=\dfrac{-2}{\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0}}=\dfrac{-2}{2}=-1.$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(a+\dfrac{x^3-3x+1}{x+2}\right)=a+\dfrac{1}{2}$.

Để hàm số liên tục tại $x_0=0$ thì $\lim\limits_{x\to 0^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(x\right)\Leftrightarrow -1=a+\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow a=-\dfrac{3}{2}$.

**Câu 4: Định a và b để các hàm số sau liên tục tại $x_0$:**

1). $f\left(x\right)=\begin{cases}a & x<1\\ \dfrac{\sqrt{x^3-3x+2}}{x^2-6x+5} & x>1\\ b & x=1\end{cases}$ tại $x_0=1$

2). $f(x)=\begin{cases}1 & x=a\\ \dfrac{x^2-a^2}{x-a} & x>a\\ b-2x & x<a\end{cases}$ tại $x_0=a$

**LỜI GIẢI**

1). $f(x)=\begin{cases}a & x<1\\ \dfrac{\sqrt{x^3-3x+2}}{x^2-6x+5} & x>1\\ b & x=1\end{cases}$ tại $x_0=1$

Ta có: $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}a=a$ (a là hằng số)

Ta có: $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x^3-3x+2}}{x^2-6x+5}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{(x-1)^2(x+2)}}{(x-5)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-5}=\dfrac{\sqrt3}{4}$.

Để hàm số liên tục tại $x_0=1$ thì $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)\Leftrightarrow a=b=-\dfrac{\sqrt3}{4}$.

2). $f(x)=\begin{cases}1 & x=a\\ \dfrac{x^2-a^2}{x-a} & x>a\\ b-2x & x<a\end{cases}$ $x_0=a$

Ta có: $f(x_0)=f(a)=1$

Ta có: $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{x^2-a^2}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{(x-a)(x+a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}x+a=2a.$

Ta có: $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}(b-2x)=b-2a$

Để hàm số liên tục tại $x_0=a$ thì $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}2a=1\\ b-2a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac12\\ b=2\end{cases}$.

**Câu 5 : Khảo sát tính liên tục của các hàm số sau :**

a). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{x-1} & x>1\\ x^2+x & x\le1\end{cases}$

b). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x\ne1\\ 4 & \text{khi } x=1\end{cases}$ c). $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1} & x>1\\ \cos(x-1) & x\le1\end{cases}$

**LỜI GIẢI**

a). Tập xác định của f(x) là $D=¡$

Với mọi $x_0\in(1;+\infty)$, ta có $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{x-1}=\dfrac{\sqrt{3x_0+1}-\sqrt{x_0+3}}{x_0-1}=f(x_0)$. Suy ra hàm số f(x) liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$ (1).

Với mọi $x_0 \in (-\infty;1)$, ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\left(x^2+x\right) = x_0^2 + x_0 = f(x_0)$. Suy ra hàm số f(x) liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$ (2).

Xét tính liên tục của hàm số tại $x_0 = 1$.

o $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x+1-x-3}{\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-2}{\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)(x-1)}$

$= \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3.1+1}+\sqrt{1+3}} = \dfrac{1}{2}.$

o $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+x\right) = 1^2+1 = 2.$

o $f(1) = 2$

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. Vậy hàm số f(x) không liên tục tại $x_0 = 1$.

$\Rightarrow$ Hàm số không liên tục trên R.

b). $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

- Xét tính liên tục của hàm số tại $x = 1$

Có $f(1) = 3$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\left(x^2+2\right)}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+2\right) = 3$

Vậy có $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 3 \Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x = 1$ (1).

Với mọi $x_0 \neq 1$ ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} = \dfrac{x_0^3-x_0^2+2x_0-2}{x_0-1} = f(x_0) \Rightarrow$ hàm số liên tục $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

c). $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1} & x > 1 \\ \cos(x-1) & x \leq 1 \end{cases}$

Tập xác định của f(x) là $D = \mathbb{R}$

Với mọi $x_0 \in (1;+\infty)$, ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1} = \dfrac{\sqrt{x_0+3}-\sqrt{3x_0+1}}{x_0-1} = f(x_0)$. Suy ra hàm số f(x) liên tục trên khoảng $(1;+\infty)$ (1).

Với mọi $x_0 \in (-\infty;1)$, ta có $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\cos(x-1) = \cos(x_0-1) = f(x_0)$. Suy ra hàm số f(x) liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$ (2).

Xét tính liên tục của hàm số tại $x_0 = 1$.

o $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3x+1-x-3}{\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x-2}{\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}\right)(x-1)}$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3.1+1}+\sqrt{1+3}} = \dfrac{1}{2}.$

o $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left(x^2+x\right) = 1^2+1 = 2.$

o $f(1) = 2$

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. Vậy hàm số f(x) không liên tục tại $x_0 = 1$.

$\Rightarrow$ Hàm số không liên tục trên R.