DÃY SỐ

TÓM TẮT GIÁO KHOA.

1). Dãy số: Một hàm số u xác định trên tập hợp các số nguyên dương N* được gọi là một dãy số vô hạn (hay gọi tắt là là dãy số). Mỗi giá trị của hàm số u được gọi là một số hạng của dãy số, $u(1)$ được gọi là số hạng thứ nhất (hay số hạng đầu), $u(2)$ được gọi là số hạng thứ hai… Người ta thường kí hiệu các giá trị $u(1), u(2)$ …tương ứng bởi $u_1, u_2, \ldots$

2).Người ta thường kí hiệu dãy số $u = u(n)$ bởi (u_n) và gọi u_n là số hạng tổng quát của dãy số đó. Người ta cũng thường viết dãy số (u_n) dưới dạng khai triển: $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ Chú ý: Người ta cũng gọi một hàm số u xác định trên tập hợp gồm m số nguyên dương đầu tiên(m tùy ý thuộc N*) là một dãy số. Rõ ràng, dãy số trong trường hợp này chỉ có hữu hạn số hạng (m số hạng: $u_1, u_2, ..., u_m$). Vì thế, người ta còn gọi nó là dãy số hữu hạn, u_1 gọi là số hạng đầu và u_m gọi là số hạng cuối.

3). Các cách cho một dãy số:

Cách 1: Cho dãy số bởi công thức của số hạng tổng quát.

Ví dụ: Cho dãy (u_n) với $u_n = 2n^2 - 3n + 2$

Cách 2: Cho dãy số bởi hệ thức truy hồi (hay quy nạp):

- Cho số hạng thứ nhất u_1 (hoặc một vài số hạng đầu).
- Với $n \ge 2$, cho một công thức tính u_n nếu biết u_{n-1} (hoặc vài số hạng đứng ngay trước nó).

Ví dụ: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3 \end{cases} \quad \forall n \ge 1.$

Cách 3: Diễn đạt bằng lời cách xác định mỗi số hạng của dãy số.

Ví dụ: Cho đường tròn (O) bán kính R. Cho dãy (u_n) với u_n là độ dài cung tròn có số đo là $\frac{2\pi}{n}$ của đường tròn (O).

4). Dãy số tăng: (u_n) là dãy số tăng $\Leftrightarrow \forall n \in N^*, u_n < u_{n+1}.$

5). Dãy số giảm: (u_n) là dãy số giảm $\Leftrightarrow \forall n \in N^*, u_n > u_{n+1}.$

6). Dãy số tăng và dãy số giảm được gọi chung là dãy số đơn điệu . Tính chất tăng, giảm của một dãy số được gọi chung là tính chất đơn điệu của dãy số đó.

7). Dãy số bị chặn trên: (u_n) được gọi là dãy số bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $\forall n \in N^*, u_n \le M$.

8). Dãy số bị chặn dưới: (u_n) được gọi là dãy số bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $\forall n \in N^*, u_n \ge m$.

9). Dãy số bị chặn: (u_n) được gọi là dãy số bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới. Nghĩa là tồn tại một số M và một số m sao cho $\forall n \in N^*, m \le u_n \le M$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1: Thiết lập công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n

PHƯƠNG PHÁP:

- Nếu u_n có dạng $u_n = a_1 + a_2 + ... + a_k + ... + a_n$ (kí hiệu $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$) thì biến đổi a_k thành hiệu của hai số hạng, dựa vào đó thu gọn u_n .

- Nếu dãy số (u_n) được cho bởi một hệ thức truy hồi, tính vài số hạng đầu của dãy số (chẳng hạn tính $u_1, u_2, \ldots$), từ đó dự đoán công thức tính u_n theo n, rồi chứng minh công thức này bằng phương pháp quy nạp. Ngoài ra cũng có thể tính hiệu $u_{n+1} - u_n$ dựa vào đó để tìm công thức tính u_n theo n.

VÍ DỤ

Ví dụ 1: Cho dãy số (a_n). Đặt $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Tính u_1, u_2, u_3, u_4 và xác định công thức tính u_n theo n trong các trường hợp sau:

a). $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$ b). $a_k = \frac{1}{k(k+4)}$ c). $a_k = \frac{1}{4k^2-1}$ d). $a_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

LỜI GIẢI

a). $u_1 = a_1 = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}$; $u_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.(2+1)} = \frac{2}{3}$

$u_3 = a_1 + a_2 + a_3 = u_2 + a_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3(3+1)} = \frac{3}{4}$

$u_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = u_3 + a_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4.5} = \frac{4}{5}$

Ta có $a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, do đó:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

b).

$u_1 = a_1 = \frac{1}{1.(1+4)} = \frac{1}{5}$; $u_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{2(2+4)} = \frac{17}{60}$

$u_3 = a_1 + a_2 + a_3 = u_2 + a_3 = \frac{17}{60} + \frac{1}{3(3+4)} = \frac{139}{420}$

$u_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = u_3 + a_4 = \frac{139}{420} + \frac{1}{4.(4+4)} = \frac{1127}{3360}$

Ta có $a_k = \frac{1}{k(k+4)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+4}\right)$. Do đó

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{4}[\left(1 - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-5} - \frac{1}{n-1}\right)$$

$$+ \left(\frac{1}{n-4} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-3} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+3}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+4}\right)]$$

$$u_n = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{25}{12} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right)$$

c). $a_k = \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

Ví dụ 2: Tìm 5 số hạng đầu và tìm công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số sau : a). $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$ b). $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n. \end{cases}$

LỜI GIẢI

a). $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$

Ta có:

$u_2 = u_1 + 2 = 3 + 2 = 5.$

$u_3 = u_2 + 2 = 5 + 2 = 7.$

$u_4 = u_3 + 2 = 7 + 2 = 9.$

$u_5 = u_4 + 2 = 9 + 2 = 11.$

Từ các số hạng đầu trên, ta dự đoán số hạng tổng quát u_n có dạng:

$u_n = 2n + 1 \quad \forall n \geq 1 (*)$

Ta dùng phương pháp chứng minh quy nạp để chứng minh công thức $(*)$ đúng.

Với $n = 1; u_1 = 2.1 + 1 = 3$ (đúng). Vậy $(*)$ đúng với $n = 1$.

Giả sử $(*)$ đúng với $n = k$. Có nghĩa ta có: $u_k = 2k + 1 \quad (2)$

Ta cần chứng minh $(*)$ đúng với $n = k + 1$. Có nghĩa là ta phải chứng minh:

$u_{k+1} = 2(k+1) + 1 = 2k + 3.$

Thật vậy từ hệ thức xác định dãy số và theo (2) ta có:

$u_{k+1} = u_k + 2 = 2k + 1 + 2 = 2k + 3.$

Vậy $(*)$ đúng khi $n = k + 1$. Kết luận $(*)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

b). $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n. \end{cases}$

Ta có:

$u_2 = 2u_1 = 2.2 = 4 = 2^2$

$u_3 = 2u_2 = 2.4 = 8 = 2^3$

$u_4 = 2u_3 = 2.8 = 16 = 2^4$

$u_5 = 2u_4 = 2.16 = 32 = 2^5$

Từ các số hạng đầu tiên, ta dự đoán số hạng tổng quát u_n có dạng: $u_n = 2^n \forall n \geq 1 (*)$

Ta dùng phương pháp chứng minh quy nạp để chứng minh cộng thức $(*)$ đúng.

Với $n = 1$, có: $u_1 = 2^1 = 2$ (đúng). Vậy $(*)$ đúng với $n = 1$

Giả sử $(*)$ đúng với $n = k$, có nghĩa ta có: $u_k = 2^k \quad (2)$

Ta cần chứng minh $(*)$ đúng với $n = k + 1$. Có nghĩa là ta phải chứng minh:

$u_{k+1} = 2^{k+1}$.

Thật vậy từ hệ thức xác định dãy số và theo (2) ta có:

$u_{k+1} = 2.u_k = 2.2^k = 2^{k+1}.$

Vậy $(*)$ đúng với $n=k+1$. Kết luận $(*)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

Ví dụ 3: Dãy số (u_n) được xác định bằng cộng thức: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n^3 \end{cases} \quad \forall n \ge 1.$

a). Tìm công thức của số hạng tổng quát.
b). Tính số hạng thứ 100 của dãy số.

LỜI GIẢI

a). Ta có: $u_{n+1} = u_n + n^3 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = n^3$.

Từ đó suy ra:

$u_1 = 1$

$u_2 - u_1 = 1^3$

$u_3 - u_2 = 2^3$

$u_4 - u_3 = 3^3$

....

$u_{n-1} - u_{n-2} = (n-2)^3$

$u_n - u_{n-1} = (n-1)^3$

Cộng từng vế n đẳng thức trên:

$u_1 + u_2 - u_1 + u_3 - u_2 + ... + u_{n-1} - u_{n-2} + u_n - u_{n-1} = 1 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (n-2)^3 + (n-1)^3$

$\Leftrightarrow u_n = 1 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (n-2)^3 + (n-1)^3$.

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được: $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (n-1)^3 = \dfrac{(n-1)^2 .n^2}{4}$

Vậy $u_n = 1 + \dfrac{n^2(n-1)^2}{4}$

b). $u_{100} = 1 + \dfrac{100^2.99^2}{4} = 24502501.$

VẤN ĐỀ 2:
Tính tăng, giảm của dãy số.

PHƯƠNG PHÁP

Cách 1: Xét dấu của biểu thức $u_{n+1} - u_n$

- Nếu $\forall n \in N^*, u_{n+1} - u_n > 0$ thì (u_n) là dãy số tăng;
- Nếu $\forall n \in N^*, u_{n+1} - u_n < 0$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Cách 2: Khi $\forall n \in N^*, u_n > 0$ thì có thể so sánh $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1

- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ thì (u_n) là dãy số tăng;
- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Cách 3: Nếu dãy số (u_n) được cho bởi một hệ thức truy hồi thì ta có thể sử dụng phương pháp chứng minh quy nạp để chứng minh $u_{n+1} > u_n$ (hoặc $u_{n+1} < u_n$)

Chú ý:

- Nếu $\exists k\in N^*: u_{k+1} > u_k$ thì dãy số (u_n) không giảm.
- Nếu $\exists k\in N^*: u_{k+1} < u_k$ thì dãy số (u_n) không tăng.

Ví dụ 1 : Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n) biết:

a). $u_n=\dfrac{1}{n}-2$ b). $u_n=\dfrac{n-1}{n+1}$ c). $u_n=(-1)^n\left(2^n+1\right)$

d). $u_n=\dfrac{3^n}{2^{n+1}}$ e). $u_n=2n-\sqrt{4n^2-1}$

LỜI GIẢI

a). $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{n+1}-2-\left(\dfrac{1}{n}-2\right)=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}=-\dfrac{1}{n(n+1)}<0\quad \forall n\in$ ¥ *

Kết luận dãy số (u_n) là dãy số giảm.

b). $u_n=\dfrac{n-1}{n+1}=1-\dfrac{2}{n+1}$

Ta có $u_{n+1}-u_n=1-\dfrac{2}{n+2}-\left(1-\dfrac{2}{n+1}\right)=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}>0\quad \forall n\in$ ¥ *

Kết luận dãy số (u_n) là dãy số tăng.

c). $u_n=(-1)^n\left(2^n+1\right)$

Ta có $u_1=-3, u_2=5, u_3=-9$, từ đó suy ra dãy số (u_n) là dãy không tăng không giảm.

d). $u_n=\dfrac{3^n}{2^{n+1}}$. Dễ thấy $u_n>0\quad \forall n\in N^*$

Xét tỉ số: $\dfrac{u_n}{u_{n+1}}=\dfrac{3^n}{2^{n+1}}.\dfrac{2^{n+2}}{3^{n+1}}=\dfrac{2}{3}<1.\ \Rightarrow u_n<u_{n+1}$. Vậy (u_n) là một dãy số tăng.

e). $u_n=2n-\sqrt{4n^2-1}$

Ta có: $u_n=2n-\sqrt{4n^2-1}=\dfrac{4n^2-\left(4n^2-1\right)}{2n+\sqrt{4n^2-1}}=\dfrac{1}{2n+\sqrt{4n^2-1}}$

Ta có: $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{2(n+1)+\sqrt{4(n+1)^2-1}}-\dfrac{1}{2n+\sqrt{4n^2-1}};\forall n\in N^*$

Vì: $2(n+1)+\sqrt{4(n+1)^2-1}>2n+\sqrt{4n^2-1};\forall n\in N^*\Rightarrow$

$$\frac{1}{2(n+1)+\sqrt{4(n+1)^2-1}}-\frac{1}{2n+\sqrt{4n^2-1}}<0;\forall n\in N^*$$

$\Rightarrow u_{n+1}-u_n<0,\forall n\in N^*$. Vậy: dãy số (u_n) giảm.

Ví dụ 2: Xét tính tăng giảm của các dãy số (u_n) được cho bởi hệ thức truy hồi sau:

a). $\begin{cases}u_2=2\\ u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3},\forall n\in N^*\end{cases}$ b). $\begin{cases}u_1=3\\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n}{3+u_n}\end{cases}$

LỜI GIẢI

a). $\begin{cases} u_2 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}, \forall n \in N^* \end{cases}$

Vì $u_2 = \sqrt{2u_1 + 3} = \sqrt{7} > u_1$, ta dự đoán $u_{n+1} > u_n \ (*)$ với mọi $n \ge 1$.

Ta có $(*)$ đúng với $n = 1$.

Giả sử ta có: $u_k > u_{k-1}$. Khi đó ta có:

$u_{k+1} = \sqrt{2u_k + 3} > \sqrt{2u_{k-1} + 3} = u_k$ (do $u_k > u_{k-1}$)

Suy ra $(*)$ đúng với mọi $n \in N^*$, suy ra (u_n) là dãy số tăng.

b). $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3 + u_n} \end{cases}$

Từ hệ thức truy hồi đã cho, dễ thấy $u_n > 0$ với mọi $n \in N^*$

Ta có: $u_2 = \dfrac{2u_1}{3 + u_1} = \dfrac{6}{6} = 1 < u_1$.

Ta dự đoán $u_{n+1} < u_n \ (**)$ với mọi $n \in N^*$.

Ta có $(**)$ đúng khi $n = 1$. Giả sử có $u_k < u_{k-1}$

Khi đó $u_{k+1} = \dfrac{2u_k}{3 + u_k} = \dfrac{2u_k + 6 - 6}{3 + u_k} = 2 - \dfrac{6}{u_k + 3}$.

Vì $u_k < u_{k-1}$ nên $\dfrac{6}{u_k + 3} > \dfrac{6}{u_{k-1} + 3} \Rightarrow u_{k+1} < 2 - \dfrac{6}{u_{k-1} + 3} = u_k$.

Suy ra $(**)$ đúng với mọi $n \in N^*$. Vậy (u_n) là dãy số giảm.

VẤN ĐỀ 3: Dãy số bị chặn.

PHƯƠNG PHÁP

1). Nếu $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ thì:

- Thu gọn u_n , dựa vào biểu thức thu gọn để chặn u_n.
- Ta cũng có thể chặn tổng $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ bằng một tổng mà ta có thể biết được chặn trên, chặn dưới của nó.

2). Nếu dãy số (u_n) ho bởi một hệ thức truy hồi thì:

- Dự đoán chặn trên, chặn dưới rồi chứng minh bằng phương pháp chứng minh quy nạp.
- Ta cũng có thể xét tính đơn điệu (nếu có) sau đó giải bất phương trình $u_{n+1} - u_n$ dựa vào đó chặn (u_n).

Ví dụ 1: Xét tính tăng hay giảm và bị chặn của dãy số : $u_n = \dfrac{2n-1}{n+3}; n \in N^*$

LỜI GIẢI

Ta có: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2n+1}{n+4} - \dfrac{2n-1}{n+3} = \dfrac{2n^2 + 7n + 3 - 2n^2 - 7n + 4}{(n+4)(n+3)} = \dfrac{7}{(n+4)(n+3)} > 0; \forall n \in N^*$

Vậy: (u_n) là dãy số tăng.

Ta có $u_n = \dfrac{2n-1}{n+3} = \dfrac{2(n+3) - 7}{n+3} = 2 - \dfrac{7}{n+3}$, suy ra:

$\forall n \in ¥*, u_n < 2$ nên (u_n) bị chặn trên. Vì (u_n) là dãy số tăng $\forall n \in ¥*, u_1 = \frac{1}{4} \le u_n$ Nên (u_n) bị chặn dưới. Vậy (u_n) bị chặn.

Ví dụ 2: Cho dãy số (u_n) với $u_n = 1 + (n-1).2^n$

a). Viết 5 số hạng đầu của dãy số.
b). Tìm công thức truy hồi.
c). Chứng minh dãy số tăng và bị chặn dưới.

LỜI GIẢI

a).Ta có:

$u_1 = 1 + (1-1).2^1 = 1$

$u_2 = 1 + (2-1).2^2 = 5$

$u_3 = 1 + (3-1).2^3 = 17$

$u_4 = 1 + (4-1).2^4 = 49$

$u_5 = 1 + (5-1).2^5 = 129$

b). Xét hiệu: $u_{n+1} - u_n = 1 + n.2^{n+1} - (1 + (n+1).2^n)$

$= 2n.2^n - (n-1).2^n = (2n - n + 1).2^n = (n+1).2^n \Rightarrow u_{n+1} = u_n + (n+1)2^n.$

Vậy công thức truy hồi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (n+1).2^n \end{cases} \quad \forall n \ge 1.$

c). Ta có: $u_{n+1} - u_n = (n+1).2^n > 0 \quad \forall n \ge 1.$ Từ đó suy ra dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Ta có: $u_n = 1 + (n-1).2^n \ge 1 \quad \forall n \ge 1.$ Kết luận (u_n) là dãy số bị chặn dưới.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Câu 1: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = 2$ và $u_{n+1} = 5u_n$ với mọi $n \ge 1$.

a). Hãy tính u_2, u_4 và u_6.

b). Chứng minh rằng $u_n = 2.5^{n-1}$ với mọi $n \ge 1$.

LỜI GIẢI

a). Ta có:

$u_2 = 5u_1 = 5.2 = 10.$

$u_3 = 5.u_2 = 5.10 = 50.$

$u_4 = 5.u_3 = 5.50 = 250.$

$u_5 = 5.u_4 = 5.250 = 1250.$

$u_6 = 5.u_5 = 5.1250 = 6250.$

b). Ta sẽ chứng minh: $u_n = 2.5^{n-1} \quad (1)$ với mọi $n \ge 1$, bằng phương pháp quy nạp

Với $n = 1$, ta có: $u_1 = 2.5^0 = 2$ (đúng). Vậy (1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (1) đúng với $n = k (k \in N^*)$. Có nghĩa là ta có: $u_k = 2.5^{k-1}$.

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$.

Có nghĩa ta phải chứng minh: $u_{k+1}=2.5^k$.

Từ hệ thức xác định dãy số : (u_n) và giả thiết quy nạp ta có:

$u_{k+1}=5.u_k=2.5^{k-1}.5=2.5^k$ (đpcm).

Câu 1: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1=1$ và $u_{n+1}=u_n+7$ với mọi $n\ge 1$

a) Hãy tính u_2, u_4 và u_6.

b) Chứng minh rằng: $u_n=7n-6 \quad (1)$ với mọi $n\ge 1$

LỜI GIẢI

a). Ta có:

$u_2=u_1+7=1+7=8.$

$u_3=u_2+7=8+7=15.$

$u_4=u_3+7=15+7=22.$

$u_5=u_4+7=22+7=29.$

$u_6=u_5+7=29+7=36.$

b). Với $n=1$, ta có: $u_1=7.1-6=1$ (đúng). Vậy (1) đúng với $n=1$.

Giả sử (1) đúng với $n=k\left(k\in N^*\right)$. Có nghĩa là ta có: $u_k=7k-6$.

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$u_{k+1}=7(k+1)-6.$

Từ hệ thức xác định dãy số (u_n) và giả thiết quy nạp ta có:

$u_{k+1}=u_k+7=(7k-6)+7=7(k+1)-6$ (đúng).

Câu 3: Cho dãy số (u_n) với $u_1=1$ và $u_{n+1}=3u_n+10$ với mọi $n\ge 1$.

Chứng minh rằng: $u_n=2.3^n-5 \quad \forall n\ge 1$.

LỜI GIẢI

Ta sẽ chứng minh $u_n=2.3^n-5 \quad (1)$ bằng phương pháp quy nạp.

Với $n=1$, ta có: $u_1=2.3^1-1=1$ (đúng). Vậy (1) đúng với $n=1$.

Giả sử (1) đúng với $n=k\left(k\in N^*\right)$. Có nghĩa là ta có: $u_k=2.3^k-5 \quad (2)$

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$u_{n+1}=2.3^{k+1}-5.$

Từ hệ thức xác định dãy số (u_n) và từ (2) ta có:

$u_{k+1}=3u_k+10=3.\left(2.3^k-5\right)+10=2.3^k.3-15+10=2.3^{k+1}-5$ (đpcm).

Câu 4 : Cho dãy số (u_n), biết $u_1=3, u_{n+1}=\sqrt{1+u_n^2}$ với $n\ge 1, n\in ¥$

a). Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số.

b). Dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n và chứng minh bằng phương pháp quy nạp.

LỜI GIẢI

a). Ta có:

$u_2=\sqrt{1+u_1^2}=\sqrt{10}$

$u_3 = \sqrt{1+u_2^2} = \sqrt{11}$

$u_4 = \sqrt{1+u_3^2} = \sqrt{12}$

$u_5 = \sqrt{1+u_4^2} = \sqrt{13}$

b). Ta có: $u_1 = \sqrt{1+8}, u_2 = \sqrt{2+8}, u_3 = \sqrt{3+8}, u_4 = \sqrt{4+8}, u_5 = \sqrt{5+8}$.

Ta dự đoán $u_n = \sqrt{n+8}$ (1)

Với $n=1$, có: $u_1 = \sqrt{1+8} = 3$ (đúng). Vậy (1) đúng với $n=1$

Giả sử (1) đúng với $n=k$, có nghĩa ta có: $u_k = \sqrt{k+8}$ (2)

Ta cần chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa là ta phải chứng minh:

$u_{k+1} = \sqrt{k+9}$

Thật vậy từ hệ thức xác định dãy số và theo (2) ta có:

$u_{k+1} = \sqrt{1+u_k^2} = \sqrt{1+(\sqrt{k+8})^2} = \sqrt{k+9}$

Vậy (1) đúng với $n=k+1$. Kết luận $(*)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

Câu 5 : Cho tổng $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

a). Tính S_1, S_2, S_3.

b). Dự đoán công thức tính tổng S_n và chứng minh bằng quy nạp.

LỜI GIẢI

Ta có $S_1 = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} = \frac{2}{3}, S_3 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} = \frac{3}{4}$

b). Dự đoán $S_n = \frac{n}{n+1}$ (1)

với $n=1$, ta có $S_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Vậy (1) đúng với $n=1$.

Giả sử (1) đúng với $n=k$, có nghĩa ta có $S_k = \frac{k}{k+1}$.

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$, có nghĩa ta phải chứng minh $S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$

Thật vậy ta có: $S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$ (đúng).

Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{n^2+1}$ là dãy số bị chặn.

Thật vậy ta có $n + \frac{1}{n} \ge 2, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \frac{n^2+1}{n} \ge 2 \Leftrightarrow \frac{n}{n^2+1} \le \frac{1}{2}$ $(*)$

Và hiển nhiên $0 < \frac{n}{n^2+1}$ $(**)$

Từ (*) và (**) suy ra Dãy số (u_n) bị chặn.

Câu 6: Tìm 5 số hạng đầu và tìm công thức tính số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số sau :

a). $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} \end{cases}, \forall n \in ¥^*$ b). $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với $n \ge 1, n \in ¥$

LỜI GIẢI

a). Ta có:

$$u_2 = \frac{u_1}{1+u_1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}. \quad u_3 = \frac{u_2}{1+u_2} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

$$u_4 = \frac{u_3}{1+u_3} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}. \quad u_5 = \frac{u_4}{1+u_4} = \frac{\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{1}{5}.$$

Từ các số hạng đầu trên, ta dự đoán số hạng tổng quát u_n có dạng: $u_n = \frac{1}{n}, \forall n \ge 1. (*)$

Ta dùng phương pháp quy nạp để chứng minh công thức $(*)$

Đã có: $(*)$ đúng với $n = 1$

Giả sử $(*)$ đúng khi $n = k$. Nghĩa là ta có: $u_k = \frac{1}{k}$

Ta chứng minh $(*)$ đúng khi $n = k+1$. Nghĩa là ta phải chứng minh: $u_{k+1} = \frac{1}{k+1}$.

Thật vậy từ hệ thức xác định dãy số và giả thiết quy nạp ta có:

$$u_{k+1} = \frac{u_k}{1+u_k} = \frac{\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k}} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{k+1}{k}} = \frac{1}{k+1}.$$

Kết luận: $(*)$ đúng khi $n = k+1$,suy ra $(*)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

b). Ta có :

$u_2 = u_1 + 3 = 2 = 3.2 - 4$

$u_3 = u_2 + 3 = 5 = 3.3 - 4$

$u_4 = u_3 + 3 = 8 = 3.4 - 4$

$u_5 = u_4 + 3 = 11 = 3.5 - 4$

Từ các số hạng đầu trên, ta dự đoán số hạng tổng quát u_n có dạng: $u_n = 3n - 4, \forall n \ge 1. (*)$

Ta dùng phương pháp quy nạp để chứng minh công thức $(*)$

Đã có: $(*)$ đúng với $n = 1$

Giả sử $(*)$ đúng khi $n = k$. Nghĩa là ta có: $u_k = 3k - 4$

Ta chứng minh $(*)$ đúng khi $n = k+1$. Nghĩa là ta phải chứng minh: $u_{k+1} = 3(k+1) - 4$

Thật vậy từ hệ thức xác định dãy số và giả thiết quy nạp ta có:

$u_{k+1} = u_k + 3 = 3k - 4 + 3 = 3(k+1) - 4$

Kết luận: $(*)$ đúng khi $n = k+1$,suy ra $(*)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

Câu 7: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_n = 1$ và $u_{n+1} = -\frac{3}{2}u_n^2 + \frac{5}{2}u_n + 1 \quad \forall n \ge 1$.

a). Hãy tính u_2, u_3 và u_4

b). Chứng minh rằng: $u_n = u_{n+3}$ với mọi $n \ge 1$.

LỜI GIẢI

a).Ta có: $u_2 = -\frac{3}{2}u_1^2 + \frac{5}{2}u_1 + 1 = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} + 1 = 2.$

$u_3 = -\frac{3}{2}u_2^2 + \frac{5}{2}u_2 + 1 = -\frac{3}{2}2^2 + \frac{5}{2}.2 + 1 = 0$

$u_4 = -\frac{3}{2}u_3^2 + \frac{5}{2}u_3 + 1 = -\frac{3}{2}.0^2 + \frac{5}{2}.0 + 1 = 1$

b). Ta sẽ chứng minh $u_n = u_{n+3}, \forall n \ge 1$.

Với $n = 1$, ta có: $u_1 = u_4 = 1$ (đúng)

Giả sử đẳng thức đúng với $n = k$, có nghĩa là ta có: $u_k = u_{k+3}$

Ta cần phải chứng minh đẳng thức đúng với $n = k + 1$ có nghĩa là chứng minh:

$u_{k+1} = u_{k+4}$

Ta có: $u_{k+4} = -\frac{3}{2}u_{k+3} + \frac{5}{2}u_{k+3} + 1 = -\frac{3}{2}u_k^2 + \frac{5}{2}u_k + 1 = u_{k+1}$. (đúng)

Câu 8: Cho dãy số (u_n) với $u_{n+1} = 5.4^{n-1} + 3$.

a) Chứng minh rằng: $u_{n+1} = 4u_n - 9$ với mọi $n \ge 1$.

b) Dựa vào kết quả câu a), hãy cho dãy số (u_n) bởi hệ thức truy hồi.

LỜI GIẢI

a) Ta có: $u_{n+1} = 5.4^n + 3 = 4.5.4^{n-1} + 3 = 4\left(5.4^{n-1} + 3\right) - 9 = 4u_n - 9$.

b) Theo công thức xác định (u_n), ta có:

$u_1 = 5.4^{1-1} + 3 = 8$. Vì thế kết hợp kết quả câu a) suy ra ta có thể cho dãy số (u_n) bởi: $u_1 = 8$ và $u_{n+1} = 4u_n - 9$ với mọi $n \ge 1$.

Câu 9: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 11 \\ u_{n+1} = 10u_n + 1 - 9n, \forall n \in ¥ \end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát u_n theo n.

LỜI GIẢI

Ta có $u_1 = 11 = 10 + 1$

$u_2 = 10.11 + 1 - 9 = 102 = 100 + 1 = 10^2 + 2$

$u_3 = 10.102 + 1 - 9.2 = 1003 = 1000 + 3 = 10^3 + 3$.

Từ đó dự đoán $u_n = 10^n + n$ (1). Chứng minh:

Với $n = 1$ ta có $u_1 = 10^1 + 1 = 11$ (đúng).

Giả công thức (1) đúng với $n = k$, ta có $u_k = 10^k + k$ (2).

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n = k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh $u_{k+1} = 10^{k+1} + (k+1)$. Thật vậy $u_{k+1} = 10\left(10^k + k\right) + 1 - 9k = 10^{k+1} + (k+1)$.

Kết luận $u_n = 10^n + n, \forall n \in ¥$.

Câu 10: Xét tính tăng giảm của các dãy số sau:

1). Dãy số (u_n) với $u_n = 2n^3 - 5n + 1$ 2). Dãy số (u_n) với $u_n = 3^n - n$.

3). Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{n^2+1}$. 4). Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$

5). Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ 6). Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{3^n}{n^2}$

7). Dãy số (u_n): Với $u_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{n+1}$ 8). Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n^2 + n + 1}{2n^2 + 1}$

9). Dãy số (u_n) với $u_n = n - \sqrt{n^2 - 1}$ 10). Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{\sqrt{n+1} - 1}{n}$

LỜI GIẢI

1). Dãy số (u_n) với $u_n = 2n^3 - 5n + 1$

Với mỗi $n \in N^*$, ta có: $u_{n+1} - u_n = \left[2(n+1)^3 - 5(n+1) + 1\right] - \left(2n^3 - 5n + 1\right)$

$= 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 5n - 5 - 1 - 2n^3 + 5n - 1$

$= 6n^2 + 6n - 3 = 6n^2 + 3n + (3n - 3) > 0$ (đúng) do $n \geq 1$.

Vì thế dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

2). Dãy số (u_n) với $u_n = 3^n - n$.

Với mỗi $n \in N^*$, ta có: $u_{n+1} - u_n = \left[3^{n+1} - (n+1)\right] - \left(3^n - n\right)$.

$= 3.3^n - n - 1 - 3^n + n$

$= 2.3^n + 3^n - 3^n - 1 = 2.3^n - 1 > 0$ (đúng) (vì $n \geq 1$.)

Kết luận dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

3). Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n}{n^2+1}$.

Với mỗi $n \in N^*$, ta có:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{(n+1)^2 + 1} - \frac{n}{n^2 + 1} = \frac{(n+1)(n^2+1) - n\left[(n+1)^2 + 1\right]}{\left[(n+1)^2 + 1\right](n^2+1)}$$

$$= \frac{n^3 + n + n^2 + 1 - \left(n^3 + 2n^2 + 2n\right)}{\left[(n+1)^2 + 1\right](n^2+1)} = \frac{-n^2 - n + 1}{\left[(n+1)^2 + 1\right](n^2+1)} < 0.$$

Vì $-n^2 - n + 1 < 0 \quad \forall n \geq 1$, và $\left[(n+1)^2 + 1\right](n^2+1) > 0 \quad \forall n \geq 1$.

Kết luận: dãy số (u_n) là một dãy số giảm.

5). Dãy số (u_n) với $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$

Dễ thấy $u_n > 0 \quad \forall n \in N^*$. Xét tỉ số: $\frac{u_n}{u_{n+1}}$

Ta có: $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\sqrt{n}}{2^n}.\frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}} = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} > 1 \ \left(\forall n \geq 1\right)$

Thật vậy: $\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} > 1 \Leftrightarrow \frac{4n}{n+1} > 1 \Leftrightarrow 4n > n+1 \Leftrightarrow 3n > 1$ (đúng $\forall n \geq 1$)

Kết luận: $\left(u_n\right)$ là một dãy số giảm.

6). Dãy số $\left(u_n\right)$ với $u_n = \frac{3^n}{n^2}$

Dễ thấy $u_n > 0 \quad \forall n \in N^*$. Xét tỉ số: $\frac{u_n}{u_{n+1}}$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{3^n}{n^2}.\frac{\left(n+1\right)^2}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}.\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$

Nếu $\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 > 3$

$\Leftrightarrow \frac{n+1}{n} > \sqrt{3} \Leftrightarrow n+1 > \sqrt{3}.n \Leftrightarrow \sqrt{3}.n - n < 1$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3}-1\right)n < 1 \Leftrightarrow n < \frac{1}{\sqrt{3}-1} \Rightarrow n = 1$

Nếu $\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 < 3 \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} < \sqrt{3} \Leftrightarrow n+1 < \sqrt{3}.n \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}-1\right)n > 1$

$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{3}-1} \Leftrightarrow n > 2.$

7). Dãy số $\left(u_n\right)$: Với $u_n = \frac{3n^2-2n+1}{n+1}$

Ta có: $u_n = 3n - 5 + \frac{6}{n+1}$

Với mọi $n \in N^*$ ta có:

$$u_{n+1} - u_n = \left[3\left(n+1\right) - 5 + \frac{6}{n+2}\right] - \left(3n - 5 + \frac{6}{n+1}\right) = 3 + \frac{6}{n+2} - \frac{6}{n+1}$$

$$= 3\left[\frac{\left(n+1\right)\left(n+2\right) + 2\left(n+1\right) - 2\left(n+2\right)}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)}\right] = \frac{3\left(n^2+3n\right)}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)} > 0. \quad \forall n \geq 1.$$

Kết luận $\left(u_n\right)$ là dãy số tăng.

8). Dãy số $\left(u_n\right)$ với $u_n = \frac{n^2+n+1}{2n^2+1} = \frac{1}{2} + \frac{n+\frac{3}{2}}{2n^2+1}$

Với mọi $n \in N^*$, xét hiệu số:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} + \frac{n+1+\frac{3}{2}}{2\left(n+1\right)^2+1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{n+\frac{3}{2}}{2n^2+1}\right) = \frac{n+\frac{5}{2}}{2n^2+2n+3} - \frac{n+\frac{3}{2}}{2n^2+1}$$

$$=\frac{\left(n+\frac{5}{2}\right)\left(2n^2+1\right)-\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(2n^2+2n+3\right)}{\left(2n^2+2n+3\right)\left(2n^2+1\right)}=\frac{-5n-2}{\left(2n^2+2n+3\right)\left(2n^2+1\right)}<0\quad\forall n\ge 1.$$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm.

9). Dãy số (u_n) với $u_n=n-\sqrt{n^2-1}$

Ta có: $u_n=n-\sqrt{n^2-1}=\dfrac{n^2-\left(n^2-1\right)}{n+\sqrt{n^2-1}}=\dfrac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}$

Dễ dàng ta có: $(n+1)+\sqrt{(n+1)^2-1}>n+\sqrt{n^2-1}$

$$\Rightarrow\frac{1}{(n+1)+\sqrt{(n+1)^2-1}}<\frac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}\Leftrightarrow u_{n+1}<u_n$$

Từ đó suy ra dãy số (u_n) là dãy số giảm.

10). Dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{\sqrt{n+1}-1}{n}$

Ta có: $u_n=\dfrac{(n+1)-1}{n\left(\sqrt{n+1}+1\right)}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+1}$

Dễ dàng ta có: $\sqrt{(n+1)+1}+1>\sqrt{n+1}+1\ \Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)+1}+1}<\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+1}\Leftrightarrow u_{n+1}<u_n$. Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm.

Câu 11: Chứng minh rằng dãy số (u_n), với $u_n=\dfrac{n^2+1}{2n^2-3}$ là một dãy số bị chặn.

LỜI GIẢI

Công thức u_n được viết lại: $u_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2\left(2n^2-3\right)}\quad(1)$

Dễ thấy $\forall n\ge 1$ ta có: $-1\le\dfrac{1}{2n^2-3}\le\dfrac{1}{5}$. Do đó từ (1) suy ra $-2\le u_n\le 1\ \ (\forall n\ge 1)$

Từ đó suy ra (u_n) là một dãy số bị chặn.

Câu 12: Chứng minh dãy số (u_n), với $u_n=\dfrac{7n+5}{5n+7}$ là một dãy số tăng và bị chặn.

LỜI GIẢI

Công thức u_n được viết lại: $u_n=\dfrac{7}{5}-\dfrac{24}{5(5n+7)}$

Xét hiệu số: $u_{n+1}-u_n=\left(\dfrac{7}{5}-\dfrac{24}{5\left[5(n+1)+7\right]}\right)-\left(\dfrac{7}{5}-\dfrac{24}{5(5n+7)}\right)$

$$=\frac{24}{5}\left(\frac{1}{5n+7}-\frac{1}{5(n+1)+7}\right)>0\quad\forall n\ge 1.\ \Rightarrow u_{n+1}>u_n.$$ Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Ta có: $0<\dfrac{1}{5n+7}\le\dfrac{1}{12}\quad\forall n\ge 1\ \Leftrightarrow 0>-\dfrac{24}{5(5n+7)}\ge-\dfrac{2}{5}\ \Leftrightarrow\dfrac{7}{5}>\dfrac{7}{5}-\dfrac{24}{5(5n+7)}\ge\dfrac{7}{5}-\dfrac{2}{5}$

$\Leftrightarrow 1 \le u_n < \frac{7}{5}$. Suy ra (u_n) là một dãy số bị chặn.

Kết luận (u_n) là một dãy số tăng và bị chặn.

Câu 13: Cho dãy số (u_n) với $u_n = n^2 - 4n + 3$.

a). Viết công thức truy hồi của dãy số.

b). Chứng minh dãy số bị chặn dưới.

c). Tính tổng n số hạng đầu của dãy số đã cho.

LỜI GIẢI

a).Ta có: $u_1 = 1^2 - 4.1 + 3 = 0$.

Xét hiệu: $u_{n+1} - u_n = \left[(n+1)^2 - 4(n+1) + 3\right] - (n^2 - 4n + 3) = 2n - 3 \quad \Rightarrow u_{n+1} = u_n + 2n - 3.$

Vậy công thức truy hồi: $\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 2n - 3 \end{cases} \quad \forall n \ge 1.$

b). Ta có: $u_n = n^2 - 4n + 4 - 1 = (n-2)^2 - 1 \ge -1 \quad \forall n \ge 1.$

Vậy dãy số bị chặn dưới, nhưng không bị chặn trên.

c). Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = 1^2 - 4.1 + 3 \\ u_2 = 2^2 - 4.2 + 3 \\ u_3 = 3^2 - 4.2 + 3 \\ \ldots \\ u_n = n^2 - 4.n + 3 \end{array}\right\} +$$

$$S_n = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) - 4(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + 3n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + 3n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) - 12n(n+1) + 18n}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n-11) + 18n}{6}$$

Câu 14: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 3n - 2. \end{cases}$

a). Tìm công thức của số hạng tổng quát.

b). Chứng minh dãy số tăng.

LỜI GIẢI

a)Ta có: $u_{n+1} = u_n + 3n - 2 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 3n - 2$. Từ đó suy ra:

$u_1 = 5.$

$u_2 - u_1 = 3.1 - 2.$

$u_3 - u_2 = 3.2 - 2.$

$u_4 - u_3 = 3.3 - 2.$

....

$u_{n-1} - u_{n-2} = 3(n-2) - 2.$

$u_n - u_{n-1} = 3(n-1) - 2.$

Cộng từng vế của n đẳng thức trên và rút gọn, ta được:

$u_n = 5 + 3[1+2+3+...+(n-1)] - 2(n-1).$

$\Leftrightarrow u_n = 5 + \dfrac{3(n-1).n}{2} - 2(n-1) = 5 + \dfrac{3(n-1).n - 4(n-1)}{2}$

$\Leftrightarrow u_n = 5 + \dfrac{(n-1)(3n-4)}{2}$

Vậy : $u_n = 5 + \dfrac{(n-1)(3n-4)}{2}$.

b) Ta có: $u_{n+1} - u_n = 3n - 2 > 0 \quad \forall n \ge 1.$

$\Rightarrow u_{n+1} > u_n \quad \forall n \ge 1.$ Kết luận dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

Câu 15: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{9}\left(u_n + 4 + 4\sqrt{1+2u_n}\right) \end{cases} \forall n \in N^*$. Tìm công thức số hạng tổng quát u_n của dãy số.

LỜI GIẢI

Đặt $x_n = \sqrt{1+2u_n} \quad \forall n \in N^*$

Ta có $x_n \ge 0$ và $x_n^2 = 1 + 2u_n, \forall n \in N^*$ hay $u_n = \dfrac{x_n^2 - 1}{2}$

Thay vào giả thiết, ta được: $\dfrac{x_{n+1}^2 - 1}{2} = \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{x_n^2 - 1}{2} + 4 + 4x_n\right)$

$\Leftrightarrow 9x_{n+1}^2 - 9 = x_n^2 - 1 + 8 + 8x_n \Leftrightarrow (3x_{n+1})^2 = (x_n + 4)^2$

Suy ra: $3x_{n+1} = x_n + 4 \quad \forall n \in N^*$ (Do $x_n \ge 0$, $\forall n \in N^*$)

Hay $3^{n+1}x_{n+1} = 3^n x_n + 4.3^n$, $\forall n \in N^*$

Đặt $y_n = 3^n x_n$,$\forall n \in N^*$. Ta có: $y_{n+1} = y_n + 4.3^n$, $\forall n \in N^*$

Từ đó $y_{n+1} = y_1 + 4\left(3^n + 3^{n-1} + ... + 3\right)$, $\forall n \in N^*$

Hay $y_{n+1} = y_1 - 6 + 2.3^{n+1}$, $\forall n \in N^*$

Theo cách đặt ta có: $x_1 = 3 \Rightarrow y_1 = 9 \Rightarrow y_n = 3 + 2.3^n$.

Suy ra: $x_n = 2 + \dfrac{1}{3^{n-1}}$, $\forall n \in N^*$

Do đó $u_n = \dfrac{1}{2}\left(3 + \dfrac{4}{3^{n-1}} + \dfrac{1}{3^{2n-2}}\right)$, $\forall n \in N^*$

Câu 16: Cho dãy (Un), (n = 0,1,2,3...) xác định bởi: $u_0 = 2$; $u_{n+1} = 4u_n + \sqrt{15u_n^2 - 60}$

a). Hãy xác định số hạng tổng quát của u_n .

b). Chứng minh rằng số $\dfrac{1}{5}(u_{2n} + 8)$ có thể biểu diễn thành tổng bình phương của ba số nguyên liên tiếp.

LỜI GIẢI

a). Theo bài ra ta có: $u_{n+1}^2 - 8u_n u_{n+1} + u_n^2 + 60 = 0 \qquad (1)$

Thay n bởi (n – 1) ta được:

$u_n^2 - 8u_{n-1}u_n + u_{n-1}^2 + 60 = 0$ (2)

Trừ theo từng vế (1) cho (2) được:

$(u_{n+1} - u_{n-1})(u_{n+1} - 8u_n + u_{n-1}) = 0 \Leftrightarrow u_{n+1} - 8u_n + u_{n-1} = 0$ (3)

(do $u_{n+1} > 4u_n > 16u_{n-1} \Rightarrow u_{n+1} - u_{n-1} > 0$

Phương trình đặc trưng của (3) là $t^2 - 8t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4 - \sqrt{15} \\ t = 4 + \sqrt{15} \end{array}\right.$

Số hạng tổng quát: $u_n = \left(4 - \sqrt{15}\right)^n + \left(4 + \sqrt{15}\right)^n$

b). Với mỗi số $n \ge 1$, thì tồn tại số $k \in \mathbb{N}$ để: $\left(4 + \sqrt{15}\right)^n - \left(4 - \sqrt{15}\right)^n = k\sqrt{15}$

Suy ra $\left(\left(4 + \sqrt{15}\right)^n - \left(4 - \sqrt{15}\right)^n\right)^2 = 15.k^2 \Leftrightarrow \left(4 + \sqrt{15}\right)^{2n} + \left(4 - \sqrt{15}\right)^{2n} = 15.k^2 + 2$

Do vậy: $\frac{1}{5}(u_{2n} + 8) = \frac{1}{5}\left(\left(4 + \sqrt{15}\right)^{2n} + \left(4 - \sqrt{15}\right)^{2n} + 8\right) = 3.k^2 + 2 = (k-1)^2 + k^2 + (k+1)^2$

Câu 17: Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a). $u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$ b). $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$

c). $u_n = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.5} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ d). $u_n = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + ... + \frac{1}{n(n+3)}$

LỜI GIẢI

a). Rõ ràng $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n) bị chặn dưới.

Lại có: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Suy ra $u_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n) bị chặn trên.

Kết luận (u_n) bị chặn.

b). Rõ ràng $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n) bị chặn dưới.

Có $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}, \forall k \ge 2, k \in \mathbb{N}$. Do đó:

$u_n < 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$ với mọi số nguyên dương n, nên (u_n) bị chặn trên.

Kết luận (u_n) bị chặn.

c). Rõ ràng $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên (u_n) bị chặn dưới.

Lại có: $\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$. Suy ra

$u_n = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + ... + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) < \frac{1}{2}$ với mọi số nguyên dương n, nên (u_n) bị chặn trên.

Kết luận (u_n) bị chặn.

c). Rõ ràng $u_n > 0, \forall n \in ¥ *$ nên (u_n) bị chặn dưới.

Lại có: $\frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right)$. Suy ra $u_n = \frac{1}{3}[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)$

$+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+... +\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)]$

$u_n = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right) < \frac{11}{18}$ với mọi số nguyên dương n, nên (u_n) bị chặn trên.

Kết luận (u_n) bị chặn.

Câu 18: Cho dãy số (u_n) định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 5 \end{cases} \quad \forall n \in N^*$

a). Chứng minh $u_n < 15, \forall n \in N^*$.

b). Chứng minh dãy số (u_n) tăng và bị chặn dưới

LỜI GIẢI

a). Ta có $u_1 = 1 < 15$, giả sử $u_k < 15$, khi đó $u_{k+1} = \frac{2}{3}u_k + 5 < \frac{2}{3}.(15)+5 = 15$

Vậy $u_n < 15 \forall, n \in N^* (1)$

b). Ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 5 - u_n = \frac{15-u_n}{3} > 0, \forall n \in N^* (do (1))$

$\Rightarrow$ dãy số (u_n) tăng $\Rightarrow u_n \geq u_1 = 1 \Rightarrow (u_n)$ bị chặn dưới.

Câu 19: Xét tính đơn điệu của dãy số (U_n) với $U_n = (0,3)^n .n; \forall n \in N^*$

LỜI GIẢI

$U_n = (0,3)^n .n$

$U_{n+1} - U_n = (0,3)^{n+1}.(n+1) - (0,3)^n .n = (0,3)^n \left[0,3(n+1) - n\right] = (0,3)^n \left[0,3 - (0,7)n\right] < 0; \forall n \in N^*$

(do $n \geq 1 \Rightarrow 0,3 - (0,7)n \leq 0,3 - 0,7 = -0,4 < 0 \Rightarrow (U_n)$ giảm

Câu 20: Cho $U_n = 1 + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + ... + \frac{1}{n^5} \forall n \in N^*$. Chứng minh (U_n) bị chặn trên.

LỜI GIẢI

Với $k = 2,3,...,n$ ta có $k^5 > k(k-1) > 0$ (do $k^5 - k(k-1) = k^2(k^3-1) + k > 0$)

$\Rightarrow \frac{1}{k^5} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

Do đó:

$1 = 1$

$\frac{1}{2^5} < 1 - \frac{1}{2}$

$\frac{1}{3^5} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$

....

$\frac{1}{n^5} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

$\Rightarrow U_n \le 2 - \frac{1}{n} < 2 \forall n \in N^* \Rightarrow (U_n)$ bị chặn trên

Câu 21: Cho $a > 2$. Xét dãy (U_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = a^2 \\ u_{n+1} = (u_n - a)^2 \ \forall n \in N^* \end{cases}$. Xét tính đơn điệu của dãy (U_n)

LỜI GIẢI

Ta có $u_1 = a^2 > 2a$ (do $a > 2$)

Giả sử $u_k > 2a$ khi đó $u_k - a > a \Rightarrow u_{k+1} = (u_k - a)^2 > a^2 > 2a$. Vậy $u_n > 2a; \forall n \in N^*$

$u_{n+1} - u_n = (u_n - a)^2 - u_n = u_n^2 - (2a+1)u_n + a^2$

$= (u_n - 2a)(u_n - 1) + (a^2 - 2a) > 0; \forall n \in N^* \Rightarrow (u_n)$ đơn điệu tăng.

Câu 22: Cho dãy số (u_n) định bởi: $u_n = \frac{a.n^4 + 2}{2n^4 + 5}; n \in N^*$. Định a để dãy số (u_n) tăng.

LỜI GIẢI

Ta có: $u_n = \frac{a.n^4 + 2}{2n^4 + 5} = \frac{a}{2} + \frac{4 - 5a}{2(2n^4 + 3)}; n \in N^*$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4-5a}{2\left[2(n+1)^4 + 5\right]} - \frac{4-5a}{2\left[2n^4 + 5\right]} = \frac{4-5a}{2}\left[\frac{1}{2(n+1)^4 + 5} - \frac{1}{2n^4 + 5}\right]$$

$$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{4-5a}{2} \frac{2n^4 + 5 - 2(n+1)^4 - 5}{\left[2(n+1)^4 + 5\right]\left[2(n+1)^4 + 5\right]}$$

$$= (4-5a)\frac{n^4 - (n+1)^4}{\left[2(n+1)^4 + 5\right]\left[2(n+1)^4 + 5\right]}$$

Mà: $\frac{n^4 - (n+1)^4}{\left[2(n+1)^4 + 5\right]\left[2(n+1)^4 + 5\right]} < 0; \forall n \in N^*$

Nên: (u_n) tăng $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0; \forall n \in N^* \Leftrightarrow 4 - 5a < 0 \Leftrightarrow a > \frac{4}{5}$

Câu 23: Cho dãy số (a_n) định bởi: $\begin{cases} 0 < a_n < 1; \forall n \in N^* \\ a_{n+1}(1 - a_n) \ge \frac{1}{4}; \forall n \in N^* \end{cases}$

a). Chứng minh: $a_n > \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \forall n \in N^* (1)$

b). Xét tính đơn điệu của dãy số (a_n) .

LỜI GIẢI

a). Ta có: $0 < a_n < 1 \Rightarrow a_1 > 0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.1} : (1)$ đúng khi n=1

Giả sử (1) đúng khi n=k$\in N^*$, nghĩa là: $a_k > \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}; k \in N^*$

Ta cần chứng minh (1) đúng khi $n = k+1$, nghĩa là chứng minh: $a_{k+1} > \frac{1}{2} - \frac{1}{2(k+1)}; k \in N^*$

Ta có: $a_k > \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}$

$\Rightarrow -a_k < -\frac{1}{2} + \frac{1}{2k} \Rightarrow 1 - a_k < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2k} = \frac{k+1}{2k} \Rightarrow \frac{1}{1-a_k} > \frac{2k}{k+1}$

Theo giả thiết: $a_{k+1}(1-a_k) \geq \frac{1}{4}$

$\Rightarrow a_{k+1} \geq \frac{1}{4(1-a_k)} > \frac{2k}{4(k+1)} = \frac{(2k+2)-2}{4(k+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(k+1)} : (1)$ đúng khi $n = k+1$

Vậy: $a_n > \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \forall n \in N^*$.

b). Ta có: $a_n^2 - a_n + \frac{1}{4} = \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow a_n(a_n - 1) + \frac{1}{4} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{4} \geq a_n(1-a_n)$

Từ giả thiết suy ra : $a_{n+1}(1-a_n) \geq \frac{1}{4} \geq a_n(1-a_n) \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n; \forall n \in N^*$

Vậy: (a_n) tăng.

Câu 24: Xét tính bị chặn của dãy số: $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; n \in N^*$

LỜI GIẢI

Ta có: $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 0; \forall n \in N^*$ nên (u_n) bị chặn dưới (1).

Lại có: $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{n!}{k!(n-k)!n^k}\right]$

$= \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{1}{k!} \cdot \frac{(n-k+1)}{n} \cdot \frac{(n-k+2)}{n} \cdots \frac{(n-k+k)}{n}\right] \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}; n \in N^*$

Mà: $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{(n-1).n}$

$= 2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 3 - \frac{1}{n} < 3; \forall n \in N^*$

Suy ra: $u_n < 3, \forall n \in N^*$ nên dãy số (u_n) bị chặn trên (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ dãy số (u_n) bị chặn.