CẤP SỐ NHÂN
TÓM TẮT GIÁO KHOA

1). Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hay vô hạn) mà trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó và một số q không đổi, nghĩa là:

(u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow \forall n \ge 2, u_n = u_{n-1}.q$

Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.

2). Định lý 1: Nếu (u_n) là một cấp số nhân thì kể từ số hạng thứ hai, bình phương của mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số nhân hữu hạn) bằng tích của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là:

$u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}(k \ge 2)$.

Hệ quả: Nếu a, b, c là ba số khác 0, thì "ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số nhân khi và chỉ khi $b^2 = ac$".

3). Định lý 2: Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội $q \neq 0$ thì số hạng tổng quát u_n của nó được tính bởi công thức: $u_n = u_1.q^{n-1}$.

4). Định lý 3: Giả sử (u_n) là một cấp số nhân có công bội q. Gọi $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + ... + u_n$ (S_n là tổng cuản số hạng đầu tiên của cấp số nhân). Ta có:

- Nếu q=1 thì $S_n = nu_1$.
- Nếu $q \neq 1$ thì $S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q}$

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

Vấn đề 1: Chứng minh một dãy (u_n) là cấp số nhân.

PHƯƠNG PHÁP

- Chứng minh $\forall n \ge 1, u_{n+1} = u_n.q$ trong đó q là một số không đổi.
- Nếu $u_n \neq 0$ với mọi $n \in N^*$ thì ta lập tỉ số $T = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$
  - * T là hằng số thì (u_n) là cấp số nhân có công bội $q = T$.
  - * T phụ thuộc vào n thì (u_n) không là cấp số nhân.

Ví dụ 1: Xét trong các dãy số số sau, dãy số nào là cấp số nhân, (nếu có) tìm công bối của cấp số nhân đó:

a). $u_n = (-3)^{2n+1}$ b). $u_n = (-1)^n.5^{3n+2}$ c). $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$ d). $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{9}{u_n} \end{cases}$

LỜI GIẢI

a). Ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(-3)^{2n+3}}{(-3)^{2n+1}} = (-3)^2 = 9$ (không đổi). Kết luận (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 9$.

b). Ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(-1)^{n+1}.5^{3(n+1)+2}}{(-1)^n.5^{3n+2}} = -1.5^3 = -125$ (không đổi). Kết luận (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = -125$.

c). Ta có $u_2 = u_1^2 = 4$, $u_3 = u_2^2 = 16$, $u_4 = u_3^2 = 256$, suy ra $\frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{2} = 2$ và $\frac{u_4}{u_3} = \frac{256}{16} = 16 \Rightarrow \frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_4}{u_3}$. Do đó (u_n) không là cấp số nhân.

d). $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{9}{u_n}}{\frac{9}{u_{n-1}}} = \frac{u_{n-1}}{u_n} \Rightarrow u_{n+1} = u_{n-1}, \forall n \geq 2$. Do đó có:

$u_1 = u_3 = u_5 = ... = u_{2n+1}....$ (1)

Và $u_2 = u_4 = u_6 = ... = u_{2n} = ...$ (2)

Theo đề bài có $u_1 = 3 \Rightarrow u_2 = \frac{9}{u_1} = 3$ (3)

Từ (1), (2) ,(3) suy ra $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = ... = u_{2n} = u_{2n+1}....$ Kết luận (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = 1$.

Ví dụ 2: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n + 9 \end{cases}, \forall n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = u_n + 3, \forall n \geq 1$ là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

LỜI GIẢI

Vì có $v_n = u_n + 3$ (1) $\Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} + 3$ (2).

Theo đề $u_{n+1} = 4u_n + 9 \Rightarrow u_{n+1} + 3 = 4(u_n + 3)$ (3).

Thay (1) và (2) vào (3) được: $v_{n+1} = 4v_n, \forall n \geq 1 \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = 4$ (không đổi). Kết luận (v_n) là cấp số nhân với công bội $q = 4$ và số hạng đầu $v_1 = u_1 + 3 = 5$.

DẠNG 2: Xác định số hạng đầu công bội, xác định số hạng thứ k, tính tổng của n số hạng đầu tiên:

PHƯƠNG PHÁP

Dựa vào giả thuyết, ta lập một hệ phương trình chứa công bội q và số hạng đầu u_1, giải hệ phương trình này tìm được q và u_1.

Để xác định số hạng thứ k, ta sử dụng công thức: $u_k = u_1.q^{k-1}$.

Để tính tổng của n số hạng , ta sử dụng công thức: $S_n = u_1.\frac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1$. Nếu $q = 1$ thì $u_1 = u_2 = u_3 = ... = u_n$, do đó $S_n = nu_1$.

Ví dụ 1: Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

a) $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43. \end{cases}$

LỜI GIẢI

a). $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q^4 = 51 \\ u_1q + u_1q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q^4) = 51 & (*) \\ u_1q(1+q^4) = 102 & (**) \end{cases}$

Lấy $\frac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow \frac{u_1q(1+q^4)}{u_1(1+q^4)} = \frac{102}{51} \Leftrightarrow q = 2 \Rightarrow u_1 = \frac{51}{1+q^4} = \frac{51}{17} = 3.$

Kết luận có công bội $q = 2$ và số hạng đầu tiên $u_1 = 3$.

Kết luận: $u_1 = 3$ và $q = 2$

b) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 135 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 = 135 \\ u_1.q^3 + u_1q^4 + u_1q^5 = 40 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2) = 135 \quad (*) \\ u_1q^3(1+q+q^2) = 40 \quad (**) \end{cases}$

Lấy $\frac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow \frac{u_1q^3(1+q+q^2)}{u_1(1+q+q^2)} = \frac{40}{135} \Leftrightarrow q^3 = \frac{8}{27} \Leftrightarrow q = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow u_1 = \frac{135}{1+q+q^2} = \frac{1215}{19}.$

Kết luận có công bội $q = \frac{2}{3}$ và số hạng đầu tiên $u_1 = \frac{1215}{19}$.

c) $\begin{cases} u_2 = 6 \\ S_3 = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q = 6 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q = 6 \\ u_1 + u_1q + u_1q^2 = 43 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1q = 6 \quad (*) \\ u_1(1+q+q^2) = 43 \quad (**) \end{cases}$. Lấy $\frac{(*)}{(**)} \Leftrightarrow \frac{u_1q}{u_1(1+q+q^2)} = \frac{6}{43}$

$\Leftrightarrow 43q = 6(1+q+q^2) \Leftrightarrow 6q^2 - 37q + 6 = 0 \Leftrightarrow q = 6 \vee q = \frac{1}{6}$

Với $q = 6 \Rightarrow u_1 = 1$. Với $q = \frac{1}{6} \Rightarrow u_1 = 36.$

Kết luận $\begin{cases} q = 6 \\ u_1 = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} q = \frac{1}{6} \\ u_1 = 36 \end{cases}$

Ví dụ 2: Cho CSN (u_n) có các số hạng thỏa: $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases}$

a). Tìm số hạng đầu và công bội của CSN.

b). Hỏi tổng bao nhiêu số hạng đầu tiên bằng 3069?

c). Số 12288 là số hạng thứ mấy?

LỜI GIẢI

a). Ta có $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q^4 = 51 \\ u_1q + u_1q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q^4) = 51 \quad (*) \\ u_1q(1+q^4) = 102 \quad (**) \end{cases}$

Lấy $\frac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow \frac{u_1q(1+q^4)}{u_1(1+q^4)} = \frac{102}{51} \Leftrightarrow q = 2 \Rightarrow u_1 = 3$.

b). Có $S_n = 3069 \Leftrightarrow u_1.\frac{1-q^n}{1-q} = 3069 \Leftrightarrow 3.\frac{1-2^n}{1-2} = 3069 \Leftrightarrow 2^n = 1024 \Rightarrow n = 10$. Kết luận tổng của 10 số hạng đầu tiên bằng 3069.

c).Có $u_k = 12288 \Leftrightarrow u_1.q^{k-1} = 12288 \Leftrightarrow 3.2^{k-1} = 12288 \Leftrightarrow 2^{k-1} = 4096 = 2^{12}$

$\Rightarrow k-1 = 12 \Leftrightarrow k = 13$. Kết luận số 12288 là số hạng thứ 13.

Ví dụ 3: Tính các tổng sau:

a). $S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$

b). $S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$

c). $S_n = \left(3 + \dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(9 + \dfrac{1}{9}\right)^2 + \cdots + \left(3^n + \dfrac{1}{3^n}\right)^2$

d). $S_n = 6 + 66 + 666 + \cdots + \underbrace{66\ldots6}_{n\text{ so }6}$

LỜI GIẢI

a). Ta có dãy số $2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^n$ là một cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = \dfrac{2^2}{2} = 2$. Do đó $S_n = u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q} = 2.\dfrac{1-2^n}{1-2} = 2\left(2^n - 1\right)$.

b). Ta có dãy số $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2^2}, \dfrac{1}{2^3}, \cdots, \dfrac{1}{2^n}$ là một cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1 = \dfrac{1}{2}$ và công bội

$q = \dfrac{\frac{1}{2^2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$. Do đó $S_n = u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{1}{2^n}$.

c). $S_n = \left(3 + \dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(9 + \dfrac{1}{9}\right)^2 + \cdots + \left(3^n + \dfrac{1}{3^n}\right)^2$

$$= 3^2 + 2 + \frac{1}{3^2} + 3^4 + 2 + \frac{1}{3^4} + \cdots + 3^{2n} + 2 + \frac{1}{3^{2n}}$$

$$= \left(3^2 + 3^4 + \cdots + 3^{2n}\right) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{3^{2n}}\right) + \underbrace{2 + 2 + 2 + \cdots + 2}_{n}$$

- Có dãy số $3^2, 3^4, \cdots, 3^{2n}$ là cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1 = 3^2$ và công bội $q = \dfrac{3^4}{3^2} = 9$.

Do đó $S_1 = u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q} = 9.\dfrac{1-9^n}{1-9} = \dfrac{9}{8}\left(9^n - 1\right)$.

- Có dãy số $\dfrac{1}{3^2}, \dfrac{1}{3^4}, \cdots, \dfrac{1}{3^{2n}}$ là cấp số nhân với n số hạng, có số hạng đầu $u_1 = \dfrac{1}{3^2}$ và công bội $q = \dfrac{1}{9}$. Do đó $S_1 = u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{1}{9}.\dfrac{1-\frac{1}{9^n}}{1-\frac{1}{9}} = \dfrac{1}{8}\left(1 - \dfrac{1}{9^n}\right) = \dfrac{9^n - 1}{8.9^n}$.

Vậy $S_n = \dfrac{9}{8}\left(9^n - 1\right) + \dfrac{9^n - 1}{8.9^n} + 2n = \dfrac{\left(9^n - 1\right)\left(9^{n+1} + 1\right)}{8.9^n} + 2n$.

d). $S_n = 6 + 66 + 666 + \cdots + \underbrace{66\ldots6}_{n\text{ so }6} = \dfrac{6}{9}\left(9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99\ldots9}_{n}\right)$

$=\frac{2}{3}\left[(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\cdots+(10^n-1)\right]$

$=\frac{2}{3}\left[10+10^2+10^3+\cdots+10^n-n\right]=\frac{2}{3}\left[10.\frac{10^n-1}{10-1}-n\right]=\frac{20}{27}\left(10^n-1\right)-\frac{2n}{3}$.

DẠNG 3: Dựa vào tính chất của cấp số nhân, chứng minh đẳng thức:

Ví dụ : Cho a, b, c, d là bốn số hạng liên tiếp của một cấp số nhân. Chứng minh:

a). $(ab+bc+ca)^3=abc(a+b+c)^3$

b). $(a^2+b^2)(b^2+c^2)=(ab+bc)^2$

c). $(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$

d). $(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=(a-d)^2$

e). $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3$

LỜI GIẢI

Vì a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, nên có $ac=b^2$.

a). Ta có $abc(a+b+c)^3=b^3(a+b+c)^3=(ab+b^2+bc)^3=(ab+bc+ca)^3$ (đpcm).

b). Ta có: $(a^2+b^2)(b^2+c^2)=a^2b^2+a^2c^2+b^4+b^2c^2=a^2b^2+2b^4+b^2c^2$

$=a^2b^2+2ab.bc+b^2c^2=(ab+bc)^2$ (đpcm).

c). Ta có $(a+b+c)(a-b+c)=\left[(a+c)+b\right]\left[(a+c)-b\right]=(a+c)^2-b^2$

$=a^2+2ac+c^2-b^2=a^2+2b^2+c^2-b^2=a^2+b^2+c^2$ (đpcm).

d). Vì a, b, c, d lập thành CSN nên có: $a.d=bc, a.c=b^2, b.d=c^2$

Khai triển: $(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=a^2+2b^2+2c^2+d^2-2bc-2ca-2bd$

$=a^2+2b^2+2c^2+d^2-2ad-2b^2-2c^2$

$=a^2-2ad+d^2$

$=(a-d)^2$

e). Có: $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=\frac{b^2c^2}{a}+\frac{a^2c^2}{b}+\frac{a^2b^2}{c}$ (1). Ta có $ac=b^2\Rightarrow\begin{cases}ac^3=b^2c^2\\a^3c=b^2a^2\\a^2c^2=b^4\end{cases}$

$(1)\Leftrightarrow a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=\frac{ac^3}{a}+\frac{b^4}{b}+\frac{a^3c}{c}=a^3+b^3+c^3$ (điều phải chứng minh).

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Câu 1: Cho cấp số nhân (u_n). Tìm u_1 và q, biết rằng:

1) $\begin{cases}u_2+u_3+u_4=\frac{35}{2}\\u_1u_5=25\\u_i>0(i=1,...,5)\end{cases}$ 2) $\begin{cases}u_1-u_3+u_5=65\\u_1+u_7=325.\end{cases}$ 3) $\begin{cases}u_2+u_4+u_6=-42\\u_3+u_5=20\end{cases}$

4) $u_1+u_6=165; u_3+u_4=60.$ 5). $\begin{cases}u_1+u_2+u_3+u_4=15\\ {u_1}^2+{u_2}^2+{u_3}^2+{u_4}^2=85.\end{cases}$

6) $\begin{cases}u_1+u_2+u_3=13\\ u_4+u_5+u_6=351\end{cases}$ 7) $\begin{cases}8u_2+5\sqrt{5}u_5=0\\ {u_1}^3+{u_3}^3=189\end{cases}$ 8) $\begin{cases}u_1u_2u_3=1728\\ u_1+u_2+u_3=63\end{cases}$

9). $\begin{cases}u_1+u_3=3\\ {u_1}^2+{u_3}^2=5\end{cases}$ 10). $\begin{cases}u_1+u_2+u_3=7\\ {u_1}^2+{u_2}^2+{u_3}^2=21\end{cases}$

LỜI GIẢI

1). $\begin{cases}u_2+u_3+u_4=\dfrac{35}{2}\\ u_1u_5=25\\ u_i>0(i=1,,,5)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u_1.q+u_1.q^2+u_1.q^3=\dfrac{35}{2} & (1)\\ u_1.u_1.q^4=25 & (2)\end{cases}$

$(2)\Leftrightarrow(u_1.q^2)=5^2\Leftrightarrow u_1.q^2=5\Rightarrow u_1=\dfrac{5}{q^2}$ thay vào (1) được:

$\dfrac{5}{q^2}(q+q^2+q^3)=\dfrac{35}{2}\Leftrightarrow 2(1+q+q^2)=79\Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0\Leftrightarrow q=2 \vee q=\dfrac{1}{2}.$

Với $q=2\Rightarrow u_1=\dfrac{5}{4}$. Với $q=\dfrac{1}{2}\Rightarrow u_1=20.$

2). $\begin{cases}u_1-u_3+u_5=65\\ u_1+u_7=325.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u_1-u_1q^2+u_1q^4=65\\ u_1+u_1q^6=325.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u_1(1-q^2+q^4)=65 & (1)\\ u_1(1+q^6)=325 & (2)\end{cases}$

Lấy: $\dfrac{(2)}{(1)}\Leftrightarrow \dfrac{1+q^6}{1-q^2+q^4}=\dfrac{325}{65}\Leftrightarrow \dfrac{(1+q^2)(1-q^2+q^4)}{1-q^2+q^4}=5 \left(\text{vì } 1+q^6=1+(q^2)^3\right)$

$\Leftrightarrow 1+q^2=5\Leftrightarrow q^2=4\Leftrightarrow q=\pm 2.$

Với $q=2\Rightarrow u_1=\dfrac{65}{1-2^2+2^4}=5$. Với $q=-2\Rightarrow u_1=\dfrac{65}{1-(-2)^2+(-2)^4}=5.$

3). $\begin{cases}u_2+u_4+u_6=-42\\ u_3+u_5=20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u_1.q+u_1.q^3+u_1.q^5=-42.\\ u_1.q^2+u_1.q^4=20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u_1.q(1+q^2+q^4)=-42 & (1)\\ u_1.q(1+q^2)=20 & (2)\end{cases}$

Lấy: $\dfrac{(1)}{(2)}\Leftrightarrow \dfrac{1+q^2+q^4}{q(1+q^2)}=-\dfrac{21}{10}\Leftrightarrow 10+10q^2+10q^4=-21q-21q^3$

$\Leftrightarrow 10q^4+21q^3+10q^2+21q+10=0\Leftrightarrow 10q^2+21q+10+\dfrac{21}{q}+\dfrac{10}{q^2}=10$

$\Leftrightarrow 10\left(q^2+\dfrac{1}{q^2}\right)+21\left(1+\dfrac{1}{q}\right)+10=0 \quad (*)$

Đặt: $t=q+\dfrac{1}{q}\Rightarrow t^2=\left(q+\dfrac{1}{q}\right)^2\Leftrightarrow q^2+\dfrac{1}{q^2}=t^2-2.$ Điều kiện $|t|\ge 2$

$(*)\Leftrightarrow 10(t^2-2)+21t+10=0\Leftrightarrow 10t^2+21t-10=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{5}{2}\vee t=\dfrac{2}{5}$ (loại).

Với $t=-\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow q+\dfrac{1}{q}=-\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow 2q^2+5q+2=0\Leftrightarrow q=-\dfrac{1}{2} \vee q=-2$

- Nếu $q=-\frac{1}{2}\Rightarrow u_1=\frac{20}{q^2+q^4}=\frac{20}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^4}=64$

- Nếu $q=-2\Rightarrow u_1=\frac{20}{q^2+q^4}=\frac{20}{2^2+2^4}=1.$

4). $u_1+u_6=165;\ u_3+u_4=60.$

$\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+u_1q^5=165\\u_1q^2+u_1q^3=60\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1\left(1+q^5\right)=165 & (1)\\u_1q^2\left(1+q\right)=60 & (2)\end{cases}$

Lấy $\frac{(1)}{(2)}\Leftrightarrow\frac{1+q^5}{q^2(1+q)}=\frac{11}{4}\Leftrightarrow\frac{(1+q)\left(1-q+q^2-q^3+q^4\right)}{q^2(1+q)}=\frac{11}{4}$

$\Leftrightarrow 4\left(1-q+q^2-q^3+q^4\right)=11q^2\Leftrightarrow 4q^4-4q^3-7q^2-4q+4=0$

$\Leftrightarrow\frac{4q^4}{q^2}-\frac{4q^3}{q^2}-\frac{7q^2}{q^2}-\frac{4q}{q^2}+\frac{4}{q^2}=0\Leftrightarrow 4\left(q^2+\frac{1}{q^2}\right)-4\left(q+\frac{1}{q}\right)-7=0\quad(*)$

Đặt: $t=q+\frac{1}{q}\Rightarrow t^2=\left(q+\frac{1}{q}\right)^2\Rightarrow q^2+\frac{1}{q^2}=t^2-2.$ Điều kiện: $|t|\ge 2.$

$(*)\Leftrightarrow 4\left(t^2-2\right)-4t-7=0\Leftrightarrow 4t^2-4t-15=0\Leftrightarrow t=\frac{5}{2}\ \vee\ t=-\frac{3}{2}$ (loại).

Với $t=\frac{5}{2}\Leftrightarrow q+\frac{1}{q}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0\Leftrightarrow q=2\ \vee\ q=\frac{1}{2}$

- với $q=2\Rightarrow u_1=\frac{165}{1+q^5}=\frac{165}{1^2+2^5}=5$ • với $q=\frac{1}{2}\Rightarrow u_1=\frac{165}{1+q^2}=\frac{165}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^5}=160.$

5). $\begin{cases}u_1+u_2+u_3+u_4=15\\{u_1}^2+{u_2}^2+{u_3}^2+{u_4}^2=85.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+u_1q+u_1q^2+u_1q^3=15\\{u_1}^2+{u_1}^2q^2+{u_1}^2q^4+u_1q^6=85.\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}u_1\left(1+q+q^2+q^3\right)=15\\{u_1}^2\left(1+q^2+q^4+q^6\right)=85.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}{u_1}^2\left(1+q+q^2+q^3\right)^2=15^2 & (1)\\{u_1}^2\left(1+q^2+q^4+q^6\right)=85 & (2).\end{cases}$

Lấy $\frac{(1)}{(2)}\Leftrightarrow\frac{\left(1+q+q^2+q^3\right)^2}{1+q^2+q^4+q^6}=\frac{45}{17}\Leftrightarrow\frac{\left[(1+q)+q^2(1+q)\right]^2}{\left(1+q^2\right)+q^4\left(1+q^2\right)}=\frac{45}{17}$

$\Leftrightarrow\frac{\left[(1+q)\left(1+q^2\right)\right]^2}{\left(1+q^2\right)+\left(1+q^4\right)}=\frac{45}{17}\Leftrightarrow\frac{(1+q)^2\left(1+q^2\right)}{1+q^4}=\frac{45}{17}\Leftrightarrow\frac{\left(1+2q+q^2\right)\left(1+q^2\right)}{1+q^4}=\frac{45}{17}$

$\Leftrightarrow 17\left(1+q^2+2q+2q^3+q^2+q^4\right)=45\left(1+q^4\right)$

$\Leftrightarrow 28q^4-34q^3-34q^2-34q+28=0\Leftrightarrow\frac{28q^4}{q^2}-\frac{34q^3}{q^2}-\frac{34q^2}{q^2}-\frac{34q}{q^2}+\frac{28}{q^2}=0$ (vì dễ dàng thấy $q\ne 0$)

$\Leftrightarrow 28q^2-34q-34-\frac{34}{q}+28=0\Leftrightarrow 14\left(q^2+\frac{1}{q^2}\right)-17\left(q+\frac{1}{q}\right)-17=0\quad(*)$

Đặt $t=q+\frac{1}{q}\Rightarrow t^2=\left(q+\frac{1}{q}\right)^2\Rightarrow q^2+\frac{1}{q^2}=t^2-2$. Điều kiện: $|t|\ge 2.$

$(*) \Leftrightarrow 14\left(t^2-2\right)-17t-17=0 \Leftrightarrow 14t^2-17t-45=0 \;\Leftrightarrow t=\frac{5}{2} \;\vee\; t=-\frac{9}{7}$ (loại)

Với $t=\frac{5}{2} \Rightarrow q+\frac{1}{q}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0 \Leftrightarrow q=2 \;\vee\; q=\frac{1}{2}$

• với $q=2 \Rightarrow u_1=1$. • với $q=\frac{1}{2} \Rightarrow u_1=\frac{15}{1+q+q^2+q^3}=8$.

6). $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=13 \\ u_4+u_5+u_6=351 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right)=13 & (*) \\ u_1q^3\left(1+q+q^2\right)=351 & (**) \end{cases}$

Lấy $\frac{(**)}{(*)} \Leftrightarrow q^3=27 \Rightarrow q=3 \Rightarrow u_1=\frac{13}{1+q+q^2}=\frac{13}{1+3+9}=1$.

7). $\begin{cases} 8u_2+5\sqrt{5}u_5=0 \\ u_1{}^3+u_3{}^3=189. \end{cases} \quad (1)$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 8u_1q-5\sqrt{5}u_1q^4=0 \\ u_1{}^3+\left(u_1q^2\right)^3=189. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8=5\sqrt{5}q^3 \Rightarrow q^3=\frac{8}{5\sqrt{5}}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^3 \Rightarrow q=\frac{2}{\sqrt{5}} \\ u_1{}^3\left(1+q^6\right)=189 \Rightarrow u_1{}^3=\frac{189}{1+q^6}=125 \Rightarrow u_1=5. \end{cases}$$

8). $\begin{cases} u_1u_2u_3=1728 \\ u_1+u_2+u_3=63 \end{cases} \quad (1)$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.u_1.q.u_1.q^2=1728 \\ u_1+u_1q+u_1q^2=\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(u_1q\right)^3=12^3 \\ u_1\left(1+q+q^2\right)=63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q=12 \\ u_1\left(1+q+q^2\right)=63 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1=\frac{12}{q} \\ \frac{12}{q}\left(1+q+q^2\right)=63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=\frac{12}{q} \\ 12q^2-51q+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q=4 \Rightarrow u_1=3 \\ q=\frac{1}{4} \Rightarrow u_1=48. \end{array}\right.$$

9). $\begin{cases} u_1+u_3=3 \\ u_1{}^2+u_3{}^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q^2\right)=3 \\ u_2\left(1+q^4\right)=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1{}^2\left(1+q^2\right)^2=9 & (*) \\ u_1{}^2\left(1+q^4\right)=5 & (**) \end{cases}$

Lấy $\frac{(*)}{(**)} \Leftrightarrow \frac{\left(1+q^2\right)^2}{1+q^4}=\frac{9}{5}$. Đặt: $t=q^2, t \geq 0$.

$\Leftrightarrow 5(1+t)^2=9\left(1+t^2\right) \Leftrightarrow 4t^2-10t+4=0 \Leftrightarrow t=2 \;\vee\; t=\frac{1}{2}$

Với $t=2 \Rightarrow q=\pm\sqrt{2}$

•$q=\sqrt{2} \Rightarrow u_1=\frac{3}{1+q^2}=1$ •$q=-\sqrt{2} \Rightarrow u_1=\frac{3}{1+q^2}=1$

Với $t=\frac{1}{2} \Rightarrow q=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\bullet q=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow u_1=\frac{3}{1+q^2}=2$ $\bullet q=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow u_1=\frac{3}{1+q^2}=2.$

10). $\begin{cases}u_1+u_2+u_3=7\\u_1^2+u_2^2+u_3^2=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+u_1q+u_1q^2=7\\u_1^2+(u_1q)^2+(u_1q^2)^2=21\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}u_1(1+q+q^2)=7\\u_1^2(1+q^2+q^4)=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1^2(1+q+q^2)^2=49\ (*)\\u_1^2(1+q^2+q^4)=21\ (**)\end{cases}$. Lấy $\frac{(*)}{(**)}$ được:

$\frac{(1+q+q^2)^2}{1+q^2+q^4}=\frac{49}{21}\Leftrightarrow 21(1+q^2+q^4+2q+2q^2+2q^3)=49(1+q^2+q^4)$

$\Leftrightarrow 21(1+2q+3q^2+2q^3+q^4)=49(1+q^2+q^4)\Leftrightarrow 28q^4-42q^3-14q^2-42q+28=0.$

$\Leftrightarrow\frac{28q^4}{q^2}-\frac{42q^3}{q^2}-\frac{14q^2}{q^2}-\frac{42q}{q^2}+\frac{28}{q^2}=0\Leftrightarrow 28q^2-42q-14-\frac{42}{q}+\frac{28}{q^2}=0$

$\Leftrightarrow 28\left(q^2+\frac{1}{q^2}\right)-42\left(q+\frac{1}{q}\right)-14=0\quad(2)$

Đặt: $t=q+\frac{1}{q}\Rightarrow t^2=\left(q+\frac{1}{q}\right)^2\Rightarrow q^2+\frac{1}{q^2}=t^2-2$. Điều kiện: $|t|\ge 2$

$(2)\Leftrightarrow 28(t^2-2)-42t-14=0\Leftrightarrow 28t^2-42t-70=0\Leftrightarrow t=\frac{5}{2}\vee t=-1$ (loại)

Với $t=\frac{5}{2}\Leftrightarrow q+\frac{1}{q}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0\Leftrightarrow q=2\ \vee\ q=\frac{1}{2}$

- $q=2\Rightarrow u_1=\frac{7}{1+q+q^2}=1$ • $q=\frac{1}{2}\Rightarrow u_1=\frac{7}{1+q+q^2}=4$

Câu 2: Tìm a, b biết rằng: 1, a, b là 3 số hạng liên tiếp của cấp số cộng và $1,a^2,b^2$ là 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân.

LỜI GIẢI

Theo đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases}1+b=2a\\b^2=a^4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+b=2a(1)\\b=\pm a^2\end{cases}$

Với $b=a^2$ thay vào (1) được $1+a^2=2a\Leftrightarrow a^2-2a+1=0\Leftrightarrow a=1\Rightarrow b=1$

Với $b=-a^2$ thay vào (1) được $1-a^2=2a\Leftrightarrow a^2+2a-1=0\Leftrightarrow a=-1+\sqrt{2}\vee a=-1-\sqrt{2}$

g $a=-1+\sqrt{2}\Rightarrow b=-(-1+\sqrt{2})^2\Leftrightarrow b=-3+2\sqrt{2}$

g $a=-1-\sqrt{2}\Rightarrow b=-(-1-\sqrt{2})^2\Leftrightarrow b=-3-2\sqrt{2}$

Kết luận $\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}\vee\begin{cases}a=-1+\sqrt{2}\\b=-3+2\sqrt{2}\end{cases}\vee\begin{cases}a=-1-\sqrt{2}\\b=-3-2\sqrt{2}\end{cases}$ thỏa yêu cầu đề bài.

Tìm số hạng đầu của CSN biết công bội bằng 3, tổng số các số hạng là 728 và số hạng cuối bằng 486.

LỜI GIẢI

Theo đề bài ta có: $\begin{cases}S_n=728\\u_n=486\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q} = 728 \\ u_1q^{n-1} = 486 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_1q^n = 728(1-q) \\ u_1q^n = 486q \end{cases} \Rightarrow u_1 - 486q = 728(1-q) \Leftrightarrow u_1 = 2$$

1.123: Cho 3 số tạo thành một cấp số cộng có tổng 21.Nếu thêm 2, 3, 9 lần lượt vào số thứ nhất, số thứ hai, số thứ ba tạo thành một cấp số nhân. Tìm 3 số đó.

LỜI GIẢI

Gọi u_1, u_2, u_3 thành lập cấp số cộng.

Theo đề bài: $u_1+2; u_2+3; u_3+9$ là ba số liên tiếp tạo thành cấp số nhân.

Theo đề bài: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=21 \\ u_1+u_3=2u_2 \\ \left(u_1+2\right)\left(u_3+9\right)=\left(u_2+3\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_2=21 \\ u_1+u_3=2u_2 \\ \left(u_1+2\right)\left(u_3+9\right)=\left(u_2+3\right)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_2=7 \\ u_1=14-u_3 \\ \left(14-u_3+2\right)\left(u_3+9\right)=100 \ (*) \end{cases}$$

Giải $(*)$: $\left(16-u_3\right)\left(u_3+9\right)=100 \Leftrightarrow -u_3{}^2+7u_3+44=0 \Leftrightarrow u_3=11 \ \vee \ u_3=-4$

Với $u_3=11 \Rightarrow u_1=3$. Với $u_3=-4 \Rightarrow u_1=18$.

2.123: Cho 3 số dương có tổng là 65 lập thành một cấp số nhân tăng, nếu bớt một đơn vị ở số hạng thứ nhất và 19 đơn vị ở số hạng thứ ba ta được một cấp số cộng. Tìm 3 số đó.

LỜI GIẢI

Gọi u_1, u_2, u_3 theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

Theo đề: $u_1-1; u_3-19$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

Ta có: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=65 \\ u_1-1+u_3-19=2u_2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_2+u_3=65 \\ u_1-2u_2+u_3=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1-u_1.q+u_1.q^2=65 \\ u_1-2u_1.q+u_1.q^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right)=65 \ (1) \\ u_1\left(1-2q+q^2\right)=20 \ (2) \end{cases}$$

Lấy $\dfrac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \dfrac{1+q+q^2}{1-2q+q^2}=\dfrac{65}{20}=\dfrac{13}{4} \Leftrightarrow 4\left(1+q+q^2\right)=13\left(1-2q+q^2\right)$

$\Leftrightarrow 9q^2-30q+9=0 \Leftrightarrow q=3 \ \vee \ q=\dfrac{1}{3}$

Vì u_1, u_2, u_3 theo thứ tự lập thành cấp số nhân tăng dần nên chọn $q=3 \Rightarrow u_1=5$

Vậy $u_1=5;\ u_2=15;\ u_3=45$.

7.124: Cho x, 3, y theo thứ tự lập thành cấp số nhân và $x^4=y\sqrt{3}$. Tìm x, y.

LỜI GIẢI

Ta có: $x.y=9 \Rightarrow y=\dfrac{9}{x}$

Thay vào $x^4=y\sqrt{3} \Leftrightarrow x^4=\dfrac{9}{x}\sqrt{3} \Leftrightarrow x^5=\left(\sqrt{3}\right)^4.\sqrt{3} \Leftrightarrow x^5=\left(\sqrt{3}\right)^5 \Leftrightarrow x=\sqrt{3}$

$\Rightarrow y=\frac{9}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$. Kết luận $\begin{cases}x=\sqrt{3}\\ y=3\sqrt{3}\end{cases}$

Cho tổng $A=1+11+111+\cdots+\underbrace{11\ldots1}_{n}$. Chứng minh rằng $A=\frac{10^{n+1}-9(n+1)-1}{81}$

LỜI GIẢI

Ta có $A=1+11+111+\cdots+\underbrace{11\ldots1}_{n} \Leftrightarrow 9A=9+99+999+\cdots+\underbrace{99\ldots9}_{n}$

$=(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots+(10^n-1)$

$=(10+10^2+10^3+\cdots+10^n)-(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n})$

$=\frac{10(1-10^n)}{1-10}-n=\frac{10^{n+1}-9n-10}{9}$

Vậy $A=\frac{10^{n+1}-9(n+1)-1}{81}$

Tính tổng $B=7+77+777+\cdots+\underbrace{77\ldots7}_{n}$

$B=7+77+777+\cdots+\underbrace{77\ldots7}_{n}$

$\Leftrightarrow B=7\left(1+11+111+\cdots+\underbrace{11\ldots1}_{n}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{B}{7}=1+11+111+\cdots+\underbrace{11\ldots1}_{n}$

$\Leftrightarrow \frac{9B}{7}=9+99+999+\cdots+\underbrace{99\ldots9}_{n}$

$\Leftrightarrow \frac{9B}{7}=(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+\cdots+(10^n-1)$

$\Leftrightarrow \frac{9B}{7}=(10+10^2+10^3+\cdots+10^n)-(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n})$

$\Leftrightarrow \frac{9B}{7}=\frac{10(1-10^n)}{1-10}-n$

$\Leftrightarrow \frac{9B}{7}=\frac{10^{n+1}-9n-10}{9}$

$\Leftrightarrow B=\frac{7(10^{n+1}-9n-10)}{81}$

Cho cấp số nhân có số hạng đầu $u_1\neq 0$ và $q\neq 0, q\neq \pm1$. Gọi S_n là tổng của n số hạng đầu tiên. Chứng minh: $S_n(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2$

LỜI GIẢI

$VT=S_n(S_{3n}-S_{2n})=\frac{u_1(1-q^n)}{1-q}\left(\frac{u_1(1-q^{3n})}{1-q}-\frac{u_1(1-q^{2n})}{1-q}\right)$

$$=\frac{u_1^2}{(1-q)^2}\cdot(1-q^n)\cdot(q^{2n}-q^{3n})=\frac{u_1^2}{(1-q)^2}\cdot(1-q^n)\cdot q^{2n}\cdot(1-q^n)=\left(\frac{u_1q^n(1-q^n)}{1-q}\right)^2 \quad (1)$$

$$VP=(S_{2n}-S_n)^2=\left[\frac{u_1(1-q^{2n})}{1-q}-\frac{u_1(1-q^n)}{1-q}\right]^2=\left\{\frac{u_1}{1-q}\left[(1-q^n)(1+q^n)-(1-q^n)\right]\right\}^2$$

$$=\left[\frac{u_1}{1-q}q^n(1-q^n)\right]^2 \quad (2)$$

Kết luận từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Cho ba số dương a, b, c lập thành CSN. Chứng minh:
$\frac{1}{3}(a+b+c),\sqrt{\frac{1}{3}(ab+bc+ca)},\sqrt[3]{abc}$ cũng lập thành CSN.

LỜI GIẢI

Ta có $ac=b^2$ (tính chất CSN)

Ta phải chứng minh: $\frac{1}{3}(a+b+c).\sqrt[3]{abc}=\left(\sqrt{\frac{1}{3}(ab+bc+ca)}\right)^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(a+b+c)\sqrt[3]{b^3}=\frac{1}{3}(ab+bc+ca)\Leftrightarrow \frac{1}{3}(a+b+c)b=\frac{1}{3}(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(ab+b^2+cb)=\frac{1}{3}(ab+bc+ca)\Leftrightarrow \frac{1}{3}(ab+ac+cb)=\frac{1}{3}(ab+bc+ca)$ (đpcm).

Cho CSN (u_n) và các số nguyên dương $m,k\,(m<k)$.
Chứng minh rằng: $u_{k-m}u_{k+m}=u_k^2$

LỜI GIẢI

Có $u_{k-m}u_{k+m}=u_1.q^{k-m-1}.u_1.q^{k+m-1}=u_1^2.q^{2k-2}=(u_1.q^{k-1})^2=u_k^2$ (đpcm).

Cho 3 số a, b, c là 3 số hạng liên tiếp của cấp số nhân. Chứng minh rằng: $(a^2+b^2)(b^2+c^2)=(ab+bc)^2$

LỜI GIẢI

Cho 3 số a, b, c là 3 số hạng liên tiếp của cấp số nhân.

- Gọi q là công bội của cấp số nhân ta có $b=aq,\ c=aq^2$
- $(a^2+b^2)(b^2+c^2)=(a^2+a^2q^2)(a^2q^2+a^2q^4)=a^4q^2(1+q^2)^2$ (1)
- $(ab+bc)^2=(a.aq+aq.aq^2)^2=a^4q^2(1+q^2)^2$ (2)
- Từ (1) và (2) ta suy ra $(a^2+b^2)(b^2+c^2)=(ab+bc)^2$.

Cho a, b, c là CSC thỏa $a+b+c=\frac{3\pi}{4}$. Chứng minh $\tan a,\tan b,\tan c$ theo thứ tự đó lập thành CSN.

LỜI GIẢI

Ta có $a+c=2b$ tính chất của CSC. Có $a+b+c=\frac{3\pi}{4}\Rightarrow 3b=\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow b=\frac{\pi}{4}$. Suy ra $a+c=\frac{\pi}{2}$

Ta có $\tan a.\tan c=\tan a.\tan\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\tan a.\cot a=1=\tan^2\frac{\pi}{4}=\tan^2 b$

Vậy $\tan a.\tan c=\tan^2 b\Rightarrow \tan a,\tan b,\tan c$ theo thứ tự đó lập thành CSN.

Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

a) $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases}$	b) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$	c) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases}$
d) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1.u_2.u_3 = 64 \end{cases}$	e) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 21 \\ \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_3} = \dfrac{7}{12} \end{cases}$	f) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 30 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 340 \end{cases}$

LỜI GIẢI

a) $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^3 - u_1q = 72 \\ u_1q^4 - u_1q^2 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q\left(q^2 - 1\right) = 72 & (1) \\ u_1q^2\left(q^2 - 1\right) = 144 & (2) \end{cases}$

Lấy (2):(1) được: $q = 2$, thay $q = 2$ vào (1) được $u_1 = 12$

c) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^2 + u_1q^4 = 90 \\ u_1q - u_1q^5 = 240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^2\left(1 + q^2\right) = 90 & (1) \\ u_1q\left(1 - q^4\right) = 240 & (2) \end{cases}$

Lấy $\dfrac{(2)}{(1)} \Leftrightarrow \dfrac{u_1q\left(1 - q^4\right)}{u_1q^2\left(1 + q^2\right)} = \dfrac{240}{90} \Leftrightarrow \dfrac{\left(1 - q^2\right)\left(1 + q^2\right)}{q\left(1 + q^2\right)} = \dfrac{8}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1 - q^2}{q} = \dfrac{8}{3}$

$\Leftrightarrow 3q^2 + 8q - 3 = 0 \Leftrightarrow q = \dfrac{1}{3} \vee q = -3$

Với $q = \dfrac{1}{3}$ thay vào (1) được $u_1 = 729$.

Với $q = -3$ thay vào (1) được $u_1 = 1$.

d) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1.u_2.u_3 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 = 14 \\ u_1u_1qu_1q^2 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1 + q + q^2\right) = 14 & (1) \\ \left(u_1q\right)^3 = 64 & (2) \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow u_1q = 4 \Rightarrow u_1 = \dfrac{4}{q}$, thay vào (1) được $\dfrac{4}{q}\left(1 + q + q^2\right) = 14$

$\Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = \dfrac{1}{2}$

Với $q = 2 \Rightarrow u_1 = 2$. Với $q = \dfrac{1}{2} \Rightarrow u_1 = 8$.

e) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 21 \\ \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \dfrac{1}{u_3} = \dfrac{7}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q + u_1q^2 = 21 \\ \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_1q} + \dfrac{1}{u_1q^2} = \dfrac{7}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1 + q + q^2\right) = 21 & (1) \\ \dfrac{q^2 + q + 1}{u_1q^2} = \dfrac{7}{12} & (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow 1 + q + q^2 = \dfrac{21}{u_1}$, thay vào (2): $\dfrac{21}{u_1} \cdot \dfrac{1}{u_1q^2} = \dfrac{7}{12} \Leftrightarrow \left(u_1q\right)^2 = 36 \Leftrightarrow u_1q = \pm 6$

Với $u_1 = \dfrac{6}{q}$ thay vào (1): $\dfrac{6}{q}\left(1 + q + q^2\right) = 21 \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \vee q = \dfrac{1}{2}$

Nếu $q = 2 \Rightarrow u_1 = 3$. Nếu $q = \dfrac{1}{2} \Rightarrow u_1 = 12$

Với $u_1 = -\dfrac{6}{q}$ thay vào (1): $-\dfrac{6}{q}\left(1 + q + q^2\right) = 21 \Leftrightarrow 2q^2 + 9q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = \dfrac{-9 + \sqrt{65}}{4} \vee q = \dfrac{-9 - \sqrt{65}}{4}$

Nếu $q = \dfrac{-9 + \sqrt{65}}{4} \Rightarrow u_1 = \dfrac{27 + 3\sqrt{65}}{2}$. Nếu $q = \dfrac{-9 - \sqrt{65}}{4} \Rightarrow u_1 = \dfrac{27 - 3\sqrt{65}}{2}$

f) $\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4=30 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=340 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1q+u_1q^2+u_1q^3=30 \\ u_1^2+u_1^2q^2+u_1^2q^4+u_1^2q^6=340 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2+q^3\right)=30 \\ u_1^2\left(1+q^2+q^4+q^6\right)=340 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q\right)\left(1+q^2\right)=30 \\ u_1^2\left(1+q^4\right)\left(1+q^2\right)=340 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1^2\left(1+q\right)^2\left(1+q^2\right)^2=900 & (1) \\ u_1^2\left(1+q^4\right)\left(1+q^2\right)=340 & (2) \end{cases}$

Lấy $\dfrac{(1)}{(2)} \Leftrightarrow \dfrac{\left(1+q\right)^2\left(1+q^2\right)}{1+q^4}=\dfrac{45}{17}$, quy đồng rút gọn được: $14q^4-17q^3-17q^2-17q+14=0$

$\Leftrightarrow 14q^2-17q-17-\dfrac{17}{q}+\dfrac{14}{q^2}=0$

$\Leftrightarrow 14\left(q^2+\dfrac{1}{q^2}\right)-17\left(q+\dfrac{1}{q}\right)-17=0$. Đặt $t=q+\dfrac{1}{q}$, điều kiện $|t|\geq 2$

$\Leftrightarrow 14t^2-17t-45=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{5}{2} \vee t=-\dfrac{9}{7}$ (loại).

Với $t=\dfrac{5}{2} \Rightarrow q+\dfrac{1}{q}=\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow 2q^2-5q+2=0 \Leftrightarrow q=2 \vee q=\dfrac{1}{2}$

Với $q=2 \Rightarrow u_1=2$. Với $q=\dfrac{1}{2} \Rightarrow u_1=16$

a). Giữa các số 160 và 5 hãy chèn vào 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân. Tìm 4 số đó.
b). Giữa các số 243 và 1 hãy đặt thêm 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân.

LỜI GIẢI

a). Có nghĩa ta được cấp số nhân có sáu số hạng với số hạng đầu là 160 và số hạng cuối là 5

Ta có $\begin{cases} u_1=160 \\ u_6=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=160 \\ u_1q^5=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=160 \\ q=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Vậy 4 số hạng cần thêm vào $u_2=u_1q=80,\ u_3=u_2q=40,\ u_4=u_3q=20,\ u_5=u_4q=10$

b). Có nghĩa ta được cấp số nhân có sáu số hạng với số hạng đầu là 243 và số hạng cuối là 1

Ta có $\begin{cases} u_1=243 \\ u_6=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=243 \\ u_1q^5=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1=243 \\ q=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 19 và tích là 216.

LỜI GIẢI

Gọi ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân là u_1,u_2,u_3 với công bội là q. Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} u_1+u_2+u_3=19 \\ u_1.u_2.u_3=216 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1q+u_1q^2=19 \\ \left(u_1q\right)^3=6^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1\left(1+q+q^2\right)=19 & (*) \\ u_1q=6 \Rightarrow u_1=\dfrac{6}{q} \end{cases}$

Thay $u_1=\dfrac{6}{q}$ vào $(*)$ được: $6q^2-13q+6=0 \Leftrightarrow q=\dfrac{3}{2}$ hoặc $q=\dfrac{2}{3}$.

Với $q=\dfrac{3}{2} \Rightarrow u_1=4,u_2=6,u_3=9$.

Với $q=\frac{2}{3}\Rightarrow u_1=9, u_2=6, u_3=4$.

b) Tìm công bội của một cấp số nhân có số hạng đầu là 7, số hạng cuối là 448 và tổng số các số hạng là 889.

LỜI GIẢI

Theo đề bài ta có $\begin{cases} S_n=889 \\ u_n=448 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u_1\left(q^n-1\right)}{q-1}=889 \\ u_1q^{n-1}=448 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1q^n-u_1=889(q-1) & (1) \\ u_1q^n=448q & (2) \end{cases}$

Thay (2) vào (1) được: $448q-7=889q-889 \Leftrightarrow q=2$

Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, trong đó số hạng thứ hai nhỏ hơn số hạng thứ nhất 35, còn số hạng thứ ba lớn hơn số hạng thứ tư 560.

LỜI GIẢI

Theo đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u_1-u_2=35 \\ u_3-u_4=560 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1-u_1q=35 \\ u_1q^2-u_1q^3=560 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1-q)=35 & (1) \\ u_1q^2(1-q)=560 & (2) \end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được $q^2=16 \Leftrightarrow q=\pm 4$

Với $q=4$ thay vào (1) được $u_1=-\frac{35}{3}, u_2=u_1q=-\frac{140}{3}, u_3=-\frac{560}{3}, u_3=-\frac{2240}{3}$

Tìm 3 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng khi tăng số thứ hai thêm 2 thì các số đó tạo thành một cấp số cộng, còn nếu sau đó tăng số cuối thêm 9 thì chúng lại lập thành một cấp số nhân.

Tìm các số dương a và b sao cho a, a + 2b, 2a + b lập thành một cấp số cộng và $(b+1)^2$, ab + 5, $(a+1)^2$ lập thành một cấp số nhân.

LỜI GIẢI

Theo tính chất của CSC ta có: $a+(2a+b)=2(a+2b) \quad (1)$

Theo tính chất của CSN ta có: $(b+1)^2(a+1)^2=(ab+5)^2 \quad (2)$

Từ (1) khai triển rút gọn ta được: $a=3b$, thay vào (2):

$(b+1)^2(3b+1)^2=(3b^2+5)^2 \Leftrightarrow (b+1)(3b+1)=\pm(3b^2+5)$

Với $\left(b+1\right)\left(3b+1\right)=3b^2+5 \Leftrightarrow b=1 \Rightarrow a=3$

Với $\left(b+1\right)\left(3b+1\right)=-3b^2-5 \Leftrightarrow 6b^2+4b+6=0$ (vô nghiệm).

Kết luận $a=3, b=1$