PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC
TÓM TẮT GIÁO KHOA

Nguyên lý quy nạp toán học:

Giả sử $P(n)$ là một mệnh đề phụ thuộc vào số tự nhiên n. Nếu cả hai điều kiện (i) và (ii) dưới đây được thỏa mãn thì $P(n)$ đúng với mọi $n \ge m$ (m là số tự nhiên cho trước).

$(i) P(m)$ đúng.

(ii) Với mỗi số tự nhiên $k \ge m,$ nếu $P(k+1)$ đúng.

Phương pháp chứng minh dựa trên nguyên lý quy nạp toán học gọi là phương pháp quy nạp toán học(hay gọi tắt là phương pháp quy nạp).

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

PHƯƠNG PHÁP

Để chứng minh một mệnh đề $P(n)$ phụ thuộc vào số tự nhiên n đúng với mọi $n \ge m$ (m là số tự nhiên cho trước), ta thực hiện theo hai bước sau:

Bước 1: Chứng minh rằng $P(n)$ đúng khi $n = m$.

Bước 2: Với k là một số tự nhiên tùy ý, $k \ge m$. Giả sử $P(n)$ đúng khi $n = k$, ta sẽ chứng minh $P(n)$ cũng đúng khi $n = k+1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, ta kết luận rằng $P(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n \ge m$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi số nguyên n, ta có:

a). $1.4 + 2.7 + \cdots + n(3n+1) = n(n+1)^2$

b). $\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

LỜI GIẢI

a). $1.4 + 2.7 + \cdots + n(3n+1) = n(n+1)^2$ (1)

Với n = 1: Vế trái của (1) $= 1.4 = 4$; Vế phải của (1) $= 1(1+1)^2 = 4$. Suy ra Vế trái của (1) = Vế phải của (1). Vậy (1) đúng với n = 1.

Giả sử (1) đúng với $n = k$. Có nghĩa là ta có: $1.4 + 2.7 + \cdots + k(3k+1) = k(k+1)^2$ (2)

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n = k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$1.4 + 2.7 + \cdots + k(3k+1) + (k+1)(3k+4) = (k+1)(k+2)^2$

Thật vậy $\underbrace{1.4 + 2.7 + \cdots + k(3k+1)}_{=k(k+1)^2} + (k+1)(3k+4) = k(k+1)^2 + (k+1)(3k+4)$

$$= (k+1)(k+2)^2 \text{ (đpcm).}$$

Vậy (1) đúng khi $n = k+1$. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

b). $\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ (1)

Với $n=1$: Vế trái của (1) $=\frac{1}{1.2.3}=\frac{1}{6}$; Vế phải của (1) $=\frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)}=\frac{1}{6}$.

Suy ra Vế trái của (1) = Vế phải của (1). Vậy (1) đúng với $n=1$.

Giả sử (1) đúng với $n=k$. Có nghĩa là ta có: $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}$ (2)

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)} \quad (2)$$

Thật vậy $\underbrace{\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}}_{=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$

$$=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{4(k+1)(k+2)}\left(k(k+3)+\frac{4}{k+3}\right)$$

$$=\frac{k^3+6k^2+9k+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{(k+1)^2(k+4)}{4(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{(k+1)(k+4)}{4(k+2)(k+3)} \text{ (đpcm).}$$

Vậy (1) đúng khi $n=k+1$. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

Ví dụ 2: Với mỗi số nguyên dương n, gọi $u_n=9^n-1$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì u_n luôn chia hết cho 8.

LỜI GIẢI

Ta có $u_1=9^1-1=8$ chia hết cho 8 (đúng).

Giả sử $u_k=9^k-1$ chia hết cho 8.

Ta cần chứng minh $u_{k+1}=9^{k+1}-1$ chia hết cho 8.

Thật vậy, ta có $u_{k+1}=9^{k+1}-1=9.9^k-1=9\left(9^k-1\right)+8=9u_k+8$. Vì $9u_k$ và 8 đều chia hết cho 8, nên u_{k+1} cũng chia hết cho 8.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì u_n chia hết cho 8.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n\geq 2$, ta luôn có: $2^{n+1}>2n+3$ (*)

LỜI GIẢI

Với $n=2$ ta có $2^{2+1}>2.2+3 \Leftrightarrow 8>7$ (đúng). Vậy (*) đúng với $n=2$.

Giả sử với $n=k, k\geq 2$ thì (*) đúng, có nghĩa ta có: $2^{k+1}>2k+3$ (1).

Ta phải chứng minh (*) đúng với $n=k+1$, có nghĩa ta phải chứng minh:

$2^{k+2}>2(k+1)+3$

Thật vậy, nhân hai vế của (1) với 3 ta được: $2.2^{k+1}>2(2k+3) \Leftrightarrow 2^{k+2}>4k+6>2(k+1)+3$. Vậy $2^{k+2}>2(k+1)+3$ (đúng).

Do đó theo nguyên lí quy nạp, (*) đúng với mọi số nguyên dương $n\geq 3$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Câu 1: Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, ta có:

1). $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$

2). $2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2=\dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

3). $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

4). $1.2+2.3+3.4+\cdots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

5). $1.2+2.5+3.8+\cdots+n(3n-1)=n^2(n+1)$

6). $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

7). $1.2^2+2.3^3+3.4^4+\cdots+(n-1)n^2=\dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}, n\ge 2$

8). $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\left(1-\dfrac{1}{16}\right)...\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{n+1}{2n}, n\ge 2$

9). $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$

10). $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{2^n-1}{2^n}$

11). $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{3}{27}+\cdots+\dfrac{n}{3^n}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2n+3}{4.3^n}$

LỜI GIẢI

1). $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}\quad(1)$

Với n = 1: Vế trái của (1) = 1, vế phải của (1) $=\dfrac{1(4.1-1)}{3}=1$. Vậy (1) đúng với n = 1.

Giả sử (1) đúng với $n=k$. Có nghĩa là ta có: $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2=\dfrac{k(4k^2-1)}{3}\quad(2)$

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2=\frac{(k+1)\left[4(k+1)^2-1\right]}{3}=\frac{(2k+1)(k+1)(2k+3)}{3}$$

Thật vậy $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2=\dfrac{k(4k^2-1)}{3}+(2k+1)^2$ (thế (2) vào).

$$=\frac{k(2k+1)(2k-1)}{3}+(2k+1)^2=\frac{(2k+1)(2k^2+5k+3)}{3}=\frac{(2k+1)(k+1)(2k+3)}{3}\ \text{(đpcm).}$$

Vậy (1) đúng khi $n=k+1$. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

∗ ***Chú ý :*** $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ *với* x_1, x_2 *là 2 nghiệm của phương trình* $ax^2+bx+c=0$.

Áp dụng : ta thấy $2k^2+5k+3=0$ *có 2 nghiệm là* $k=-1; k=-\frac{3}{2}$ *. Do đó*

$2k^2+5k+3=2(k+1)\left(k+\frac{3}{2}\right)=(k+1)(2k+3)$

2). $2^2+4^2+6^2+\cdots+(2n)^2=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$ (1)

Với n = 1: Vế trái của (1) = 4, vế phải của (1) $=4$. Suy ra (1) đúng với n = 1.

Giả sử (1) đúng với $n=k$. Có nghĩa là ta có: $2^2+4^2+6^2+\cdots+(2k)^2=\frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}$ (2)

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$2^2+4^2+6^2+\cdots+(2k)^2+(2k+2)^2=\frac{2(k+1)(k+2)(2k+3)}{3}$

Thật vậy: $2^2+4^2+6^2+\cdots+(2k)^2+(2k+2)^2=\frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}+(2k+2)^2$ (thay (2) vào).

$\frac{2(k+1)(2k^2+7k+6)}{3}=\frac{2(k+1)(k+2)(2k+3)}{3}$ (đpcm).

Vậy (1) đúng khi $n=k+1$. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

3). $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ (1)

Với n = 1: Vế trái của (1) = 1, vế phải của (1) $=1$. Suy ra (1) đúng với n = 1.

Giả sử (1) đúng với $n=k$. Có nghĩa là ta có: $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$ (2)

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

Thật vậy: $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$

$\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$ (đpcm).

Vậy (1) đúng khi $n=k+1$. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

4). $1.2+2.3+3.4+\cdots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ (1)

Với n = 1: Vế trái của (1) = 2, vế phải của (1) $=2$. Suy ra (1) đúng với n = 1.

Giả sử (1) đúng với $n=k$. Có nghĩa là ta có: $1.2+2.3+3.4+\cdots+k(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$ (2)

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$1.2+2.3+3.4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$

Thật vậy: $1.2+2.3+3.4+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)$

$=\dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$ (đpcm).

Vậy (1) đúng khi $n=k+1$. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

5). $1.2+2.5+3.8+\cdots+n(3n-1)=n^2(n+1)$ (1)

Với n = 1: Vế trái của (1) = 2, vế phải của (1) $=2$. Suy ra (1) đúng với n = 1.

Giả sử (1) đúng với $n=k$. Có nghĩa là ta có: $1.2+2.5+3.8+\cdots+k(3k-1)=k^2(k+1)$ (2)

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$1.2+2.5+3.8+\cdots+k(3k-1)+(k+1)(3k+2)=(k+1)^2(k+2)$

Thật vậy: $1.2+2.5+3.8+\cdots+k(3k-1)+(k+1)(3k+2)=k^2(k+1)+(k+1)(3k+2)$

$(k+1)(k^2+3k+2)=(k+1)(k+1)(k+2)=(k+1)^2(k+2)$ (đpcm).

Vậy (1) đúng khi $n=k+1$. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

6). $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ (1)

Với n = 1: Vế trái của (1) = 6, vế phải của (1) $=6$. Suy ra (1) đúng với n = 1.

Giả sử (1) đúng với $n=k$. Có nghĩa là ta có:

$1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots+k(k+1)(k+2)=\dfrac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$ (2)

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots+k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)(k+3)=\dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$ Thật vậy:

$1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots+k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)(k+3)=$

$\dfrac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}+(k+1)(k+2)(k+3)=\dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$ (đpcm).

Vậy (1) đúng khi $n=k+1$. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

7). $1.2^2+2.3^3+3.4^4+\cdots+(n-1)n^2=\dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}, n\ge 2$ (1)

Với n = 2: Vế trái của (1) = 4, vế phải của (1) $=4$. Suy ra (1) đúng với n = 2.

Giả sử (1) đúng với $n=k$. Có nghĩa là ta có:

$1.2^2+2.3^3+3.4^4+\cdots+(k-1)k^2=\dfrac{k(k^2-1)(3k+2)}{12}$

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$1.2^2+2.3^3+3.4^4+\cdots+(k-1)k^2+k(k+1)^2=\dfrac{(k+1)\left((k+1)^2-1\right)\left(3(k+1)+2\right)}{12}$

$\Leftrightarrow 1.2^2+2.3^3+3.4^4+\cdots+(k-1)k^2+k(k+1)^2=\dfrac{(k+1)(k^2+2k)(3k+5)}{12}$

Thật vậy: $1.2^2+2.3^3+3.4^4+\cdots+(k-1)k^2+k(k+1)^2=\dfrac{k(k^2-1)(3k+2)}{12}+k(k+1)^2$

$=\dfrac{k(k+1)(3k^2+11k+10)}{12}=\dfrac{k(k+1)(k+2)(3k+5)}{12}$

Vậy (1) đúng khi $n = k + 1$. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương $n \geq 2$.

8). $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}, n \geq 2$ (1)

Với n = 2: Vế trái của (1) $=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, vế phải của (1) $=\frac{2+1}{2.2}=\frac{3}{4}$. Suy ra (1) đúng với n = 2.

Giả sử (1) đúng với $n = k$. Có nghĩa là ta có: $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)...\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{k+1}{2k}$

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)...\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{k+2}{2(k+1)}$$

Thật vậy ta có: $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)...\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{k+1}{2k}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$

$=\frac{k+1}{2k}.\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}=\frac{k+2}{2(k+1)}$ (đpcm).

Vậy (1) đúng khi $n = k + 1$. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương $n \geq 2$.

9). $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$ (1)

Với n = 1: Vế trái của (1) $= 1$, vế phải của (1) $= 2\sqrt{1} = 2$. Suy ra (1) đúng với n = 1.

Giả sử (1) đúng với $n = k$. Có nghĩa là ta có: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}$ (2)

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}$$

Thật vậy: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}$ (đúng)

Vì $2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1} \Leftrightarrow 2\sqrt{k(k+1)}+1<2(k+1)$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{k^2+k}<2k+1 \Leftrightarrow 4(k^2+k)<(2k+1)^2$ (đúng).

Vậy (1) đúng khi $n = k + 1$. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

10). $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^n}$ (1)

Với n = 1: Vế trái của (1) $=\frac{1}{2}$, vế phải của (1) $=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$. Suy ra (1) đúng với n = 1.

Giả sử (1) đúng với $n = k$. Có nghĩa là ta có: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^k}=\frac{2^k-1}{2^k}$ (2).

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}$$

Thật vậy: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{2^k-1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}$

$=\dfrac{2\left(2^k-1\right)}{2.2^k}+\dfrac{1}{2^{k+1}}=\dfrac{2^{k+1}-2}{2^{k+1}}+\dfrac{1}{2^{k+1}}=\dfrac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}$ (đpcm).

Vậy (1) đúng khi $n=k+1$. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

11). $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{3}{27}+\cdots+\dfrac{n}{3^n}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2n+3}{4.3^n}\ (1)$

Với n = 1: Vế trái của (1) $=\dfrac{1}{3}$, vế phải của (1) $=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2.1+3}{4.3}=\dfrac{1}{3}$. Suy ra (1) đúng với n = 1.

Giả sử (1) đúng với $n=k$. Có nghĩa là ta có: $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{3}{27}+\cdots+\dfrac{k}{3^k}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2k+3}{4.3^k}\ (2)$

Ta phải chứng minh (1) đúng với $n=k+1$. Có nghĩa ta phải chứng minh:

$\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{3}{27}+\cdots+\dfrac{k}{3^k}+\dfrac{k+1}{3^{k+1}}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2(k+1)+3}{4.3^{k+1}}$

Thật vậy: $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{3}{27}+\cdots+\dfrac{k}{3^k}+\dfrac{k+1}{3^{k+1}}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2k+3}{4.3^k}+\dfrac{k+1}{3^{k+1}}$

$=\dfrac{3}{4}-\dfrac{3(2k+3)}{4.3^{k+1}}+\dfrac{k+1}{3^{k+1}}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{3(2k+3)-4(k+1)}{4.3^{k+1}}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2k+5}{4.3^{k+1}}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2(k+1)+3}{4.3^{k+1}}$ (đúng).

Vậy (1) đúng khi $n=k+1$. Do đó theo nguyên lí quy nạp, (1) đúng với mọi số nguyên dương n.

Câu 2: Chứng minh rằng $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ta có:

1). n^3+11n chia hết cho 6.

2). n^3+3n^2+5n chia hết cho 3

3). n^3-n chia hết cho 3.

4). $2n^3-3n^2+n$ chia hết cho 6.

5). 13^n-1 chia hết cho 6.

6). $4^n+15n-1$ chia hết cho 9.

7). 4^n+6n+8 chia hết cho 9.

8). $7.2^{2n-2}+3^{2n-1}$ chia hết cho 5

9). $3^{2n+1}+2^{n+2}$ chia hết cho 7.

10). $11^{n+1}+12^{2n-1}$ chia hết cho 133.

11). Chứng minh $\forall n\in\mathbb{N}^*$ thì $16^n-15n-1$ chia hết cho 225.

12). Chứng minh $\forall n\in\mathbb{N}$ thì $4.3^{2n+2}+32n-36$ chia hết cho 32.

13). $3^{3n+3}-26n-27\,\vdots\,169,\forall n\in\mathbb{N}^*$

LỜI GIẢI

1). n^3+11n chia hết cho 6.

Với $n=1$ ta có $1^3+11.1=12$ chia hết cho 6 đúng.

Giả sử với $n=k$ thì k^3+11k chia hết cho 6.

Ta phải chứng minh với $n=k+1$ thì $\left(k+1\right)^3+11\left(k+1\right)$ chia hết cho 6.

Thật vậy ta có $\left(k+1\right)^3+11\left(k+1\right)=k^3+3k^2+3k+1+11k+11=(k^3+11k)+3k(k+1)+12\ (*)$

Ta có k^3+11k chia hết cho 6 theo bước 2, $3k(k+1)$ chia hết cho 6 và 12 hiển nhiên chia hết cho 6. Từ đó suy ra $(*)$ chia hết cho 6 (đpcm).

2). n^3+3n^2+5n chia hết cho 3

Đặt $u_n = n^3 + 3n^2 + 5n$

Ta có $u_1 = 1^3 + 3.1^2 + 5.1 = 9$ chia hết cho 3.

Giả sử $u_k = k^3 + 3k^2 + 5k$ chia hết cho 3.

Ta cần chứng minh $u_{k+1} = (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1)$ chia hết cho 3.

Thật vậy, ta có $u_{k+1} = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3k^2 + 6k + 3 + 5k + 5 = u_k + 3(k^2 + 3k + 3)$. Vì u_k và $3(k^2 + 3k + 3)$ đều chia hết cho 3, nên u_{k+1} cũng chia hết cho 3.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì u_n chia hết cho 3.

3). $n^3 - n$ chia hết cho 3.

Đặt $u_n = n^3 - n$

Ta có $u_1 = 1^3 - 1 = 0$ chia hết cho 3 (đúng).

Giả sử $u_k = k^3 - k$ chia hết cho 3.

Ta cần chứng minh $u_{k+1} = (k+1)^3 - (k+1)$ chia hết cho 3.

Thật vậy, ta có $u_{k+1} = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = u_k + 3(k^2 + k)$. Vì u_k và $3(k^2 + k)$ đều chia hết cho 3, nên u_{k+1} cũng chia hết cho 3.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì u_n chia hết cho 3.

4). $2n^3 - 3n^2 + n$ chia hết cho 6.

Đặt $u_n = 2n^3 - 3n^2 + n$

Ta có $u_1 = 2.1^3 - 3.1^2 + 1 = 0$ chia hết cho 6 (đúng).

Giả sử $u_k = 2k^3 - 3k^2 + k$ chia hết cho 6.

Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 2(k+1)^3 - 3(k+1)^2 + k + 1$ chia hết cho 6.

Thật vậy, khai triển rút gọn ta được $u_{k+1} = 2k^3 - 3k^2 + k + 6k^2 = u_k + 6k^2$. Vì u_k và $6k^2$ đều chia hết cho 6, nên u_{k+1} cũng chia hết cho 6.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì u_n chia hết cho 6.

5). $13^n - 1$ chia hết cho 6.

Đặt $u_n = 13^n - 1$

Với $n = 1$, ta có $u_1 = 13^1 - 1 = 12$ chia hết cho 6 (đúng).

Giả sử $u_k = 13^k - 1$ chia hết cho 6.

Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 13^{k+1} - 1$ chia hết cho 6.

Thật vậy ta có $u_{k+1} = 13.13^k - 1 = 13(13^k - 1) + 12 = 12u_k + 12$. Vì $12u_k$ và 12 đều chia hết cho 6, nên u_{k+1} cũng chia hết cho 6.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì u_n chia hết cho 6.

6). $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9.

Đặt $u_n = 4^n + 15n - 1$

Với $n = 1$, ta có $u_1 = 4^1 + 15.1 - 1 = 18$ chia hết cho 9 (đúng).

Giả sử $u_k = 4^k + 15k - 1$ chia hết cho 9.

Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 4^{k+1} + 15(k+1) - 1$ chia hết cho 9.

Thật vậy ta có $u_{k+1} = 4.4^k + 15k + 14 = 4\left(4^k + 15k - 1\right) - 45k + 18 = 4.u_k + 9\left(2 - 5k\right)$

Vì $4.u_k$ và $9\left(2-5k\right)$ đều chia hết cho 9, nên u_{k+1} cũng chia hết cho 9.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì u_n chia hết cho 9.

7). $4^n + 6n + 8$ chia hết cho 9.

Đặt $u_n = 4^n + 6n + 8$

Với $n = 1$, ta có $u_1 = 4^1 + 6.1 + 8 = 18$ chia hết cho 9 (đúng).

Giả sử $u_k = 4^k + 6k + 8$ chia hết cho 9.

Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 4^{k+1} + 6(k+1) + 8$ chia hết cho 9.

Thật vậy ta có $u_{k+1} = 4.4^k + 6k + 14 = 4\left(4^k + 6k + 8\right) - 18k + 18 = 4u_k + 18\left(1-k\right)$

Vì $4.u_k$ và $18\left(1-k\right)$ đều chia hết cho 9, nên u_{k+1} cũng chia hết cho 9.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì u_n chia hết cho 9.

8). $7.2^{2n-2} + 3^{2n-1}$ chia hết cho 5

Đặt $u_n = 7.2^{2n-2} + 3^{2n-1}$

Với $n = 1$, ta có $u_1 = 7.2^{2.1-2} + 3^{2.1-1} = 10$ chia hết cho 5 (đúng).

Giả sử $u_k = 7.2^{2k-2} + 3^{2k-1}$ chia hết cho 5.

Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 7.2^{2k} + 3^{2k+1}$ chia hết cho 5.

Thật vậy ta có $u_{k+1} = 4\left(7.2^{2k-2} + 3^{2k-1}\right) - 4.3^{2k-1} + 3^{2k+1} = 4.u_k + 5.3^{2k-1}$

Vì $4.u_k$ và 5.3^{2k-1} đều chia hết cho 5, nên u_{k+1} cũng chia hết cho 5.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì u_n chia hết cho 5.

9). $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ chia hết cho 7.

Đặt $u_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$

Với $n = 1$, ta có $u_1 = 3^{2.1+1} + 2^{1+2} = 35$ chia hết cho 7 (đúng).

Giả sử $u_k = 3^{2k+1} + 2^{k+2}$ chia hết cho 7.

Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 3^{2k+3} + 2^{k+3}$ chia hết cho 7.

Thật vậy ta có $u_{k+1} = 3^{2k+1+2} + 2^{k+2+1} = 3^2.3^{2k+1} + 2.2^{k+2} = 9\left(3^{2k+1} + 2^{k+2}\right) - 7.2^{k+2} = 9u_k - 7.2^{k+2}$

Vì $9.u_k$ và 7.2^{k+2} đều chia hết cho 7, nên u_{k+1} cũng chia hết cho 7.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì u_n chia hết cho 7.

10). $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ chia hết cho 133.

Đặt $u_n = 11^{n+1} + 12^{2n-1}$

Với $n = 1$, ta có $u_1 = 11^{1+1} + 12^{2.1-1} = 133$ chia hết cho 133 (đúng).

Giả sử $u_k = 11^{k+1} + 12^{2k-1}$ chia hết cho 133.

Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 11^{k+1+1} + 12^{2k+2-1}$ chia hết cho 133.

Thật vậy ta có $u_{k+1} = 11.11^{k+1} + 12^2.12^{2k-1} = 11\left(11^{k+1} + 12^{2k-1}\right) + 133.12^{2k-1} = 11.u_k + 133.12^{2k-1}$

Vì $11.u_k$ và 133.12^{2k-1} đều chia hết cho 133, nên u_{k+1} cũng chia hết cho 133.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì u_n chia hết cho 133.

11). Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $16^n - 15n - 1$ chia hết cho 225.

Đặt $u_n = 16^n - 15n - 1$

Với $n = 1$, ta có $u_1 = 16^1 - 15.1 - 1 = 0$ chia hết cho 225 (đúng).

Giả sử $u_k = 16^k - 15k - 1$ chia hết cho 225.

Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 16^{k+1} - 15(k+1) - 1$ chia hết cho 225.

Thật vậy ta có $u_{k+1} = 16^{k+1} - 15(k+1) - 1 = 16.16^k - 15k - 16 = 16\left(16^k - 15k - 1\right) + 225k = 16u_k + 225k$

Vì $16u_k$ và $225k$ đều chia hết cho 225, nên u_{k+1} cũng chia hết cho 225.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì u_n chia hết cho 225.

12). Chứng minh $\forall n \in \mathbb{N}$ thì $4.3^{2n+2} + 32n - 36$ chia hết cho 32.

Đặt $u_n = 4.3^{2n+2} + 32n - 36$

Với $n = 1$, ta có $u_1 = 4.3^{2+2} + 32 - 36 = 320$ chia hết cho 32 (đúng).

Giả sử $u_k = 4.3^{2k+2} + 32k - 36$ chia hết cho 32.

Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 4.3^{2(k+1)+2} + 32(k+1) - 36$ chia hết cho 32.

Thật vậy ta có $u_{k+1} = 9.4.3^{2k+2} + 32k - 4 = 9\left(4.3^{2k+2} + 32k - 36\right) - 32(8k - 32) = 9u_k - 32(8k - 32)$

Vì $9u_k$ và $32(8k-32)$ đều chia hết cho 32, nên u_{k+1} cũng chia hết cho 32.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì u_n chia hết cho 32.

13). $3^{3n+3} - 26n - 27 \,\vdots\, 169, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Đặt $u_n = 3^{3n+3} - 26n - 27$

Với $n = 1$, ta có $u_1 = 3^{3+3} - 26 - 27 = 676$ chia hết cho 169 (đúng).

Giả sử $u_k = 3^{3k+3} - 26k - 27$ chia hết cho 169.

Ta cần chứng minh $u_{k+1} = 3^{3(k+1)+3} - 26(k+1) - 27$ chia hết cho 169.

Thật vậy ta có $u_{k+1} = 27.3^{3k+3} - 26k - 26 - 27 = 27\left(3^{3k+3} - 26k - 27\right) + 26.26k + 676$

$= 27u_k + 169\left(4k + 4\right)$

Vì $27u_k$ và $169\left(4k+4\right)$ đều chia hết cho 169, nên u_{k+1} cũng chia hết cho 169.

Vậy với mọi số nguyên dương n thì u_n chia hết cho 169.

Câu 3 : Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

1). $3^{n-1} > n\left(n+2\right)$ (*)$\forall n \geq 4, n \in \mathbb{N}$

2). $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{n+n} > \dfrac{13}{24}$ $\left(*\right), \forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$

3). $n^n \geq \left(n+1\right)^{n-1}$ $\left(*\right)\forall n \in \mathbb{N}^*$

4). $\left(n!\right)^2 \ge n^n \ \left(*\right) \forall n \in$ ¥ *

5). $3^n > n^2 + 4n + 5$ (*), $\forall n \ge 3$

6). $2^n > 2n + 1$ (*) $\forall n \ge 3, n \in$ ¥

7). $2^n > n^2, \forall n \ge 5, n \in$ ¥

LỜI GIẢI

1). $3^{n-1} > n\left(n+2\right)$ (*) $\forall n \ge 4, n \in$ ¥

Với $n = 4$, $VT = 3^{4-1} = 27, VP = 4.6 = 24$, vậy (*) đúng với $n = 4$.

Giả sử ta có $3^{k-1} > k\left(k+2\right)$ đúng.

Ta cần chứng minh $3^{k+1-1} > \left(k+1\right)\left(k+3\right)$

Thật vậy, $3^{k+1-1} = 3.3^{k-1} > 3k\left(k+2\right)$. Ta lại có $3k\left(k+2\right) > \left(k+1\right)\left(k+3\right) \Leftrightarrow 2k^2 + 2k - 4 > 0$, bất đẳng thức này đúng với mọi $k \ge 4$. Suy ra $3^{k+1-1} > \left(k+1\right)\left(k+3\right)$ (đúng).

Do đó theo nguyên lí quy nạp, (*) đúng với mọi số nguyên dương $n \ge 4$.

2). $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{13}{24} \quad \left(*\right), \forall n \ge 2, n \in$ ¥

đặt $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+(n-1)} + \frac{1}{n+n}$

Với $n = 2$ ta có $u_2 = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} = \frac{7}{12} > \frac{13}{24}$ (đúng).

Giả sử với $n = k$ thì (*) đúng, có nghĩa ta có: $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{k+k} > \frac{13}{24}$

Ta phải chứng minh (*) đúng với $n = k+1$, có nghĩa ta phải chứng minh:

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{k+k} + \frac{1}{(k+1)+(k+1)} > \frac{13}{24}$$

Thật vậy ta có: $\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{k+k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{(k+1)+(k+1)} - \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{k+k}\right)$

$$= \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{(k+1)+(k+1)} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} > 0 \text{ (đúng).}$$

Vậy $u_{k+1} > u_k > \frac{13}{24}$ (đúng). Vậy (*) đúng với $n = k+1$.

Suy ra (*) đúng với mọi số nguyên dương $n \ge 2$.

3). $n^n \ge \left(n+1\right)^{n-1} \ \left(*\right) \forall n \in$ ¥ *

Với $n = 1$ ta có $1^1 \ge \left(1+1\right)^0 \Leftrightarrow 1 \ge 1$ (đúng). Vậy (*) đúng với $n = 1$.

Giả sử với $n = k$ thì (*) đúng, có nghĩa ta có: $k^k \ge \left(k+1\right)^{k-1}$ (1).

Ta phải chứng minh (*) đúng với $n = k+1$, có nghĩa ta phải chứng minh:

$\left(k+1\right)^{k+1} \ge \left(k+2\right)^k$

Thật vậy, nhân hai vế của (1) với $\left(k+1\right)^{k+1}$ ta được: $k^k\left(k+1\right)^{k+1} \ge \left(k+1\right)^{k-1}\left(k+1\right)^{k+1}$

$\Leftrightarrow k^k(k+1)^{k+1} \geq (k+1)^{2k} \Leftrightarrow (k+1)^{k+1} \geq \dfrac{(k+1)^{2k}}{k^k} \Leftrightarrow (k+1)^{k+1} \geq \dfrac{(k^2+2k+1)^k}{k^k}$

$\Leftrightarrow (k+1)^{k+1} \geq \left(\dfrac{k^2+2k+1}{k}\right)^k \Leftrightarrow (k+1)^{k+1} \geq \left(k+2+\dfrac{1}{k}\right)^k > (k+2)^k$ (đúng).

Vậy (*) đúng với $n = k+1$. Do đó (*) đúng với $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

4). $(n!)^2 \geq n^n$ $(*) \forall n \in \mathbb{N}^*$

Với $n = 1$ ta có $1^1 \geq (1+1)^0 \Leftrightarrow 1 \geq 1$ (đúng). Vậy (*) đúng với $n = 1$.

Giả sử với $n = k$ thì (*) đúng, có nghĩa ta có: $(k!)^2 \geq k^k$ (1).

Ta phải chứng minh (*) đúng với $n = k+1$, có nghĩa ta phải chứng minh:

$((k+1)!)^2 \geq (k+1)^{k+1}$.

Thật vậy, nhân hai vế của (1) với $(k+1)^2$ ta được: $(k!)^2(k+1)^2 \geq k^k(k+1)^2$

$\Leftrightarrow ((k+1)!)^2 \geq k^k(k+1)^2 \Leftrightarrow ((k+1)!)^2 \geq (k+1)^{k-1}(k+1)^2$ (theo câu c)).

$\Leftrightarrow ((k+1)!)^2 \geq (k+1)^{k+1}$. Vậy (*) đúng với $n = k+1$.

Vậy (*) đúng với mọi số nguyên dương $n \in \mathbb{N}^*$.

5). $3^n > n^2 + 4n + 5$ $(*), \forall n \geq 3$

Với $n = 1$ ta có $3^3 > 3^2 + 4.3 + 5 \Leftrightarrow 27 > 26$ (đúng). Vậy (*) đúng với $n = 1$.

Giả sử với $n = k, k \geq 3$ thì (*) đúng, có nghĩa ta có: $3^k > k^2 + 4k + 5$ (1).

Ta phải chứng minh (*) đúng với $n = k+1$, có nghĩa ta phải chứng minh:

$3^{k+1} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5$

Thật vậy, nhân hai vế của (1) với 3 ta được: $3.3^k > 3.k^2 + 12k + 15$

$3^{k+1} > (k^2 + 2k + 1) + 4(k+1) + 5 + (2k^2 + 6k + 5)$

Vì $(2k^2 + 6k + 5) > 0 \ \forall k \geq 3$. Vậy $3^{k+1} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5$ (đúng).

Vậy (*) đúng với mọi số nguyên dương $n \geq 3$.

6). $2^n > 2n + 1$ $(*) \forall n \geq 3, n \in \mathbb{N}$

Với $n = 3$ ta có $2^3 > 2.3 + 1 \Leftrightarrow 8 > 7$ (đúng). Vậy (*) đúng với $n = 3$.

Giả sử với $n = k, k \geq 3$ thì (*) đúng, có nghĩa ta có: $2^k > 2k + 1$ (1).

Ta phải chứng minh (*) đúng với $n = k+1$, có nghĩa ta phải chứng minh: $2^{k+1} > 2k + 3$

Thật vậy, nhân hai vế của (1) với 2 ta được: $2.2^k > 2(2k+1) \Leftrightarrow 2^{k+1} > 4k + 2$

$\Leftrightarrow 2^{k+1} > 2k + 3$ (đúng), vì $4k + 2 > 2k + 3 \Leftrightarrow 2k > 1 \ \forall k \geq 3$

7). $2^n > n^2, \forall n \geq 5, n \in \mathbb{N}$

Với $n = 5$ ta có $2^5 > 5^2 \Leftrightarrow 32 > 25$ (đúng). Vậy (*) đúng với $n = 5$.

Giả sử với $n = k, k \geq 5$ thì (*) đúng, có nghĩa ta có: $2^k > k^2$ (1).

Ta phải chứng minh (*) đúng với $n = k+1$, có nghĩa ta phải chứng minh: $2^{k+1} > (k+1)^2$

Thật vậy, nhân hai vế của (1) với 2 ta được: $2.2^k > 2k^2 \Leftrightarrow 2^{k+1} > 2k^2 \Leftrightarrow 2^{k+1} > k^2 + k^2 \Leftrightarrow 2^{k+1} > (k+1)^2$

(đúng), vì $k^2 > 2k + 1 \ \forall k \geq 5$

Vậy (*) đúng với mọi số nguyên dương $n \geq 5$.

Câu 4: Chứng minh $\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$ luôn là số nguyên với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

LỜI GIẢI

Đặt $u_n = \frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}$

Với $n = 1$ thì $u_1 = \frac{1^5}{5}+\frac{1^4}{2}+\frac{1^3}{3}-\frac{1}{30} = 1 \Rightarrow u_1$ là số nguyên (đúng).

Giả sử với $n = k, k \in \mathbb{N}^*$ thì $u_k = \frac{k^5}{5}+\frac{k^4}{2}+\frac{k^3}{3}-\frac{k}{30}$ là một số nguyên.

Ta cần chứng minh với $n = k+1$ thì $u_{k+1} = \frac{(k+1)^5}{5}+\frac{(k+1)^4}{2}+\frac{(k+1)^3}{3}-\frac{(k+1)}{30}$ cũng là một số nguyên.

Thật vậy : $u_{k+1} = \frac{k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1}{5}$

$+\frac{k^4+4k^3+6k^2+4k+1}{2}+\frac{k^3+3k^2+3k+1}{3}-\frac{k+1}{30}$.

$u_{k+1} = \frac{k^5}{5}+\frac{k^4}{2}+\frac{k^3}{3}-\frac{k}{30}+\frac{5k^4+10k^3+10k^2+5k}{5}+\frac{4k^3+6k^2+4k}{2}+\frac{3k^2+3k}{3}+1$

$u_{k+1} = u_k + \left(k^4+4k^3+6k^2+4k+1\right)$. Vì u_k là số nguyên và $\left(k^4+4k^3+6k^2+4k+1\right)$ số nguyên nên u_{k+1} là số nguyên. Kết luận theo nguyên lí quy nạp thì u_n là số nguyên.

Câu 5: Cho $x \in R \setminus \{0\}$ và $x+\frac{1}{x}$ là số nguyên. Chứng minh: $x^n+\frac{1}{x^n}$ là số nguyên với mọi $n \in N^*$

LỜI GIẢI

Đặt $u_n = x^n+\frac{1}{x^n}$

Ta có: $x+\frac{1}{x}$ là số nguyên và $x^2+\frac{1}{x^2} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$ là số nguyên.

Giả sử: $u_k = x^k+\frac{1}{x^k}$ là số nguyên với $k \in N^*$.

Ta phải chứng minh $u_{k+1} = x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}$ cũng là số nguyên

Thật vậy ta có $\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^{k+1}+x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}+\frac{1}{x^{k+1}}$

$\Rightarrow x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}} = \left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right)$. Vì $\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)$ và $\left(x+\frac{1}{x}\right)$ là các số nguyên nên $\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)$ là số nguyên, hiển nhiên $\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right)$ là số nguyên.

Từ đó suy ra $u_{k+1} = x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}$ là số nguyên.

Theo nguyên lý quy nạp suy ra $x^n+\frac{1}{x^n}$ là số nguyên với mọi $n \in N^*$