GIỚI HẠN DÃY SỐ LÝ THUYẾT VÀ PHƯƠNG PHÁP TÌM GIỚI HẠN DÃY SỐ

A). TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1). ĐỊNH NGHĨA:

ĐỊNH NGHĨA 1: Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 nếu với mỗi số dương nhỏ tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó. Khi đó ta viết $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ hay $\lim(u_n)=0$ hay $u_n \to 0$ khi $n\to+\infty$. Bằng cách sử dụng các kí hiệu toán học, định nghĩa trên có thể viết như sau: $\lim u_n = 0 \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon>0, \exists n_0 : n>n_0 \Rightarrow |u_n|<\varepsilon\right)$.

Một số giới hạn đặc biệt:

a). Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 $\Leftrightarrow$ dãy số $(|u_n|)$ có giới hạn là 0.

b). $\lim 0 = 0$.

c). $\lim \frac{1}{n^k} = 0, (k>0)$.

d). Nếu $|q|<1$ thì $\lim q^n = 0$.

ĐỊNH NGHĨA 2: Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là số thực a nếu $\lim(u_n - a) = 0$. Khi đó ta viết $\lim u_n = a$ hay $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ hay $u_n \to a$ khi $n\to+\infty$. Dãy số có giới hạn là số a hữu hạn gọi là dãy số có giới hạn hữu hạn.

Nhận xét:

a). $\lim u_n = a \Leftrightarrow |u_n - a|$ nhỏ bao nhiêu cũng được với n đủ lớn.

b). Không phải mọi dãy số đều có giới hạn hữu hạn.

Một số giới hạn đặc biệt:

a). $\lim c = c$ (c là hằng số).

b). Nếu $\lim u_n = a$ thì $\lim|u_n| = |a|$.

c). Nếu $u_n \ge 0, (\forall n)$ thì $a>0$ và $\lim\sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

2). ĐỊNH LÍ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN :

Định lí 1 : Với hai dãy số (u_n) và (v_n), nếu $|u_n| < v_n, (\forall n)$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

Định lí 2 :

a). Giả sử $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ và c là hằng số. Khi đó ta có :

- $\lim(u_n + v_n) = a+b$
- $\lim(u_n - v_n) = a-b$
- $\lim(u_n . v_n) = a.b$
- $\lim\frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}, (b\neq 0)$
- $\lim(c.u_n) = c.a$.

b). Cho ba dãy số $(u_n),(v_n)$ và (w_n). Nếu $u_n \le v_n \le w_n, (\forall n)$ và $\lim u_n = \lim w_n = a, (a\in ¡)$ thì $\lim v_n = a$ (gọi định lí kẹp).

c). Điều kiện để một dãy số tăng hoặc dãy số giảm có giới hạn hữu hạn:

Một dãy số tăng và bị chặn trên thì có giới hạn hữu hạn.

Một dãy số giảm và bị chặn dưới thì có giới hạn hữu hạn.

3). TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN:

Cho cấp số nhân (u_n) có công bội q và thỏa $|q|<1$. Khi đó tổng $S=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$ được gọi là tổng vô hạn của cấp số nhân và $S=\lim S_n=\lim\frac{u_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{u_1}{1-q}$.

4). GIỚI HẠN VÔ CỰC:

a). Dãy số có giới hạn $+\infty$: Dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi và chỉ khi với mỗi số dương tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó. Ta viết $\lim(u_n)=+\infty$ hoặc $\lim u_n=+\infty$ hoặc $u_n\to+\infty$.

Ví dụ: $\lim n=+\infty, \lim\sqrt{n}=+\infty, \lim\sqrt[3]{n}=+\infty, \lim n^{\alpha}=+\infty, (\alpha>0)$.

b). Dãy số có giới hạn $-\infty$: Dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi và chỉ khi với mỗi số âm tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều nhỏ hơn số âm đó. Ta viết $\lim(u_n)=-\infty$ hoặc $\lim u_n=-\infty$ hoặc $u_n\to-\infty$.

Chú ý:

• $\lim u_n=-\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n)=+\infty$.

• Các dãy số có giới hạn $+\infty$ hoặc $-\infty$ được gọi chung là các dãy số có giới hạn vô cực hay dần đến vô cực.

• Nếu $\lim|u_n|=+\infty$ thì $\lim\frac{1}{u_n}=0$.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN:

VẤN ĐỀ 1: Chứng minh dãy số có giới hạn là 0.

PHƯƠNG PHÁP:

Cách 1: Áp dụng định nghĩa.

Cách 2: Sử dụng các định lí sau:

* Nếu k là số thực dương thì $\lim\frac{1}{n^k}=0$.

* Với hai dãy số (u_n) và (v_n), nếu $|u_n|\le v_n$ với mọi n và $\lim v_n=0$ thì $\lim u_n=0$.

* Nếu $|q|<1$ thì $\lim q^n=0$.

Ví dụ: Chứng minh các dãy số (u_n) sau đây có giới hạn là 0.

a). $u_n=\frac{(-1)^n}{4n+5}$ b). $u_n=\frac{\cos 4n}{n+3}$ c). $u_n=\frac{1+\cos n^3}{2n+3}$ d). $u_n=\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}$

LỜI GIẢI

a). Với mỗi số dương ε tùy ý, cho trước, ta có $|u_n|=\left|\frac{(-1)^n}{4n+5}\right|=\frac{1}{4n+5}<\varepsilon \Leftrightarrow 4n+5>\frac{1}{\varepsilon}\Leftrightarrow n>\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon}-5\right)$. Suy ra với mỗi số dương cho trước, thì với mọi số tự nhiên $n>\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon}-5\right)$ ta đều có $|u_n|<\varepsilon$. Vậy $\lim u_n=0$.

b). Ta có $\forall n\in ¥ *$ thì $|\cos 4n|\le 1\Rightarrow |u_n|=\left|\frac{\cos 4n}{n+3}\right|\le\left|\frac{1}{n+3}\right|\le\left|\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}$.Áp dụng định lí "Nếu k là một số thực dương cho trước thì $\lim\frac{1}{n^k}=0$" ta được $\lim\frac{1}{n}=0$. Từ đó suy ra $\lim u_n=0$.

c). Ta có $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $\left|\cos n^3\right| \le 1 \Rightarrow \left|u_n\right| = \left|\frac{1+\cos n^3}{2n+3}\right| \le \left|\frac{2}{2n+3}\right| \le \left|\frac{2}{2n}\right| = \frac{1}{n}$. Áp dụng định lí "Nếu k là một số thực dương cho trước thì $\lim\frac{1}{n^k} = 0$" ta được $\lim\frac{1}{n} = 0$. Từ đó suy ra $\lim u_n = 0$.

d). Ta có $\left|u_n\right| = \left|\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right| \le \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Vì $\lim\frac{1}{2^n} = \lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Từ đó suy ra $\lim u_n = 0$.

VẤN ĐỀ 2: Dùng định nghĩa chứng minh dãy số (u_n) có giới hạn L.

PHƯƠNG PHÁP: Chứng minh $\lim\left|u_n - L\right| = 0$.

Ví dụ: Chứng minh:

a). $u_n = \frac{2n+3}{4n+5} = \frac{1}{2}$ b). $\lim\frac{4.3^n - 5.2^n}{6.3^n + 3.2^n} = \frac{2}{3}$ c). $\lim\left(\sqrt{n^2+2n} - n\right) = 1$.

LỜI GIẢI

a). gọi $u_n = \frac{2n+3}{4n+5}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có $\left|u_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n+3}{4n+5} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{8n+10}\right| < \frac{1}{n}$.

Vì $\lim\frac{1}{n} = 0$ nên $\lim\left(u_n - \frac{1}{2}\right) = 0,$ suy ra $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

b). Gọi $u_n = \frac{4.3^n - 5.2^n}{6.3^n + 3.2^n}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có $\left|u_n - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{4.3^n - 5.2^n}{6.3^n + 3.2^n} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{12.3^n - 15.2^n - 12.3^n - 6.2^n}{3(6.3^n + 3.2^n)}\right|$

$$= \left|\frac{-7.2^n}{6.3^n + 3.2^n}\right| = \frac{7.2^n}{6.3^n + 3.2^n} < \frac{7.2^n}{6.3^n} = \frac{7}{6}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Vì $\lim\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ nên $\lim\left(u_n - \frac{2}{3}\right) = 0$. Do đó $\lim u_n = \frac{2}{3}$.

c). Gọi $u_n = \left(\sqrt{n^2+2n} - n\right)$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có $\left|u_n - 1\right| = \left|\sqrt{n^2+2n} - (n+1)\right|$

$$= \left|\frac{\left[\sqrt{n^2+2n} - (n+1)\right]\left[\sqrt{n^2+2n} + (n+1)\right]}{\sqrt{n^2+2n} + (n+1)}\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{n^2+2n}\right)^2 - (n+1)^2}{\sqrt{n^2+2n} + (n+1)}\right|$$

$= \left|\frac{-1}{\sqrt{n^2+2n} + (n+1)}\right| = \frac{1}{\sqrt{n^2+2n} + (n+1)} < \frac{1}{n}$. Vì $\lim\frac{1}{n} = 0$ nên $\lim\left(u_n - 1\right) = 0$. Do đó $\lim u_n = 1$.

VẤN ĐỀ 3: Tìm giới hạn của dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn:

DẠNG 1: u_n là một phân thức hữu tỉ dạng $u_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ (trong đó $P(n), Q(n)$ là hai đa thức của n).

Phương pháp: Chia cả tử và mẫu cho n^k với n^k là lũy thừa có số mũ lớn nhất của $P(n)$ và $Q(n)$ (hoặc rút n^k là lũy thừa có số mũ lớn nhất của $P(n)$ và $Q(n)$ ra làm nhân tử) sau đó áp dụng các định lý về giới hạn.

Ví dụ: Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n = \dfrac{2n^2-3n+1}{5n^2+3}$ b). $u_n = \dfrac{-2n^3+3n^2+4}{n^4+4n^3+n}$ c). $u_n = \dfrac{2n^4+3n^2-n}{(2n+1)(1-3n)(2n^2+1)}$

d). $u_n = \dfrac{1}{n^2+2n} - \dfrac{1}{2n^2+3}$ e). $u_n = \dfrac{(2n-1)^2(3-4n^3)}{(4n+2)^3(2-n)^2}$ f). $u_n = \dfrac{2n\sqrt{n}+1}{n^2+2\sqrt{n}-3}$

LỜI GIẢI

a). Ta thấy n^2 là lũy thừa cao nhất của tử và mẫu, nên chia cả tử và mẫu của u_n cho n^2 được:

$u_n = \dfrac{2n^2-3n+1}{5n^2+3} = \dfrac{\frac{2n^2-3n+1}{n^2}}{\frac{5n^2+3}{n^2}} = \dfrac{2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{5+\frac{3}{n^2}}$. Ta có $\lim\dfrac{3}{n}=0, \lim\dfrac{1}{n^2}=0$ và $\lim\dfrac{3}{n^2}=0$ nên

$\lim u_n = \dfrac{2-0+0}{5+0} = \dfrac{2}{5}$.

b). Dễ dàng thấy n^4 là lũy thừa cao nhất của tử và mẫu, nên chia cả tử và mẫu của u_n cho n^4 được:

$u_n = \dfrac{-2n^3+3n^2+4}{n^4+4n^3+n} = \dfrac{\frac{-2n^3+3n^2+4}{n^4}}{\frac{n^4+4n^3+n}{n^4}} = \dfrac{-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{4}{n^4}}{1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^3}}$. Ta có $\lim\dfrac{2}{n}=0$, $\lim\dfrac{3}{n^2}=0$, $\lim\dfrac{4}{n^4}=0$, $\lim\dfrac{4}{n}=0$

và $\lim\dfrac{1}{n^3}=0$. Do đó $\lim u_n = \dfrac{0+0+0}{1+0+0} = 0$.

c). Có $2n^4+3n^2-n = n^4\left(\dfrac{2n^4+3n^2-n}{n^4}\right) = n^4\left(2+\dfrac{3}{n}-\dfrac{1}{n^3}\right)$, $2n+1 = n\left(\dfrac{2n+1}{n}\right) = n\left(2+\dfrac{1}{n}\right)$,

$1-3n = n\left(\dfrac{1-3n}{n}\right) = n\left(\dfrac{1}{n}-3\right)$ và $2n^2+1 = n^2\left(\dfrac{2n^2+1}{n^2}\right) = n^2\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)$. Từ đó

$u_n = \dfrac{n^4\left(2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^3}\right)}{n\left(2+\frac{1}{n}\right)n\left(\frac{1}{n}-3\right)n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{n^4\left(2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^3}\right)}{n^4\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}-3\right)\left(2+\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^3}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}-3\right)\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}$. Vì

$\lim\dfrac{3}{n}=0$, $\lim\dfrac{1}{n^3}=0$, $\lim\dfrac{1}{n}=0$ và $\lim\dfrac{1}{n^2}=0$. Nên $\lim u_n = \dfrac{2+0-0}{(2+0)(0-3)(2+0)} = -\dfrac{1}{6}$.

d). Bước đầu tiên qui đồng mẫu $u_n = \dfrac{1}{n^2+2n} - \dfrac{1}{2n^2+3} = \dfrac{n^2-2n+3}{(n^2+2n)(2n^2+3)}$.

Ta có $n^2-2n+3=n^2\left(\dfrac{n^2-2n+3}{n^2}\right)=n^2\left(1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)$, $n^2+2n=n^2\left(\dfrac{n^2+2n}{n^2}\right)=n^2\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$ và

$2n^2+3=n^2\left(\dfrac{2n^2+3}{n^2}\right)=n^2\left(2+\dfrac{3}{n^2}\right)$. Từ đó $u_n=\dfrac{n^2\left(1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{2}{n}\right)n^2\left(2+\dfrac{3}{n^2}\right)}=\dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\left(2+\dfrac{3}{n^2}\right)}$. Vì

$\lim\dfrac{2}{n}=0$, $\lim\dfrac{3}{n^2}=0$, $\lim\dfrac{3}{n^2}=0$ và $\lim\dfrac{1}{n^2}=0$. Do đó $\lim u_n=0.\dfrac{1-0+0}{(1+0)(2+0)}=0$.

e). $u_n=\dfrac{(2n-1)^2(3-4n^3)}{(4n+2)^3(2-n)^2}$. Ta có $(2n-1)^2=\left[n\left(\dfrac{2n-1}{n}\right)\right]^2=n^2\left(2-\dfrac{1}{n}\right)^2$, $3-4n^3=n^3\left(\dfrac{3-4n^3}{n^3}\right)$

$=n^3\left(\dfrac{3}{n^3}-4\right)$, $(4n+2)^3=\left[n\left(\dfrac{4n+2}{n}\right)\right]^3=n^3\left(4+\dfrac{2}{n}\right)^3$ và $(2-n)^2=\left[n\left(\dfrac{2-n}{n}\right)\right]^2=n^2\left(\dfrac{2}{n}-1\right)^2$.

Từ đó $u_n=\dfrac{n^2\left(2-\dfrac{1}{n}\right)^2n^3\left(\dfrac{3}{n^3}-4\right)}{n^3\left(4+\dfrac{2}{n}\right)^3n^2\left(\dfrac{2}{n}-1\right)^2}=\dfrac{\left(2-\dfrac{1}{n}\right)^2\left(\dfrac{3}{n^3}-4\right)}{\left(4+\dfrac{2}{n}\right)^3\left(\dfrac{2}{n}-1\right)^2}$, mà $\lim\dfrac{1}{n}=0$, $\lim\dfrac{3}{n^3}=0$, $\lim\dfrac{2}{n}=0$. Do đó

$\lim u_n=\dfrac{(2-0)^2(0-4)}{(4+0)^3(0-2)^2}=-\dfrac{1}{16}$.

f). $u_n=\dfrac{2n\sqrt{n}+1}{n^2+2\sqrt{n}-3}=\dfrac{\dfrac{2n\sqrt{n}+1}{n^2}}{\dfrac{n^2+2\sqrt{n}-3}{n^2}}=\dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{2}{n\sqrt{n}}-\dfrac{3}{n^2}}$. Mà $\lim\dfrac{2}{\sqrt{n}}=0$, $\lim\dfrac{1}{n^2}=0$, $\lim\dfrac{2}{n\sqrt{n}}=0$,

$\lim\dfrac{3}{n^2}=0$.

DẠNG 2: u_n **là một phân thức hữu tỉ dạng** $u_n=\dfrac{P(n)}{Q(n)}$ **(trong đó** $P(n),Q(n)$ **là các biểu thức chứa căn của n).**

Ví dụ: Tìm giới hạn của dãy (u_n) **biết:**

a). $u_n=\dfrac{\sqrt{4n^2-n+1}-n}{\sqrt{9n^2+3n}}$ b). $u_n=\dfrac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{4n-5}}$

c). $u_n=\dfrac{\sqrt{4n^2-1}+\sqrt[3]{8n^3+2n^2-3}}{\sqrt{16n^2+4n}-\sqrt[4]{n^4+1}}$ d). $u_n=\dfrac{\sqrt{n^3+n}+\sqrt[3]{n^3+3n}}{\sqrt[4]{16n^4+1}}$ e).

LỜI GIẢI

a). $u_n = \dfrac{\sqrt{4n^2-n+1}-n}{\sqrt{9n^2+3n}} = \dfrac{\sqrt{n^2\left(\dfrac{4n^2-n+1}{n^2}\right)}-n}{\sqrt{n^2\left(\dfrac{9n^2+3n}{n^2}\right)}} = \dfrac{n\sqrt{4-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}-n}{n\sqrt{9+\dfrac{3}{n}}} = \dfrac{\sqrt{4-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}-1}{\sqrt{9+\dfrac{3}{n}}}$. Vì có $\lim\dfrac{1}{n}=0$,

$\lim\dfrac{1}{n^2}=0$, và $\lim\dfrac{3}{n}=0$. Nên $\lim u_n = \dfrac{\sqrt{4-0+0}-1}{\sqrt{9+0}} = \dfrac{1}{3}$.

b). $u_n = \dfrac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{4n-5}} = \dfrac{\sqrt{n\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)}-\sqrt{n\left(\dfrac{n+3}{n}\right)}}{\sqrt{n\left(\dfrac{4n-5}{n}\right)}} = \dfrac{\sqrt{n}.\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{n}.\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}}{\sqrt{n}.\sqrt{4-\dfrac{5}{n}}} = \dfrac{\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}}{\sqrt{4-\dfrac{5}{n}}}$. Vì có

$\lim\dfrac{1}{n}=0$, $\lim\dfrac{3}{n}=0$ và $\lim\dfrac{5}{n}=0$.

Từ đó có $\lim u_n = \dfrac{\sqrt{2+0}-\sqrt{1+0}}{\sqrt{4-0}} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

c). Ta có $u_n = \dfrac{\sqrt{4n^2-1}+\sqrt[3]{8n^3+2n^2-3}}{\sqrt{16n^2+4n}-\sqrt[4]{n^4+1}} = \dfrac{\sqrt{n^2\left(\dfrac{4n^2-1}{n^2}\right)}+\sqrt[3]{n^3\left(\dfrac{8n^3+2n^2-3}{n^3}\right)}}{\sqrt{n^2\left(\dfrac{16n^2+4n}{n^2}\right)}+\sqrt[4]{n^4\left(\dfrac{n^4+1}{n^4}\right)}}$

$= \dfrac{n.\sqrt{4-\dfrac{1}{n^2}}+n.\sqrt[3]{8+\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^3}}}{n.\sqrt{16+\dfrac{4}{n}}+n.\sqrt{1+\dfrac{1}{n^4}}} = \dfrac{\sqrt{4-\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt[3]{8+\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^3}}}{\sqrt{16+\dfrac{4}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^4}}}$. Vì có $\lim\dfrac{1}{n^2}=0$, $\lim\dfrac{2}{n}=0$, $\lim\dfrac{3}{n^3}=0$, $\lim\dfrac{4}{n}=0$

và $\lim\dfrac{1}{n^4}=0$. Từ đó suy ra $\lim u_n = \dfrac{\sqrt{4-0}+\sqrt[3]{8+0-0}}{\sqrt{16+0}+\sqrt{1+0}} = \dfrac{4}{5}$.

d). Ta có $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt[3]{n^3+3n}}{\sqrt[4]{16n^4+1}} = \dfrac{\sqrt{n^2\left(\dfrac{n^2+n}{n^2}\right)}+\sqrt[3]{n^3\left(\dfrac{n^3+3n}{n^3}\right)}}{\sqrt[4]{n^4\left(\dfrac{16n^4+1}{n^4}\right)}}$

$= \dfrac{n.\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+n.\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n^2}}}{n.\sqrt[4]{16+\dfrac{1}{n^4}}} = \dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt[3]{1+\dfrac{3}{n^2}}}{\sqrt[4]{16+\dfrac{1}{n^4}}}$. Vì có $\lim\dfrac{1}{n}=0$, $\lim\dfrac{3}{n^2}=0$, và $\lim\dfrac{1}{n^4}=0$. Nên

$\lim u_n = \dfrac{\sqrt{1+0}+\sqrt[3]{1+0}}{\sqrt[4]{16+0}} = \dfrac{1}{2}$.

DẠNG 3: u_n **là một phân thức hữu tỉ dạng** $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ **(trong đó** $P(n), Q(n)$ **là các biểu thức chứa hàm mũ** a^n, b^n, c^n**,…. Chia cả tử và mẫu cho** a^n **với a là cơ số lớn nhất).**

Ví dụ: Tìm giới hạn của dãy (u_n) **biết:**

a). $u_n=\dfrac{2^n+4^n}{4^n-3^n}$	b). $u_n=\dfrac{3.2^n-5^n}{5.4^n+6.5^n}$	c). $u_n=\dfrac{4^{n+2}+6^{n+1}}{5^{n-1}+2.6^{n+3}}$
d). $u_n=\dfrac{\sqrt{2}^{n+2}+1}{3^{\frac{n}{2}}+2}$	e). $u_n=\dfrac{(-3)^n-4.5^{n+1}}{2.4^n+3.5^n}$	f). $u_n=\dfrac{2^n-3^n+4.5^{n+2}}{2^{n+1}+3^{n+2}+5^{n+1}}$

LỜI GIẢI

a).Ta có $u_n=\dfrac{2^n+4^n}{4^n-3^n}=\dfrac{\frac{2^n+4^n}{4^n}}{\frac{4^n-3^n}{4^n}}=\dfrac{\frac{2^n}{4^n}+\frac{4^n}{4^n}}{\frac{4^n}{4^n}-\frac{3^n}{4^n}}=\dfrac{\left(\frac{2}{4}\right)^n+1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}$. Ta có $\lim\left(\frac{2}{4}\right)^n=0$ và $\lim\left(\frac{3}{4}\right)^n=0$. Nên

$\lim u_n=\dfrac{0+1}{1-0}=1$.

b). Ta có $u_n=\dfrac{3.2^n-5^n}{5.4^n+6.5^n}=\dfrac{\frac{3.2^n-5^n}{5^n}}{\frac{5.4^n+6.5^n}{5^n}}=\dfrac{\frac{3.2^n}{5^n}-\frac{5^n}{5^n}}{\frac{5.4^n}{5^n}+\frac{6.5^n}{5^n}}=\dfrac{3\left(\frac{2}{5}\right)^n-1}{5\left(\frac{4}{5}\right)^n+6}$. Ta có $\lim\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$ và $\lim\left(\frac{4}{5}\right)^n=0$.

Do đó $\lim u_n=\dfrac{3.0-1}{5.0+6}=-\dfrac{1}{6}$.

c). Ta có $u_n=\dfrac{4^{n+2}+6^{n+1}}{5^{n-1}+2.6^{n+3}}=\dfrac{4^n.4^2+6^n.6}{5^n.5^{-1}+2.6^n.6^3}=\dfrac{\frac{4^n.4^2+6^n.6}{6^n}}{\frac{5^n.5^{-1}+2.6^n.6^3}{6^n}}=\dfrac{\frac{4^n.4^2}{6^n}+\frac{6^n.6}{6^n}}{\frac{5^n.5^{-1}}{6^n}+\frac{2.6^n.6^3}{6^n}}$

$=\dfrac{4^2\left(\frac{4}{6}\right)^n+6}{5^{-1}\left(\frac{5}{6}\right)^n+2.6^3}$. Ta có $\lim\left(\frac{4}{6}\right)^n=0$ và $\lim\left(\frac{5}{6}\right)^n=0$.

Do đó $\lim u_n=\dfrac{4^2.0+6}{5^{-1}.0+2.6^3}=\dfrac{1}{72}$.

d). Ta có $u_n=\dfrac{\sqrt{2}^{n+2}+1}{3^{\frac{n}{2}}+2}=\dfrac{2^{\frac{n}{2}+1}+1}{3^{\frac{n}{2}}+2}=\dfrac{2.2^{\frac{n}{2}}+1}{3^{\frac{n}{2}}+2}=\dfrac{\frac{2.2^{\frac{n}{2}}+1}{3^{\frac{n}{2}}}}{\frac{3^{\frac{n}{2}}+2}{3^{\frac{n}{2}}}}=\dfrac{2.\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}}+\frac{1}{3^{\frac{n}{2}}}}{1+\frac{2}{3^{\frac{n}{2}}}}$. Vì $\left|\frac{2}{3}\right|<1\Rightarrow\lim\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}}=0$,

$\lim\dfrac{1}{3^{\frac{n}{2}}}=0$ và $\lim\dfrac{2}{3^{\frac{n}{2}}}=0$. Do đó $\lim u_n=\dfrac{2.0+0}{1+0}=0$.

e). Ta có : $u_n = \dfrac{(-3)^n - 4.5^{n+1}}{2.4^n + 3.5^n} = \dfrac{(-3)^n - 20.5^n}{2.4^n + 3.5^n} = \dfrac{\dfrac{(-3)^n - 20.5^n}{5^n}}{\dfrac{2.4^n + 3.5^n}{5^n}} = \dfrac{\dfrac{(-3)^n}{5^n} - 20.\dfrac{5^n}{5^n}}{2.\dfrac{4^n}{5^n} + 3.\dfrac{5^n}{5^n}} = \dfrac{\left(-\dfrac{3}{5}\right)^n - 20}{2.\left(\dfrac{4}{5}\right)^n + 3}$, mà

$\lim\left(-\dfrac{3}{5}\right)^n = 0$ và $\lim\left(\dfrac{4}{5}\right)^n = 0$. Do đó $\lim u_n = \dfrac{0-20}{2.0+3} = -\dfrac{20}{3}$.

f). Ta có $u_n = \dfrac{2^n - 3^n + 4.5^{n+2}}{2^{n+1} + 3^{n+2} + 5^{n+1}} = \dfrac{2^n - 3^n + 100.5^n}{2.2^n + 9.3^n + 5.5^n} = \dfrac{\dfrac{2^n - 3^n + 100.5^n}{5^n}}{\dfrac{2.2^n + 9.3^n + 5.5^n}{5^n}}$

$= \dfrac{\dfrac{2^n}{5^n} - \dfrac{3^n}{5^n} + 100.\dfrac{5^n}{5^n}}{2.\dfrac{2^n}{5^n} + 9.\dfrac{3^n}{5^n} + 5.\dfrac{5^n}{5^n}} = \dfrac{\left(\dfrac{2}{5}\right)^n - \left(\dfrac{3}{5}\right)^n + 100}{2.\left(\dfrac{2}{5}\right)^n + 9.\left(\dfrac{3}{5}\right)^n + 5}$. Vì $\lim\left(\dfrac{2}{5}\right)^n = 0$ và $\lim\left(\dfrac{3}{5}\right)^n = 0$ nên

$\lim u_n = \dfrac{0-0+100}{2.0+9.0+5} = 20$.

DẠNG 4 : Nhân lượng liên hợp:

PHƯƠNG PHÁP : Sử dụng các công thức nhân lượng liên hợp sau:

- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \to \left[\begin{array}{l} a-b = \dfrac{a^2-b^2}{a+b} \\ a+b = \dfrac{a^2-b^2}{a-b} \end{array}\right.$
- $a-b = \dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$ • $a+b = \dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}$.
- $\sqrt[3]{a} - b = \dfrac{\left(\sqrt[3]{a}-b\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 + \sqrt[3]{a}.b + b^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 + \sqrt[3]{a}.b + b^2} = \dfrac{a-b^3}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 + \sqrt[3]{a}.b + b^2}$.
- $\sqrt[3]{a} + b = \dfrac{\left(\sqrt[3]{a}+b\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 - \sqrt[3]{a}.b + b^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 - \sqrt[3]{a}.b + b^2} = \dfrac{a+b^3}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 - \sqrt[3]{a}.b + b^2}$
- $a - \sqrt[3]{b} = \dfrac{\left(a-\sqrt[3]{b}\right)\left[a^2 + a.\sqrt[3]{b} + \left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{a^2 + a.\sqrt[3]{b} + \left(\sqrt[3]{b}\right)^2} = \dfrac{a^3-b}{a^2 + a.\sqrt[3]{b} + \left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$
- $a + \sqrt[3]{b} = \dfrac{\left(a+\sqrt[3]{b}\right)\left[a^2 - a.\sqrt[3]{b} + \left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{a^2 - a.\sqrt[3]{b} + \left(\sqrt[3]{b}\right)^2} = \dfrac{a^3+b}{a^2 - a.\sqrt[3]{b} + \left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$

- $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\dfrac{a-b}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2+\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$.
- $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left[\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2\right]}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\dfrac{a+b}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}$

Ví dụ 1: Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n=\sqrt{n^2+3n+5}-n$ b). $u_n=\sqrt{9n^2+3n-4}-3n+2$

c). $u_n=\sqrt[3]{n^3+3n^2}-n$ d). $u_n=\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}-2n+3$

e). $u_n=\sqrt{4n^2+3n+7}-\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}$ f). $\lim\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-\sqrt[3]{n^6+1}\right)$

LỜI GIẢI

a). Ta có $u_n=\sqrt{n^2+3n+5}-n=\dfrac{\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n+5}+n\right)}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}=\dfrac{3n+5}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}$. Và có

$3n+5=n\left(\dfrac{3n+5}{n}\right)=n\left(3+\dfrac{5}{n}\right)$ và $\sqrt{n^2+3n+5}=\sqrt{n^2\left(\dfrac{n^2+3n+5}{n^2}\right)}=n\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}$.

Do đó $u_n=\dfrac{n\left(3+\dfrac{5}{n}\right)}{n\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}+n}=\dfrac{3+\dfrac{5}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}+1}$, vì $\lim\dfrac{5}{n}=0$, $\lim\dfrac{3}{n}=0$ và $\lim\dfrac{5}{n^2}=0$. Nên $\lim u_n=\dfrac{3}{2}$.

NHẬN XÉT : Tại sao phải nhân lượng liên hợp ?

Quay lại ví dụ a) thông thường ta đặt n^k làm nhân tử chung nhưng sao lại phải nhân lượng liên hợp. Bây giờ ta thử làm lại câu a) theo phương pháp đặt n^k trong căn thức thử xem sao ,và sau đó rút ra nhận xét.

Ta có $u_n=\sqrt{n^2+3n+5}-n=\sqrt{n^2\left(\dfrac{n^2+3n+5}{n^2}\right)}-n=n\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}-n=n\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}-1\right)$. Vì

$\lim\dfrac{3}{n}=\lim\dfrac{5}{n^2}=0$ nên $\lim\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}}-1\right)=0$ và $\lim n=+\infty$ do đó $\lim u_n=+\infty.0$ (đây là dạng vô định). Nên cách làm này không là không được rồi, ta phải sử dụng phương pháp nhân lượng liên hợp để khử vô định sau đó cách làm hoàn toàn như dạng 1.

Dấu hiệu nhận biết nhân lượng liên hợp : Để nhận biết một bài tập có nhân lượng liên hợp hay không các bạn chỉ chú ý tới n có mũ cao nhất sau đó đưa ra ngoài dấu căn thức, nếu chúng trừ nhau bằng 0 thì bài này ta phải nhân lượng liên hợp. Cụ thể ta làm lại câu a) $u_n=\sqrt{n^2+3n+5}-n$ biểu thức trong căn thức có n^2 là cao nhất và ta quan tâm đến « nó », những thừa số sau bỏ hết có nghĩa xem $u_n=\sqrt{n^2}-n=n-n=0$ (nên các bạn phải nhân lượng liên hợp). Chúng ta xem thử bài này có nhân lượng liên hợp hay không $u_n=\sqrt{2n^2+3n+5}-n$ chúng ta cũng quan tâm đến số hạng có chứa mũ có nhất đó là $2n^2$, có nghĩa u_n được viết lại $u_n=\sqrt{2n^2}-n=n\sqrt{2}-n=n\left(\sqrt{2}-1\right)$ ta có $\sqrt{2}-1\neq 0$ nên bài này được làm trực tiếp không cần nhân lượng liên hợp. Cụ thể bài này ta làm như sau

$u_n=\sqrt{2n^2+3n+5}-n=\sqrt{n^2\left(\frac{2n^2+3n+5}{n^2}\right)}-n=n\sqrt{2+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}-n=n\left(\sqrt{2+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}-1\right)$ do

$\lim\frac{3}{n}=\lim\frac{5}{n^2}=0$ nên $\lim\left(\sqrt{2+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}-1\right)=\sqrt{2}-1$ và $\lim n=+\infty$ do đó $\lim u_n=+\infty.\left(\sqrt{2}-1\right)=+\infty$ (cụ thể các bạn xem phương pháp tìm giới hạn dãy số có giới hạn vô cực).

b). $u_n=\sqrt{9n^2+3n-4}-3n+2=\frac{\left(\sqrt{9n^2+3n-4}-3n\right)\left(\sqrt{9n^2+3n-4}+3n\right)}{\sqrt{9n^2+3n-4}+3n}+2=\frac{3n-4}{\sqrt{9n^2+3n-4}+3n}+2$. Ta có $3n-2=n\left(\frac{3n-2}{n}\right)=n\left(3-\frac{2}{n}\right)$ và $\sqrt{9n^2+3n-4}=\sqrt{n^2\left(\frac{9n^2+3n-4}{n^2}\right)}=n\sqrt{9+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}$. Từ đó suy ra

$u_n=\frac{n\left(3-\frac{2}{n}\right)}{n\sqrt{9+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}+3n}+2=\frac{3-\frac{2}{n}}{\sqrt{9+\frac{3}{n}-\frac{4}{n^2}}+3}+2$, vì $\lim\frac{2}{n}=0,\ \lim\frac{3}{n}=0$ và $\lim\frac{4}{n^2}=0$. Nên

$\lim u_n=\frac{3-0}{\sqrt{9+0-0}+3}=\frac{1}{2}$.

c). $u_n=\sqrt[3]{n^3+3n^2}-n=\frac{\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}-n\right)\left[\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}\right)^2+n.\sqrt[3]{n^3+3n^2}+n^2\right]}{\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}\right)^2+n.\sqrt[3]{n^3+3n^2}+n^2}$

$=\frac{3n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}\right)^2+n.\sqrt[3]{n^3+3n^2}+n^2}$. Ta có $\sqrt[3]{n^3+3n^2}=\sqrt[3]{n^3\left(\frac{n^3+3n^2}{n^3}\right)}=n.\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}}$. Do đó

$u_n=\frac{3n^2}{n^2\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}}\right)^2+n^2.\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}}+n^2}=\frac{3}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}}+1}$, ta có $\lim\frac{3}{n}=0$. Nên $\lim u_n=1$

d). $u_n=\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}-2n+3$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}-2n\right)\left[\left(\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}\right)^2+2n.\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}+4n^2\right]}{\left(\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}\right)^2+2n.\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}+4n^2}+3$$

$$=\frac{4n^2+2}{\left(\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}\right)^2+2n.\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}+4n^2}+3.$$

Ta có $\sqrt[3]{8n^3+4n^2+2}=\sqrt[3]{n^3\left(\dfrac{8n^3+4n^2+2}{n^3}\right)}=n\sqrt[3]{8+\dfrac{4}{n}+\dfrac{2}{n^3}}$. Do đó

$$u_n=\frac{n^2\left(4+\dfrac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(\sqrt[3]{8+\dfrac{4}{n}+\dfrac{2}{n^3}}\right)^2+2n^2.\sqrt[3]{8+\dfrac{4}{n}+\dfrac{2}{n^3}}+4n^2}=\frac{4+\dfrac{2}{n^2}}{\left(\sqrt[3]{8+\dfrac{4}{n}+\dfrac{2}{n^3}}\right)^2+2.\sqrt[3]{8+\dfrac{4}{n}+\dfrac{2}{n^3}}+4}$$. Vì $\lim\dfrac{2}{n^2}=0$,

$\lim\dfrac{4}{n}=0$ và $\lim\dfrac{2}{n^3}=0$. Nên $\lim u_n=\dfrac{1}{3}$.

e). $u_n=\sqrt{4n^2+3n+7}-\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}=\left(\sqrt{4n^2+3n+7}-2n\right)+\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)$

- Tính $\lim\left(\sqrt{4n^2+3n+7}-2n\right)=\lim\dfrac{3n+7}{\sqrt{4n^2+3n+7}+2n}=\lim\dfrac{3+\dfrac{7}{n}}{\sqrt{4+\dfrac{3}{n}+\dfrac{7}{n^2}}+2}=\dfrac{3}{4}$

- Tính $\lim\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)$

$$=\lim\frac{\left(2n-\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)\left[4n^2+2n.\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}+\left(\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)^2\right]}{4n^2+2n.\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}+\left(\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)^2}$$

$$=\lim\frac{-5n^2-1}{4n^2+2n.\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}+\left(\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}\right)^2}\quad(1)$$

Có $\sqrt[3]{8n^3+5n^2+1}=\sqrt[3]{n^3\left(\dfrac{8n^3+5n^2+1}{n^3}\right)}=n.\sqrt[3]{8+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^3}}$

Nên $(1)\Leftrightarrow\lim\dfrac{n^2\left(-5-\dfrac{1}{n^2}\right)}{4n^2+2n^2.\sqrt[3]{8+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^3}}+n^2.\left(\sqrt[3]{8+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^3}}\right)^2}$

$$=\lim\frac{-5-\dfrac{1}{n^2}}{4+2.\sqrt[3]{8+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^3}}+\left(\sqrt[3]{8+\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^3}}\right)^2}=-\frac{5}{12}.$$

Từ đó suy ra $\lim u_n=\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{12}=\dfrac{1}{3}$.

f). $\lim\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-\sqrt[3]{n^6+1}\right)=\lim\left[\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-n^2\right)-\left(\sqrt[3]{n^6+1}-n^2\right)\right]$

• Tính $\lim\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-n^2\right)=\lim\left(\dfrac{n^2+1}{\sqrt{n^4+n^2+1}+n^2}\right)=\lim\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^4}}+1}\right)=\dfrac{1}{2}$.

• Tính $\lim(\sqrt[3]{n^6+1}-n^2)=\lim\dfrac{1}{\sqrt[3]{(n^6+1)^2}+n^2\sqrt[3]{(n^6+1)}+n^4}=0$

Do đó $\lim\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-\sqrt[3]{n^6+1}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 2: Tìm các giới hạn sau:

a). $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+n}-n}{\sqrt{4n^2+3n}-2n}$ b). $u_n=\dfrac{2n-\sqrt{4n^2+n}}{n+\sqrt[3]{4n^2-n^3}}$

c). $\lim\left(2n-\sqrt{9n^2+n}+\sqrt{n^2+2n}\right)$ d). $\lim\left(\sqrt{n^2-2n}+2\sqrt[3]{n^2-8n^3}+3\sqrt{n^2+n}\right)$

LỜI GIẢI

a). Ta có $\sqrt{n^2+n}-n=\dfrac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\dfrac{n}{n\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+n}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}$ và

$$\sqrt{4n^2+3n}-2n=\frac{\left(\sqrt{4n^2+3n}-2n\right)\left(\sqrt{4n^2+3n}+2n\right)}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}=\frac{3n}{n\sqrt{4+\dfrac{3}{n}}+2n}=\frac{3}{\sqrt{4+\dfrac{3}{n}}+2}.$$

Do đó $\lim u_n=\lim\dfrac{\sqrt{4+\dfrac{3}{n}}+2}{3\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1\right)}=\dfrac{2}{3}$.

b). $\lim\dfrac{2n-\sqrt{4n^2+n}}{n+\sqrt[3]{4n-n^3}}$

Ta có $2n-\sqrt{4n^2+n}$

$$=\frac{\left(2n-\sqrt{4n^2+n}\right)\left(2n+\sqrt{4n^2+n}\right)}{2n+\sqrt{4n^2+n}}=\frac{-n}{2n+\sqrt{4n^2+n}}=\frac{-1}{2+\sqrt{4+\dfrac{1}{n}}}$$

và $n+\sqrt[3]{4n^2-n^3}=\dfrac{\left(n+\sqrt[3]{4n^2-n^3}\right)\left[n^2-n.\sqrt[3]{4n^2-n^3}+\left(\sqrt[3]{4n^2-n^3}\right)^2\right]}{n^2-n.\sqrt[3]{4n^2-n^3}+\left(\sqrt[3]{4n^2-n^3}\right)^2}$

$=\dfrac{4n^2}{n^2-n.\sqrt[3]{n^3\left(\dfrac{4n^2-n^3}{n^3}\right)}+\left(\sqrt[3]{n^3\left(\dfrac{4n^2-n^3}{n^3}\right)}\right)^2}=\dfrac{4n^2}{n^2-n^2.\sqrt[3]{\dfrac{4}{n}-1}+n^2\left(\sqrt[3]{\dfrac{4}{n}-1}\right)^2}$

$=\dfrac{4n^2}{n^2\left[1-\sqrt[3]{\dfrac{4}{n}-1}+\left(\sqrt[3]{\dfrac{4}{n}-1}\right)^2\right]}=\dfrac{4}{1-\sqrt[3]{\dfrac{4}{n}-1}+\left(\sqrt[3]{\dfrac{4}{n}-1}\right)^2}$.

Do đó $\lim u_n=\lim-\dfrac{1-\sqrt[3]{\dfrac{4}{n}-1}+\left(\sqrt[3]{\dfrac{4}{n}-1}\right)^2}{4\left(2+\sqrt{4+\dfrac{1}{n}}\right)}=-\dfrac{3}{16}$.

c). $u_n=2n-\sqrt{9n^2+n}+\sqrt{n^2+2n}=\left(3n-\sqrt{9n^2+n}\right)+\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)$.

Tính $\lim\left(3n-\sqrt{9n^2+n}\right)=\lim\dfrac{\left(3n-\sqrt{9n^2+n}\right)\left(3n+\sqrt{9n^2+n}\right)}{\left(3n+\sqrt{9n^2+n}\right)}$

$=\lim\dfrac{-n}{3n+\sqrt{9n^2+n}}=\lim\dfrac{-n}{3n+\sqrt{n^2\left(\dfrac{9n^2+n}{n^2}\right)}}$

$=\lim\dfrac{-n}{3n+n\sqrt{9+\dfrac{1}{n}}}=\lim\dfrac{-n}{n\left(3+\sqrt{9+\dfrac{1}{n}}\right)}=\lim\dfrac{-1}{3+\sqrt{9+\dfrac{1}{n}}}=-\dfrac{1}{6}$

Và $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)=\lim\dfrac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$

$=\lim\dfrac{2n}{\sqrt{n^2\left(\dfrac{n^2+2n}{n^2}\right)}+n}=\lim\dfrac{2n}{n\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+n}=\lim\dfrac{2n}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1\right)}=\lim\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1}=1$.

Do đó $\lim u_n=-\dfrac{1}{6}+1=\dfrac{5}{6}$.

d). $u_n=\sqrt{n^2-2n}+2\sqrt[3]{n^2-8n^3}+3\sqrt{n^2+n}=\left(\sqrt{n^2-2n}-n\right)+\left(2\sqrt[3]{n^2-8n^3}+4n\right)$

$+\left(3\sqrt{n^2+n}-3n\right)=\left(\sqrt{n^2-2n}-n\right)+2\left(\sqrt[3]{n^2-8n^3}+2n\right)+3\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$

• Tính $\lim\left(\sqrt{n^2-2n}-n\right)=\lim\dfrac{\left(\sqrt{n^2-2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2-2n}+n\right)}{\sqrt{n^2-2n}+n}=\lim\dfrac{-2n}{\sqrt{n^2-2n}+n}$

$=\lim\dfrac{-2n}{\sqrt{n^2\left(\dfrac{n^2-2n}{n^2}\right)}+n}=\lim\dfrac{-2n}{n\sqrt{1-\dfrac{2}{n}}+n}=\lim\dfrac{-2n}{n\left(\sqrt{1-\dfrac{2}{n}}+1\right)}=\lim\dfrac{-2}{\sqrt{1-\dfrac{2}{n}}+1}=-1$.

• Tính $\lim\left(\sqrt[3]{n^2-8n^3}+2n\right)$

$=\lim\dfrac{\left(\sqrt[3]{n^2-8n^3}+2n\right)\left[\left(\sqrt[3]{n^2-8n^3}\right)^2-2n.\sqrt[3]{n^2-8n^3}+4n^2\right]}{\left(\sqrt[3]{n^2-8n^3}\right)^2-2n.\sqrt[3]{n^2-8n^3}+4n^2}$

$=\lim\dfrac{n^2}{\left(\sqrt[3]{n^2-8n^3}\right)^2-2n.\sqrt[3]{n^2-8n^3}+4n^2}$ (1)

Có $\sqrt[3]{n^2-8n^3}=\sqrt[3]{n^3\left(\dfrac{n^2-8n^3}{n^3}\right)}=n.\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}-8}\Rightarrow\left(\sqrt[3]{n^2-8n^3}\right)^2=n^2\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}-8}\right)^2$

Do đó $(1)\Leftrightarrow\lim\dfrac{n^2}{n^2\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}-8}\right)^2-2n^2.\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}-8}+4n^2}=\lim\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}-8}\right)^2-\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}-8}+4}=\dfrac{1}{12}$.

• Tính $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim\dfrac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$

$=\lim\dfrac{n}{\sqrt{n^2\left(\dfrac{n^2+n}{n^2}\right)}+n}=\lim\dfrac{n}{n\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+n}=\lim\dfrac{n}{n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1\right)}=\lim\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}=\dfrac{1}{2}$.

Từ đó suy ra $\lim u_n=-1+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{5}{12}$.

Ví dụ 3 : Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n=\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$ b). $u_n=\dfrac{1}{1.4}+\dfrac{1}{4.7}+\dfrac{1}{7.10}\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

c). $u_n=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)...\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ d). $u_n=\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{3n^2+4}$

e). $u_n=\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n(n+1)(n+2)}$ f). $\lim\left(\dfrac{1}{1.2.3}+\dfrac{1}{2.3.4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$

g). $\lim\dfrac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4+4n^3+1}$ h). $\lim\left(\dfrac{2.1^2+3.2^2+\cdots+(n+1)n^2+n(n+1)^2}{n^4}\right)$

LỜI GIẢI

a). Ta có $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k+1-k}{k(k+1)}=\frac{k+1}{k(k+1)}-\frac{k}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1},(\forall k=1,2,...,n)$. Từ đó

$u_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$.

Nên $\lim u_n=\lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\lim 1-\lim\frac{1}{n+1}=1-0=1$.

b). Ta có $\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3k+1)-(3k-2)}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{3k+1}{(3k-2)(3k+1)}-\frac{3k-2}{(3k-2)(3k+1)}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right),(\forall k=1,2,3...,n)$. Từ đó $u_n=\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$, có $\lim\frac{1}{3n+1}=0$. Do đó

$\lim u_n=\frac{1}{3}(1-0)=\frac{1}{3}$.

c). $\forall k\ge 2$ ta có $1-\frac{1}{k^2}=\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$. Do đó $u_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$=\frac{1.3}{2^2}\cdot\frac{2.4}{3^2}\cdot\frac{3.5}{4^2}\cdot\frac{4.6}{5^2}\cdots\frac{(n-3)(n-1)}{(n-2)^2}\cdot\frac{(n-2)n}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}$.

Nên $\lim u_n=\lim\frac{n+1}{2n}=\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}$.

d). $u_n=\frac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{3n^2+4}$.

Ta có dãy số $1+3+5+\cdots+(2n+1)$ là một cấp số cộng với $u_1=1$ công sai $d=3-1=2$ và số hạng tổng quát $u_m=2n+1\Leftrightarrow u_1+(m-1)d=2n+1\Leftrightarrow 1+(m-1).2=2n+1\Leftrightarrow m=n+1$, nên tổng của dãy số trên là

$S=\frac{m}{2}(u_1+u_m)=\frac{n+1}{2}(1+2n+1)=(n+1)^2$. Từ đó $u_n=\frac{(n+1)^2}{3n^2+4}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{3+\frac{4}{n^2}}$ có $\lim\frac{1}{n}=0$ và $\lim\frac{4}{n^2}=0$

từ đó suy ra $\lim u_n=\frac{1}{3}$.

e). $u_n=\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n(n+1)(n+2)}$. Ta có tổng $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (được chứng minh bằng phương pháp quy nạp). Nên $u_n=\frac{2n+1}{6(n+2)}=\frac{2+\frac{1}{n}}{6\left(1+\frac{2}{n}\right)}$ vì $\lim\frac{1}{n}=\lim\frac{2}{n}=0$ do đó $\lim u_n=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

f). Ta có $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$ (Chứng minh dựa vào nguyên lý quy nạp). Do đó $L=\lim\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\lim\frac{1}{4}-\lim\frac{1}{2(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$.

g). Ta có $1^3+2^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ (chứng minh bằng phương pháp quy nạp). Do đó

$$L=\lim\frac{n^2(n+1)^2}{4(n^4+4n^3+1)}=\lim\frac{n^2\left[n\left(\frac{n+1}{n}\right)\right]^2}{4n^4\left(\frac{n^4+4n^3+1}{n^4}\right)}=\lim\frac{n^4\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{4n^4\left(1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^4}\right)}$$

$=\lim\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{4\left(1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^4}\right)}$. Vì $\lim\frac{1}{n}=\lim\frac{4}{n}=\lim\frac{1}{n^4}=0$ nên $L=\frac{1}{4}$.

h). Ta có $2.1^2+3.2^2+\cdots+(n+1)n^2+n(n+1)^2=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

Do đó $L=\lim\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4n^4}=\lim\dfrac{n.n\left(1+\frac{1}{n}\right)n\left(1+\frac{2}{n}\right)n\left(1+\frac{3}{n}\right)}{4n^4}=\lim\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)}{4}$ có $\lim\frac{1}{n}=\lim\frac{2}{n}=\lim\frac{3}{n}=0$ nên $L=\frac{1}{4}$.

DẠNG 5 : TÍNH GIỚI HẠN DỰA VÀO ĐỊNH LÍ KẸP:

PHƯƠNG PHÁP: Dựa vào định lí: Cho ba dãy số $(u_n),(v_n)$ và (w_n). Nếu $u_n\le v_n\le w_n,(\forall n)$ và $\lim u_n=\lim w_n=a,(a\in \mathbb{R})$ thì $\lim v_n=a$.

Ví dụ: Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}$ b). $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

c). $u_n=\dfrac{1.3.5.7....(2n-1)}{2.4.6...2n},(n\in\mathbb{N}^*)$ d). $u_n=\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

LỜI GIẢI

a). Ta có $\dfrac{2k-1}{2k}=\dfrac{2k-1}{\sqrt{4k^2}}\le\dfrac{2k-1}{\sqrt{4k^2-1}}=\sqrt{\dfrac{2k-1}{2k+1}},(\forall k\in\mathbb{N}^*)$. Từ đó ta có:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}\le\sqrt{\frac{1}{3}}\\ \frac{3}{4}\le\sqrt{\frac{3}{5}}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \frac{2n-1}{2n}\le\sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\le\sqrt{\frac{1}{3}}.\sqrt{\frac{3}{5}}...\sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}\Leftrightarrow u_n\le\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Do đó $|u_n|\le\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}},\forall n$. Mà $\lim\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$ do đó $\lim u_n=0$.

b). Ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} < \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

…………………

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên, vế theo vế ta được $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le u_n < 1, \left(\forall n \in ¥^*\right)$.

Mà $\lim \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$ và $\lim 1 = 1$. Từ đó suy ra $\lim u_n = 1$.

c). Rõ ràng $u_n > 0, \forall n \in ¥^*$ do đó $\left(u_n\right)^2 > 0, \forall n \in ¥^*$. Có

$$\left(u_n\right)^2 = \frac{1^2.3^2.5^2.7^2....\left(2n-1\right)^2}{2^2.4^2.6^2...(2n)^2} < \frac{1^2.3^2.5^2.7^2....\left(2n-1\right)^2}{\left(2^2-1\right)\left(4^2-1\right)\left(6^2-1\right)...\left[(2n)^2-1\right]}$$

$$= \frac{1^2.3^2.5^2.7^2....\left(2n-1\right)^2}{1.3.3.5.5.7....(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n+1}.$$

Do đó ta có $\forall n \in ¥^*$ thì $0 < \left(u_n\right)^2 < \frac{1}{2n+1}$. Mà $\lim 0 = 0$ và $\lim \frac{1}{2n+1} = 0$ nên $\lim \left(u_n\right)^2 = 0$. Từ đó suy ra $\lim u_n = 0$.

d). Dễ dàng chứng minh $\frac{3}{2}\sqrt{k} < \left(k+1\right)\sqrt{k+1} - k\sqrt{k} < \frac{3}{2}\sqrt{k+1}$.Áp dụng với $k = 1,2,3,...,n$ được :

$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n} < \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n}\left[\left(k+1\right)\sqrt{k+1} - k\sqrt{k}\right] = \frac{2}{3}\left[\left(n+1\right)\sqrt{k+1} - 1\right]$ (1) và

$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n} > \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\left[k\sqrt{k} - \left(k-1\right)\sqrt{k-1}\right] > \frac{2}{3}n\sqrt{n}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{2}{3} < 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n} < \frac{2}{3}\frac{\left(n+1\right)\sqrt{n+1}-1}{n\sqrt{n}}$. Mà $\lim \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ và

$\lim \frac{2}{3}\frac{\left(n+1\right)\sqrt{n+1}-1}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}$ do đó $\lim\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}\right) = \frac{2}{3}$.

DẠNG 6: u_n được xác định bởi một công thức truy hồi.

Phương pháp:

Tìm công thức tổng quát của u_n theo n, sau đó tìm $\lim u_n$.

Chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn (có nghĩa chứng minh dãy số tăng và bị chặn trên hoặc dãy số giảm và bị chặn dưới) sau đó dựa vào hệ thức truy hồi để tìm giới hạn.

Ví dụ 1: Cho dãy số $\left(u_n\right)$ xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 2013 \\ u_{n+1} = \sqrt[n+1]{u_n^n + \frac{1}{2013^n}} \quad (n \ge 1) \end{cases}$

Tìm công thức số hạng tổng quát và giới hạn dãy số $\left(u_n\right)$?

LỜI GIẢI

Ta có $u_n > 0, \forall n \in N^*$ và $u_{n+1}^{n+1} = u_n^n + \frac{1}{2013^n} \Rightarrow u_{n+1}^{n+1} - u_n^n = \frac{1}{2013^n}$

Do đó: $u_2^2 - u_1^1 = \frac{1}{2013^1}$

$u_3^3 - u_2^2 = \frac{1}{2013^2}$

...

$u_n^n - u_{n-1}^{n-1} = \frac{1}{2013^{n-1}}$

Suy ra: $u_n^n - u_1^1 = \frac{1}{2013^1} + \frac{1}{2013^2} + ... + \frac{1}{2013^{n-1}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2013}\right)^{n-1}}{2012}$

Vậy $u_n = \sqrt[n]{2013 + \frac{1-\left(\frac{1}{2013}\right)^{n-1}}{2012}}$

$$1 < u_n = \sqrt[n]{2013 + \frac{1-\left(\frac{1}{2013}\right)^{n-1}}{2012}} < \sqrt[n]{2014} < \frac{\overbrace{1+1+...+1+2014}^{n}}{n} = 1 + \frac{2013}{n} \text{ (Cô si)}$$

Mặt khác $\lim\left(1+\frac{2013}{n}\right) = 1$. Vậy $\lim u_n = 1$

Ví dụ 2 : Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 6 \\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Tìm $\lim \frac{u_n}{3.2^n}$.

LỜI GIẢI

Ta có

$u_0 = 1 = -4 + 5.2^0$

$u_1 = 6 = -4 + 5.2^1$

$u_2 = 16 = -4 + 5.2^2$

$u_3 = 36 = -4 + 5.2^3$

……….

$u_n = -4 + 5.2^n, \forall n \in \mathbb{N}$

Sử dụng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $u_n = -4 + 5.2^n, \forall n \in \mathbb{N}$ là số tổng quát của dãy số (u_n).

Do đó $\lim \frac{u_n}{3.2^n} = \lim \frac{-4+5.2^n}{3.2^n} = \lim \frac{-4.\frac{1}{2^n}+5}{3} = \frac{5}{3}$.

Ví dụ 3: Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 1,\ u_2 = 3 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 1,\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n^2}$.

LỜI GIẢI

Ta có $u_{n+2}-u_{n+1}=u_{n+1}-u_n+1,\ n\in\mathbb{N}^*$. suy ra $\{u_{n+2}-u_{n+1}\}$ lập thành một cấp số cộng có công sai bằng 1 nên $u_{n+2}-u_{n+1}=u_2-u_1+n.1=n+2$ (1)

Từ (1) ta được $u_n-u_1=u_n-u_{n-1}+u_{n-1}-u_{n-2}+...+u_2-u_1=n+n-1+...+2$

$\Rightarrow u_n=1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$. Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n^2}=\frac{1}{2}$.

DẠNG 7: DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN VÔ CỰC:

Ví dụ: Tìm giới hạn của dãy (u_n) biết:

a). $u_n=3n^3+2n^2-2$ b). $u_n=-2n^4+3n^3+n$ c). $u_n=\sqrt{\frac{4n^4+2n^3+1}{n^2+1}}$

d). $u_n=4^n+2.(-3)^{n+1}$ e). $u_n=n\cos\frac{n^2\pi}{10}-4n^2$ f). $u_n=\frac{\sqrt{n^4+4n^2-1}-2n^2}{\sqrt{n^3+3n}-2n}$.

LỜI GIẢI

a). Ta có $u_n=3n^3+2n^2-2=n^3\left(3+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^3}\right)$. Có $\lim\frac{2}{n}=0,\lim\frac{2}{n^3}=0$ nên $\lim\left(3+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^3}\right)=3$ và $\lim n^3=+\infty$. Từ đó suy ra $\lim u_n=+\infty$.

b). Ta có $u_n=-2n^4+3n^3+n=n^4\left(-2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}\right)$. Vì $\lim\frac{3}{n}=0,\lim\frac{1}{n^3}=0$ nên $\lim\left(-2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}\right)=-2$ và $\lim n^4=+\infty$. Từ đó suy ra $\lim u_n=-\infty$.

c). Ta có $u_n=\sqrt{\frac{4n^4+2n^3+1}{n^2+1}}=\sqrt{\frac{n^4\left(4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^4}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}}=\sqrt{\frac{n^2\left(4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^4}\right)}{1+\frac{1}{n^2}}}=n.\sqrt{\frac{4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^4}}{1+\frac{1}{n^2}}}$. Vì $\lim\frac{2}{n}=0$, $\lim\frac{1}{n^4}=0$ và $\lim\frac{1}{n^2}=0$ nên $\lim\sqrt{\frac{4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^4}}{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{\sqrt{4}}{1}=2$ và có $\lim n=+\infty$. Từ đó suy ra $\lim u_n=+\infty$.

d). Ta có $u_n = 4^n + 2.(-3)^{n+1} = 4^n - 6.(-3)^n = 4^n\left(1 - 6.\frac{(-3)^n}{4^n}\right) = 4^n\left[1 - 6\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right]$. Vì $\lim\left(-\frac{3}{4}\right)^n = 0$ nên $\lim\left[1 - 6\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right] = 1 - 6.0 = 1$ ngoài ra $\lim 4^n = +\infty$. Từ đó có $\lim u_n = +\infty$.

e). Ta có $u_n = n\cos\frac{n^2\pi}{10} - 4n^2 = n^2\left(\frac{\cos\frac{n^2\pi}{10}}{n} - 4\right)$. Vì $\left|\frac{\cos\frac{n^2\pi}{10}}{n}\right| \le \frac{1}{n}$ mà $\lim\frac{1}{n} = 0$ nên $\lim\frac{\cos\frac{n^2\pi}{10}}{n} = 0$ do đó $\lim\left(\frac{\cos\frac{n^2\pi}{10}}{n} - 4\right) = 0 - 4 = -4$ (1). Ngoài ra $\lim n^2 = +\infty$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\lim u_n = -\infty$.

f). Ta có $u_n = \frac{\sqrt{n^4 + 4n^2 - 1} - 2n^2}{\sqrt{n^3 + 3n} - 2n} = \frac{\sqrt{n^4\left(\frac{n^4 + 4n^2 - 1}{n^4}\right)} - 2n^2}{\sqrt{n^3\left(\frac{n^3 + 3n}{n^3}\right)} - 2n} = \frac{n^2\sqrt{1 + \frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^4}} - 2n^2}{n\sqrt{n}\sqrt{1 + \frac{3}{n^2}} - 2n}$

$= \frac{n^2\left(\sqrt{1 + \frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^4}} - 2\right)}{n\sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{3}{n^2}} - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^4}} - 2\right)}{\sqrt{1 + \frac{3}{n^2}} - \frac{2}{\sqrt{n}}}$. Ta có $\lim\frac{4}{n^2} = 0$, $\lim\frac{1}{n^4} = 0$, $\lim\frac{3}{n^2} = 0$ và $\lim\frac{2}{\sqrt{n}} = 0$

do đó $\lim\frac{\sqrt{1 + \frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^4}} - 2}{\sqrt{1 + \frac{3}{n^2}} - \frac{2}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{1 + 0 - 0} - 2}{\sqrt{1 + 0} - 0} = -1$ (1). Ngoài ra có $\lim\sqrt{n} = +\infty$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\lim u_n = -\infty$.