Chứng minh phương trình sau có nghiệm với mọi $m \in ¡$

a). $m(x-1)(x+2)+2x+1=0$ (1)

b). $(4m+1)x^3-(m+1)x+m=0$ (1)

c). $(m^3-1)(x^{2001}-1)(x+2)^{2002}+2x+3=0$ (1)

d). $\cos x+m\cos 2x=0$

LỜI GIẢI

a). $m(x-1)(x+2)+2x+1=0$ (1)

Đặt $f(x)=m(x-1)(x+2)+2x+1$.

Tập xác định của hàm số f(x) là $D=R$. Vì f(x) là hàm đa thức $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên R.

Ta có $f(-2)=m(-2-1)(-2+2)+2(-2)+1=-3$ và có $f(1)=m(1-1)(1+2)+2.1+1=3$. Vì $f(-2).f(1)=-3.3=-9<0$ với mọi m.

Do đó $f(x)=0$ luôn có ít nhất 1 nghiệm trong khoảng $x_0\in(-2,1)$ với mọi m.

Kết luận phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị m.

b). $(4m+1)x^3-(m+1)x+m=0$ (1)

Đặt $f(x)=(4m+1)x^3-(m+1)x+m$. Tập xác định của hàm số f(x) là $D=R$. Vì f(x) là hàm đa thức $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên R.

Ta có $f(0)=m$ và có $f(-1)=(4m+1)(-1)^3-(m+1)(-1)+m=-2m$. Từ đó suy ra $f(-1).f(0)=-2m^2<0\ \forall m\neq 0 \Rightarrow f(x)=0$ luôn có ít nhất 1 nghiệm $x_0\in(-1;0)$

Xét trường hợp: $m=0$

$(4.0+1).x^3-(0+1)x+0=0 \Leftrightarrow x^3-x=0 \Leftrightarrow x=\pm 1 \quad \vee x=0$

Kết luận phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị m.

c). $(m^3-1)(x^{2001}-1)(x+2)^{2002}+2x+3=0$ (1)

Đặt $f(x)=(m^3-1)(x^{2001}-1)(x+2)^{2002}+2x+3$. Tập xác định của hàm số f(x) là $D=R$. Vì f(x) là hàm đa thức $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên R.

Ta có: $f(-2)=(m^3-1)\left[(-2)^{2001}-1\right](-2+2)^{2002}+2(-2)+3=-1$.

Ta có: $f(1)=(m^3-1)(1^{2001}-1)(1+2)^{20002}+2.1+3=5$

Vì $f(-2)f(1)=-5<0$ với mọi m.

$\Rightarrow$ $f(x)=0$ luôn có ít nhất 1 nghiệm $x_0\in(-2;1)$ với mọi m.

Kết luận phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị m.

d). $\cos x+m\cos 2x=0 \Leftrightarrow \cos x+m(2\cos^2 x-1)=0$ (1)

Đặt $f(x)=\cos x+m(2\cos^2 x-1)$. Tập xác định của hàm số f(x) là $D=R$. Vì f(x) là hàm đa thức $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên R.

Chọn nghiệm, cho $2\cos^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{3\pi}{4} \end{array}\right.$

Ta có: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + m\left(2\cos^2\frac{\pi}{4} - 1\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ta có: $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} + m\left(2\cos^2\frac{3\pi}{4} - 1\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vì $f\left(\frac{\pi}{4}\right).f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow f(x)$ luôn có ít nhất 1 nghiệm $x_0 \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$. Kết luận phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị m.

Chứng minh phương trình sau có ít nhất một nghiệm:
a). $x^3 - 5x^2 + 7 = 0$ b). $x^5 + x - 3 = 0$

LỜI GIẢI

a). Đặt $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7$. Tập xác định của hàm số f(x) là $D = R$. Vì f(x) là hàm đa thức $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên R.

Ta có $f(-1) = -1 - 5.1 + 7 = 1$ và $f(-2) = -21$, nên suy ra $f(-1)f(-2) = -21 < 0$ với mọi m. Do đó $f(x) = 0$ luôn có ít nhất 1 nghiệm $x_0 \in (-2;-1)$ với mọi m.

b). Đặt $f(x) = x^5 + x - 3$. Tập xác định của hàm số f(x) là $D = R$. Vì f(x) là hàm đa thức $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên R.

Ta có $f(1) = -1$ và có $f(2) = 31$, nên suy ra $f(1)f(2) = 31.(-1) = -31 < 0$ với mọi m.

Do đó $f(x) = 0$ luôn có ít nhất 1 nghiệm $n_0 \in (1;2)$ với mọi m.

Chứng minh các phương trình sau có ít nhất hai nghiệm :
a). $4x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$ b). $x^5 + x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 1 = 0$

LỜI GIẢI

a). Đặt $f(x) = 4x^4 + 2x^2 - x - 3$. Tập xác định của hàm số f(x) là $D = R$. Vì f(x) là hàm đa thức $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên R.

Ta có $f(0) = -3$, $f(-1) = 4$, $f(1) = 2$

Vì $f(-1)f(0) = -12 < 0, \forall m \Rightarrow$ phương trình (1) luôn có ít nhất 1 nghiệm $\in (-1;0)$ (2)

Vì $f(0)f(1) = -6 < 0\ \forall m \Rightarrow$ phương trình (1) có ít nhất 1 nghiệm $\in (0;1)$ (3)

Từ $(2),(3) \Rightarrow$ phương trình (1) luôn có ít nhất 2 nghiệm phân biệt.

Chứng minh phương trình $x^2\cos x + x\sin x + 1 = 0$ (1) có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$

LỜI GIẢI

Đặt $f(x) = x^2\cos x + x\sin x + 1$

Tập xác định của hàm số f(x) là $D = R$. Vì f(x) là hàm đa thức $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên R.

Ta có $f(0) = 0^2.\cos x + 0.\sin 0 + 1 = 1$ và $f(\pi) = \pi^2.\cos\pi + \pi.\sin\pi + 1 = -9$.

Vì $f(0)f(\pi) = -9 < 0 \Rightarrow$ phương trình (1) có ít nhất 1 nghiệm thuộc khoảng $(0;\pi)$.

Chứng minh phương trình $x^3+x+1=0 \quad (1)$ có ít nhất một nghiệm âm lớn hơn -1.

LỜI GIẢI

Đặt $f(x)=x^3+x+1$. Tập xác định của hàm số f(x) là $D=R$. Vì f(x) là hàm đa thức $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên R.

Ta có: $f(-1)=-1$, và $f(0)=1$. Từ đó suy ra $f(-1)f(0)=-1<0$. Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$.

Kết luận phương trình (1) luôn có ít nhất 1 nghiệm âm lớn hơn -1.

Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+c(c\neq 0)$ và $3a+4b+6c=0$. Chứng minh phương trình $f(x)=0$ luôn có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

LỜI GIẢI

$f(x)=ax^2+bx+c(c\neq 0)$

Tập xác định của hàm số f(x) là $D=R$. Vì f(x) là hàm đa thức $\Rightarrow f(x)$ liên tục trên R.

Ta có $f(0)=c$ và $f(1)=a+b+c$

Theo đề bài có $3a+4b+6c=0 \Rightarrow c=\dfrac{-3a-4b}{6}$

Ta có : $f(0)f(1)=c(a+b+c)=\dfrac{-3a-4b}{6}\left(a+b+\dfrac{-3a-4b}{6}\right)=-\dfrac{3a+4b}{6}\cdot\dfrac{3a+2b}{6}$

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ -1 & x=0\end{cases}$

a). Chứng minh $f(-1)f(2)<0$

b). Chứng minh phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm thuộc khoảng $(-1;2)$

LỜI GIẢI

a. Ta có $f(-1)=-1$ và $f(2)=\dfrac{1}{2} \Rightarrow f(-1)f(2)<0$

b. Vì hàm số $f(x)$ không liên tục trên $(-1;2) \Rightarrow f(x)$ không có nghiệm $n_0\in(-1;2)$

6. Chứng minh rằng phương trình $\cos^5 x+\cos x-1=0$ có nghiệm.

LỜI GIẢI

Đặt $\cos x=t(-1\le t\le 1)$, phương trình đã cho trở thành $t^5+t-1=0 \quad (*)$

Hàm số $f(t)=t^5+t-1$ liên tục trên R.

Ta có : $f(1)=1, f(-1)=-3.$

Do $f(1).f(-1)=-3<0$, suy ra phương trình $(*)$ có nghiệm thuộc $(-1;1)$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm.

7. Chứng minh các phương trình sau có nghiệm:

a) $x^4-4x+1=0$ b) $2x^5+3x+3=0$ c) $x^4-4x^3-2=0$ d) $5x^3+10x+6=0$

LỜI GIẢI

a). Đặt $f(x)=x^4-4x+1$ thì $f(x)$ liên tục trên R và $f(0)=1; f(1)=-2.$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên R, có $f(0).f(1)<0$ suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm.

b). Đặt $f(x)=2x^5+3x+3$ thì $f(x)$ liên tục trên R và $f(-1)=-2;f(0)=3$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên R, có $f(-1).f(0)<0$ suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$, suy ra phương trình có nghiệm.

c). Đặt $f(x)=x^4-4x^3-2$ thì $f(x)$ liên tục trên R và $f(-1)=3;f(0)=-2$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên R, có $f(-1).f(0)<0$ suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm.

d). Đặt $f(x)=5x^3+10x+6$ thì $f(x)$ liên tục trên R và $f(-1)=-9;f(0)=6$.

Hàm số $f(x)$ liên tục trên R, có $f(-1).f(0)<0$ suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm.

10. Chứng minh rằng nếu $\frac{a}{k}+\frac{b}{n}+\frac{c}{m}=0;k>n>m>0$ và $km\le n^2$ thì phương trình $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

LỜI GIẢI

Đặt $f(x)=ax^2+bx+c$ thì $f(x)$ liên tục trên R.

Ta có $f(0)=c;f\left(\frac{n}{k}\right)=a.\frac{n^2}{k^2}+b.\frac{n}{k}+c$

$\Rightarrow f(0).f\left(\frac{n}{k}\right)=c\left[\frac{n^2}{k}\left(\frac{a}{k}+\frac{b}{n}+\frac{c}{m}\right)+c\left(1-\frac{n^2}{km}\right)\right]=c^2\left(1-\frac{n^2}{km}\right)$ (do $\frac{a}{k}+\frac{b}{n}+\frac{c}{m}=0$)

Vì $c^2\ge 0;n^2\ge km>0\Rightarrow\frac{n^2}{km}\ge 1$ do đó $f(0).f\left(\frac{n}{k}\right)=c^2\left(1-\frac{n^2}{km}\right)\le 0$

-Với $c=0$: phương trình đã cho (kí hiệu là phương trình (1) trở thành $ax^2+bx=0$

Suy ra $x=0$ hoặc $ax+b=0$. (2)

+Nếu $a=0$ thì từ $c=a=0$ và điều kiện $\frac{a}{k}+\frac{b}{n}+\frac{c}{m}=0$ suy ra $b=0$. Khi đó phương trình (2) có nghiệm là $\forall x\in R$, suy ra phương trình (1) có nghiệm $x\in(0;1)$

+ Nếu $a\ne 0$ thì $b\ne 0$ (vì nếu $b=0,c=0$ thì từ điều kiện $\frac{a}{k}+\frac{b}{n}+\frac{c}{m}=0$ suy ra $a=0$)

suy ra phương trình (2) có nghiệm $x=-\frac{b}{a}$

Khi đó từ điều kiện $\frac{a}{k}+\frac{b}{n}+\frac{c}{m}=0;k>n>m>0$ và $c=0$ suy ra $x=-\frac{b}{a}=\frac{n}{k}\in(0;1)$

Do đó phương trình (1) có nghiệm $x\in(0;1)$

-Với $1-\frac{n^2}{km}=0\Rightarrow f\left(\frac{n}{k}\right)=0\Rightarrow\frac{n}{k}$ là nghiệm thuộc $(0;1)$.

- Với $c\ne 0$ và $1-\frac{n^2}{km}\ne 0\Rightarrow f(0).f\left(\frac{n}{k}\right)<0\Rightarrow f(x)$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $\left(0;\frac{n}{k}\right)$

Mà $\left(0;\frac{n}{k}\right)\subset(0;1)$ (vì $0<\frac{n}{k}<1$) nên phương trình (1) có nghiệm $x\in(0;1)$

Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

12. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c phương trình $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ có ít nhất một nghiệm.

LỜI GIẢI

Đặt $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$ thì $f(x)$ liên tục trên R.

Không giảm tính tổng quát, giả sử $a\le b\le c$

-Nếu $a=b$ hoặc $b=c$ thì $f(b)=(b-a)(b-c)=0.$ suy ra phương trình có nghiệm $x=b$

-Nếu $a<b<c$ thì $f(b)=(b-a)(b-c)<0$ và $f(a)=(a-b)(a-c)>0$ do đó tồn tại x_0 thuộc khoảng $(a;b)$ để $f(x_0)=0.$

Vậy phương trình đã cho luôn có ít nhất một nghiệm.

8. Chứng minh phương trình $2x^3-6x+3=0$ có ba nghiệm trên khoảng $(-2;2)$.

LỜI GIẢI

Đặt $f(x)=2x^3-6x+3$ thì $f(x)$ liên tục trên R.

$f(-2)=-16+12+3=-1<0;f(-1)=-2+6+3>0$

$f(1)=2-6+3=-1<0;f(2)=16-12+3=7>0$

Do đó $f(-2).f(-1)<0;f(-1).f(1)<0;f(1).f(2)<0.$ từ tính chất của hàm số liên tục , suy ra $f(x)$ có nghiệm thuộc khoảng $(-2;-1),(-1;1),(1;2)$ suy ra phương trình có ba nghiệm trên khoảng $(-2;2)$.

10. Chứng minh rằng với mọi a, b, c phương trình $x^3+ax^2+bx+c=0$ luôn có nghiệm.

LỜI GIẢI

Đặt $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ thì $f(x)$ liên tục trên R.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\Rightarrow\exists x_1>0$ để $f(x_1)>0.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\Rightarrow\exists x_2>0$ để $f(x_2)<0.$

Như vậy có x_1,x_2 để $f(x_1).f(x_2)<0$ suy ra phương trình có nghiệm $x\in(x_1;x_2)$ vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm.

11. Chứng minh rằng với mọi a, b, c phương trình $x^4+ax^3+bx^2+cx-1=0$ có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

LỜI GIẢI

Đặt $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx-1$ thì $f(x)$ liên tục trên R.

Ta có: $f(0)=-1;$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\Rightarrow\exists x_1>0$ để $f(x_1)>0.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\Rightarrow\exists x_2<0$ để $f(x_2)>0.$

Do đó $f(0).f(x_2)<0$ suy ra phương trình có nghiệm trong khoảng $(x_2;0)$

$f(0).f(x_1)<0$ suy ra phương trình có nghiệm trong khoảng $(0;x_1)$ mà các khoảng $(x_2;0)$ và $(0;x_1)$ không giao nhau, do đó phương trình có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

12. Chứng minh rằng phương trình $64x^6-96x^4+36x^2-3=0$ có nghiệm x_0 mà $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}<x_0<\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$.

LỜI GIẢI

Cách 1: Đặt $y=4x^2$ ta có phương trình $y^3-6y^2+9y-3=0 \quad (2)$

Ta chứng minh phương trình (2) có nghiệm $y\in\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}};2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$

Đặt $t=y-2$ phương trình (2) trở thành:

$(t+2)^3-6(t+2)^2+9(t+2)-3=0$

$\Leftrightarrow t^3+6t^2+12t+8-6t^2-24t-24+9t+18-3 \Leftrightarrow t^3-3t-1=0. \quad (3)$

Ta chứng minh (3) có nghiệm trong khoảng $\left(\sqrt{2+\sqrt{2}};\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$

Đặt $f(t)=t^3-3t-1$ thì $f(t)$ liên tục trên R.

Ta có $\sqrt{2+\sqrt{2}}<\sqrt{3,42}<1,85;\ \sqrt{2+\sqrt{2}}>\sqrt{3,4}>1,84.$

Nên $f\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)<1,85^3-3.1,84-1<6,35-5,52-1<0$

Và $\sqrt{2+\sqrt{3}}<\sqrt{3,74}<1,94;\sqrt{2+\sqrt{3}}>\sqrt{3,73}>1,93.$

Do đó $f\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)>1,93^2-3.1,94-1>7,18-5,82-1>0$

Suy ra $f\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right).f\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)<0$ vậy phương trình (3) có nghiệm $t\in\left(\sqrt{2+\sqrt{2}};\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$ từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Cách 2: (sử dụng lượng giác)

Từ công thức $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{2+2\cos 2\alpha}}{2}$.

Do đó $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2+2\cos\alpha}}{2};\cos\frac{\alpha}{4}=\frac{\sqrt{2+2\cos\frac{\alpha}{2}}}{2}$ hay $\cos\frac{\alpha}{4}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos\alpha}}}{2}$ với $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Từ công thức này suy ra: $\cos\frac{\pi}{16}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2};\cos\frac{\pi}{24}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}$

Nghiệm x_0 của phương trình đã cho có thể tìm được dưới dạng : $x_0=\cos\beta$, sao cho $\frac{\pi}{24}<\beta<\frac{\pi}{16}$.

Đặt $x=\cos\beta$, phương trình đã cho trở thành:

$64\cos^6\beta-96\cos^4\beta+36\cos^2\beta-2=1$

$\Leftrightarrow 2\left[2\left(16\cos^6\beta-24\cos^4\beta+9\cos^2\beta\right)-1\right]=1\Leftrightarrow 2\left(4\cos^3\beta-3\cos\beta\right)^2-1=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2\cos^2(3\beta)-1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \cos 6\beta=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \beta=\pm\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}(k=0;1;2..)$

Lấy $\beta=\frac{\pi}{18}$ ta được $\frac{\pi}{24}<\beta<\frac{\pi}{16}$ và nghiệm $x_0=\cos\frac{\pi}{18}$ thỏa mãn điều kiện đã nêu.

Chứng minh rằng phương trình $8x^3-6x-1=0$ có ba nghiệm thực phân biệt. Hãy tìm 3 nghiệm đó.

Đặt $f(x)=8x^3-6x-1$; tập xác định $D=\mathbb{R}$ suy ra hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta có $f(-1)=-3,\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=1,\ f(0)=-1,\ f(1)=1$ suy ra $f(-1)f\left(-\frac{1}{2}\right)<0, f\left(-\frac{1}{2}\right)f(0)<0, f(0)f(1)<0$. Từ 3 bất đẳng thức này và tính liên tục của hàm số suy ra pt $f(x)=0$ có ba nghiệm phân biệt thuộc $(-1;1)$. Đặt $x=\cos t,\ t\in[0;\pi]$ thay vào pt ta được:

$2\left(4\cos^3 t-3\cos t\right)=1 \Leftrightarrow \cos 3t=\cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow t=\pm\frac{\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3}$, kết hợp với $t\in[0;\pi]$ ta được $t\in\left\{\frac{\pi}{9};\frac{5\pi}{9};\frac{7\pi}{9}\right\}$.

Do đó phương trình đã cho có 3 nghiệm:

$x=\cos\frac{\pi}{9}, x=\cos\frac{5\pi}{9}, x=\cos\frac{7\pi}{9}$.

Cho phương trình: $m(x-1)\left(x^3-4x\right)+x^3-3x+1=0$ (x là ẩn, m là tham số). Chứng minh rằng với mọi giá trị thực của m phương trình đã cho có ít nhất ba nghiệm thực phân biệt.

LỜI GIẢI

Đặt $f(x)=m(x-1)\left(x^3-4x\right)+x^3-3x+1$ ta được $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(-2)=-1, f(0)=1, f(1)=-1, f(2)=3$

Do đó ta được $f(-2)f(0)<0, f(0)f(1)<0, f(1)f(2)<0$ nên phương trình $f(x)=0$ có nghiệm thuộc $(-2;0),(0;1),(1;2)$ suy ra phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Tìm n số nguyên dương nhỏ nhất sao cho phương trình $x^6+1=4x^2\sqrt{x^n-1}$ có nghiệm.

Ta có $x^6+1=4x^2\sqrt{x^n-1} \Leftrightarrow x^6+1-4x^2\sqrt{x^n-1}=0$. Đặt $f(x)=x^6+1-4x^2\sqrt{x^n-1}$.

Điều kiện để hàm số xác định $x^n-1\ge 0 \Leftrightarrow x^n\ge 1$.

Nếu n lẻ: hàm số xác định $\Leftrightarrow x\ge 1$.

Nếu n chẵn: Hàm số xác định $\Leftrightarrow x\le -1 \vee x\ge 1$. Khi đó $f(x)$ là hàm số chẵn trên tạp xác định của nó nên nếu phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x=x_0\le -1$ thì cũng có nghiệm $x=-x_0\ge 1$. Do đó ta chỉ cần xét trường hợp $x\ge 1$.

Ta có $x^6+1=\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)=\left(x^2+1\right)\left[x^2\left(x^2-1\right)+1\right]$

Ta có $\begin{cases} x^2+1 \overset{\text{Cauchy}}{\ge} 2x \\ x^2\left(x^2-1\right)+1 \overset{\text{Cauchy}}{\ge} 2x\sqrt{x^2-1} \end{cases} \Rightarrow x^6+1\ge 4x^2\sqrt{x^2-1}$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x^2=1 \\ x^2\left(x^2-1\right)=1 \end{cases}$ hệ này vô nghiệm. Do đó $x^6+1>4x^2\sqrt{x^2-1}, \forall x\ge 1$

Vì $x\ge 1 \Rightarrow x^2\ge x \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm khi $n\le 2$.

Với $n=3$ ta có $f(x)=x^6+1-4x^2\sqrt{x^3-1}$.

Có $f(1)=2$, $f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^6+1-4.\left(\frac{3}{2}\right)^2\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^3-1}=\frac{793}{64}-9.\sqrt{\frac{19}{8}}$.

Vì $\begin{cases}\frac{793}{64}<\frac{832}{64}=13\\ 9.\sqrt{\frac{19}{8}}>9.\sqrt{\frac{18}{8}}=13.5\end{cases}\Rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right)<0$. Từ đó có $f(1).f\left(\frac{3}{2}\right)<0$ (1).

Hàm số xác định và liên tục trên $[1;+\infty)$ do đó hàm số f(x) liên tục trên đoạn $\left[1;\frac{3}{2}\right]$ (2). Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

Kết luận $n=3$ là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho phương trình $x^6+1=4x^2\sqrt{x^n-1}$ có nghiệm.

Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2-1$

a). Chứng minh phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x_0\in(3;4)$.

b). Không tính $f\left(\sqrt[5]{36}\right)$ và $f\left(1+\sqrt[5]{36}\right)$ hãy chứng minh $x_0>1+\sqrt[5]{36}$.

LỜI GIẢI

Ta có $f(3)=-1$ và $f(4)=15$ nên $f(3).f(4)<0$ (1). Vì hàm số xác định và liên tục trên R nên nên hàm số f(x) liên tục trên đoạn $[3;4]$ (2). Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $x_0\in(3;4)$.

Ta có $f(x)=x^3-3x^2-1=x^3-3x^2+3x-3x+3-3-1=(x-1)^3-3(x-1)-3$. Vì x_0 là nghiệm của phương trình $f(x)=0$ nên $f(x_0)=0\Leftrightarrow(x_0-1)^3-3(x_0-1)-3=0$.

Đặt $\alpha=x_0-1$ vì $x_0\in(3;4)\Rightarrow\alpha\in(2;3)$ và $\alpha^3-3\alpha-3=0\Leftrightarrow\alpha^3=3\alpha+3$.

Áp dụng định lý Cauchy cho hai số không âm 3α và 3 ta có
$\alpha^3=3\alpha+3\ge2\sqrt{3\alpha.3}\Rightarrow\alpha^3\ge6\sqrt{\alpha}\Leftrightarrow\alpha^6\ge36\alpha\Leftrightarrow\alpha^5\ge36\Leftrightarrow\alpha\ge\sqrt[5]{36}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow3\alpha=3\Leftrightarrow\alpha=1\notin(2;3)\Rightarrow\alpha>\sqrt[5]{36}\Leftrightarrow x_0-1>\sqrt[5]{36}\Leftrightarrow x_0>1+\sqrt[5]{36}$.

Chứng minh khi $m\in(2;3)$ thì phương trình $2x^3-9x^2+12x-2-m=0$ có ba nghiệm dương phân biệt.

LỜI GIẢI

Đặt $f(x)=2x^3-9x^2+12x-2-m$

Vì $m\in(2;3)\Leftrightarrow 2<m<3\Rightarrow\begin{cases}m-2>0\\ m-3<0\end{cases}$.

Ta có $f(0)=-2-m<2-m<0$, $f(1)=3-m>0$, $f(2)=2-m<0$, $f(3)=7-m>0$. Từ đó có $\begin{cases}f(0).f(1)<0\\ f(1).f(2)<0\\ f(2).f(3)<0\end{cases}$ (1). Vì hàm số liên tục và xác định trên R nên hàm số liên tục trên các đoạn $[0;1]$, $[1;2]$, $[2;3]$ (2). Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f(x)=0$ có ba nghiệm dương phân biệt lần lượt thuộc các khoảng $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;3)$.

Cho α và β thỏa $0<\alpha<\beta$. Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm : $\sin^{10}x-x=\dfrac{\alpha\sin^{10}\alpha+\beta\sin^{10}\beta-\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta}$.

LỜI GIẢI

Đặt $f(x)=\sin^{10}x-x-\dfrac{\alpha\sin^{10}\alpha+\beta\sin^{10}\beta-\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta}$. Có hàm số f(x) liên tục trên đoạn $[\alpha;\beta]$ (1).

Ta có $f(\alpha)=\sin^{10}\alpha-\alpha-\dfrac{\alpha\sin^{10}\alpha+\beta\sin^{10}\beta-\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta}$

$=\dfrac{\alpha\sin^{10}\alpha-\alpha^2+\beta\sin^{10}\alpha-\alpha\beta-\alpha\sin^{10}\alpha-\beta\sin^{10}\beta+\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}=\dfrac{\beta\left(\sin^{10}\alpha-\alpha-\sin^{10}\beta+\beta\right)}{\alpha+\beta}$.

$f(\beta)=\sin^{10}\beta-\beta-\dfrac{\alpha\sin^{10}\alpha+\beta\sin^{10}\beta-\alpha^2-\beta^2}{\alpha+\beta}$

$=\dfrac{\alpha\sin^{10}\beta-\alpha\beta+\beta\sin^{10}\beta-\beta^2-\alpha\sin^{10}\alpha-\beta\sin^{10}\beta+\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}=-\dfrac{\alpha\left(\sin^{10}\alpha-\alpha-\sin^{10}\beta+\beta\right)}{\alpha+\beta}$.

$\Rightarrow f(\alpha).f(\beta)=-\dfrac{\alpha\beta\left(\sin^{10}\alpha-\alpha-\sin^{10}\beta+\beta\right)^2}{(\alpha+\beta)^2}<0,\forall\alpha,\beta>0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f(x)=0$ có nghiệm $x_0\in[\alpha;\beta]$.

Chứng minh với mọi tham số m phương trình sau luôn có nghiệm thực : $(m^2-3m+5)x^3+2x-2=0$

LỜI GIẢI

Đặt $f(x)=(m^2-3m+5)x^3+2x-2$.

Ta có $f(0) = -2 < 0$ và $f(1) = m^2 - 3m + 5 = \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0, \forall m$ nên $f(0).f(1) < 0$ (1). Vì hàm số f(x) xác định và liên tục trên R nên f(x) liên tục trên đoạn $\left[0;1\right]$ (1). Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

> Chứng minh rằng phương trình $(m^2+1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt với mọi giá trị của tham số m.

Đặt $f(x) = (m^2+1)x^3 - 2m^2x^2 - 4x + m^2 + 1$. Ta có :

$f(-3) = -27m^2 - 27 - 18m^2 + 12 + m^2 + 1 = -44m^2 - 14 = -(44m^2 + 14) < 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

$f(0) = m^2 + 1 > 0$.

$f(1) = m^2 + 1 - 2m^2 - 4 + m^2 + 1 = -2 < 0$.

$f(2) = 8(m^2+1) - 8m^2 - 8 + m^2 + 1 = m^2 + 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Từ đó ta có $\begin{cases} f(-3).f(0) < 0 \\ f(0).f(1) < 0 \\ f(1).f(2) < 0 \end{cases}$ (1). Hàm số f(x) xác định và liên tục trên R do đó f(x) liên tục trên các đoạn $\left[-3;0\right], \left[0;1\right], \left[1,2\right]$ (2). Từ (1) và (2) suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt lần lượt thuộc các khoảng $(-3;0), (0;1), (1;2)$.

> Chứng minh phương trình $-2x^4 + mx^3 + nx^2 + px + 2011 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm với $\forall$ m,n,p $\in R$.

Xét phương trình: $-2x^4 + mx^3 + nx^2 + px + 2011 = 0$ (1)

Xét hàm số: $f(x) = -2x^4 + mx^3 + nx^2 + px + 2011$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^4 + mx^3 + nx^2 + px + 2011) = -\infty \Rightarrow \exists b > 0$ sao cho $f(b) < 0$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^4 + mx^3 + nx^2 + px + 2011) = -\infty \Rightarrow \exists a > 0$ sao cho $f(a) < 0$

$f(0) = 2011 > 0$

Hàm số f(x) liên tục trên các đoạn $\left[a;0\right]$ và $\left[0;b\right]$

$\begin{cases} f(a).f(0) < 0 \\ f(0).f(b) < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ phương trình có ít nhất 1 nghiệm $x_1 \in (a;0)$ và ít nhất 1 nghiệm $x_2\,(0;b)$.

Vậy phương trình có ít nhất 2 nghiệm.

> Cho phương trình: $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
> a). Với $d < 0$ chứng minh rằng phương trình có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

b). Với $d=1$, giả sử phương trình có nghiệm, chứng minh $a^2+b^2+c^2\ge\frac{4}{3}$

LỜI GIẢI

a)

Đặt $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ liên tục trên R.

Ta có: $f\left(0\right)=d<0$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$, nên tồn tại 2 số $\alpha<0$ và $\beta>0$ sao cho $f(\alpha)>0,\ f(\beta)>0$. Do đó $\begin{cases} f(0).f(\alpha)<0 \\ f(0).f(\beta)<0 \end{cases}$.

Vậy phương trình có ít nhất hai nghiệm phân biệt thuộc hai khoảng $(\alpha,0)$ và $(0,\beta)$.

b). $d=1$ Gọi x_0 là nghiệm của phương trình ($x_0\ne 0$)

$$x_0^4+ax_0^3+bx_0^2+cx_0+1=0\Leftrightarrow b=-x_0^2+\frac{-1}{x_0^2}-ax_0-c\frac{1}{x_0}$$

Ta có: $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x_0^2+\frac{1}{x_0^2}+1\right)=\left[a^2+c^2+\left(-x_0^2+\frac{-1}{x_0^2}-ax_0-c\frac{1}{x_0}\right)^2\right]\left(x_0^2+\frac{1}{x_0^2}+1\right)$

$$\ge\left(ax_0+c\frac{1}{x_0}-x_0^2+\frac{-1}{x_0^2}-ax_0-c\frac{1}{x_0}\right)^2=\left(x_0^2+\frac{1}{x_0^2}\right)^2$$

Suy ra: $\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge\dfrac{\left(x_0^2+\frac{1}{x_0^2}\right)^2}{x_0^2+\frac{1}{x_0^2}+1}=\dfrac{t^2}{t+1}$ với $t=x_0^2+\frac{1}{x_0^2}\ge 2$

Mặt khác: $\frac{t^2}{t+1}\ge\frac{4}{3}\Leftrightarrow 3t^2-4t-4\ge 0\Leftrightarrow(t-2)(3t+2)\ge 0$ (đúng do $t\ge 2$).

Vậy $a^2+b^2+c^2\ge\frac{4}{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=-\frac{2}{3}$ (ứng với $x_0=1$).

$a=c=\frac{2}{3},b=-\frac{2}{3}$ (ứng với $x_0=-1$).

Cho ba số a, b, c thoả mãn hệ thức $2a+3b+6c=0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2+bx+c=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng (0; 1).

LỜI GIẢI

Đặt $f\left(x\right)=ax^2+bx+c\Rightarrow f\left(x\right)$ liên tục trên R.

- $f\left(0\right)=c$, $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}a+\frac{2}{3}b+c=\frac{1}{9}\left(4a+6b+12c\right)-\frac{c}{3}=-\frac{c}{3}$.
- Nếu $c=0$ thì $f\left(\frac{2}{3}\right)=0$ $\Rightarrow$ phương trình đã cho có nghiệm $\frac{2}{3}\in(0;1)$
- Nếu $c\ne 0$ thì $f(0).f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{c^2}{3}<0\Rightarrow$ phương trình đã cho có nghiệm $\alpha\in\left(0;\frac{2}{3}\right)\subset(0;1)$.

Kết luận phương trình đã cho luôn có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng (0; 1).