CẤP SỐ CỘNG

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Cấp số cộng là một dãy số (vô hạn hay hữu hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tổng của số hạng đứng ngay trước nó và một số d không đổi, nghĩa là:

(u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow \forall n \geq 2, u_n = u_{n-1} + d$

Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

2.Định lý 1: Nếu (u_n) là một cấp số cộng thì kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng (trừ số hạng cuối đối với cấp số cộng hữu hạn) đều là trung bình cộng của hai số hạng đứng kề nó trong dãy, tức là

$$u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$$

Hệ quả: Ba số a, b, c (theo thứ tự đó) lập thành một cấp số cộng $\Leftrightarrow a + c = 2b$.

1). Định lý 2: Nếu một cấp số cộng có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức sau: $u_n = u_1 + (n-1)d$

2). Định lý 3: Giả sử (u_n) là một cấp số cộng có công sai d.

Gọi $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + ... + u_n$

(S_n là tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số cộng). Ta có :

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2}.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

DẠNG 1: Chứng minh một dãy số (u_n) là cấp số cộng.

PHƯƠNG PHÁP

Để chứng minh dãy số (u_n) là một cấp số cộng, ta xét $A = u_{n+1} - u_n$

- Nếu A là hằng số thì (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = A$.
- Nếu A phụ thuộc vào n thì (u_n) không là cấp số cộng.

Ví dụ: Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số cộng. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng đó:

a). Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5$ b). Dãy số (u_n) với $u_n = -3n + 1$

c). Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$ d). Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n + 10n$

LỜI GIẢI

a). Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5$

Ta có $u_{n+1} - u_n = 19(n+1) - 5 - (19n - 5) = 19$. Vậy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = 19$ và số hạng đầu $u_1 = 19.1 - 5 = 14$.

b). Dãy số (u_n) với $u_n = -3n + 1$

Ta có $u_{n+1} - u_n = -3(n+1) + 1 - (-3n + 1) = -3$. Vậy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = -3$ và số hạng đầu $u_1 = -3.1 + 1 = -2$.

c). Dãy số (u_n) với $u_n = n^2 + n + 1$

Ta có $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 + (n+1) + 1 - (n^2 + n + 1) = 2n + 2$, phụ thuộc vào n

Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

d). Dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n + 10n$

Ta có $u_{n+1} - u_n = (-1)^{n+1} + 10(n+1) - \left[(-1)^n + 10n\right] = -(-1)^n + 10 - (-1)^n = 10 - 2(-1)^n$, phụ thuộc vào n. Vậy (u_n) không là cấp số cộng.

DẠNG 2: Tìm số hạng đầu tiên, công sai của cấp số cộng, tìm số hạng thứ k của cấp số cộng, tính tổng k số hạng đầu tiên.

PHƯƠNG PHÁP

Ta thiết lập một hệ phương trình gồm hai ẩn u_1 và d. Sau đó giải hệ phương trình này tìm được u_1 và d.

Muốn tìm số hạng thứ k, trước tiên ta phải tìm u_1 và d. Sau đó áp dụng công thức: $u_k = u_1 + (k-1)d$.

Muốn tính tổng của k số hạng đầu tiên, ta phải tìm u_1 và d. Sau đó áp dụng công thức:

$$S_k = \frac{k(u_1 + u_k)}{2} = \frac{k\left[2u_1 + (k-1)d\right]}{2}$$

Ví dụ: Tìm số hạng đầu tiên, công sai, số hạng thứ 20 và tổng của 20 số hạng đầu tiên của các cấp số cộng sau, biết rằng:

a) $\begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ s_{12} = 129 \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_6 = 8 \\ {u_2}^2 + {u_4}^2 = 16 \end{cases}$

LỜI GIẢI

a) $\begin{cases} u_5 = 19 \\ u_9 = 35 \end{cases}$ (1). Áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$, ta có: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 19 \\ u_1 + 8d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$

Vậy số hạng đầu tiên $u_1 = 3$, công sai $d = 4$.

Số hạng thứ 20: $u_{20} = u_1 + 19d = 3 + 19.4 = 79$.

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20} = \dfrac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10(2.3 + 19.4) = 820$

b) $\begin{cases} u_2 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$ (1). Ta cũng áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d - (u_1 + 2d) + u_1 + 4d = 10 \\ u_1 + 3d + u_1 + 5d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 8d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu tiên $u_1 = 1$, công sai $d = 3$.

Số hạng thứ 20: $u_{20} = u_1 + 19d = 1 + 19.3 = 58$.

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20} = \dfrac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10(2.1 + 19.3) = 590$

c) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 14 \\ s_{12} = 129 \end{cases}$ (1). Áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$, $S_n = \dfrac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2}$ Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d + u_1 + 4d = 14 \\ 6(u_1 + u_{12}) = 129 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 6d = 14 \\ 12u_1 + 66d = 129 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{5}{2} \\ d = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu tiên $u_1 = \frac{5}{2}$, công sai $d = \frac{3}{2}$.

Số hạng thứ 20: $u_{20} = u_1 + 19d = \frac{5}{2} + 19.\frac{3}{2} = 31$.

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10\left(2.\frac{5}{2} + 19.\frac{3}{2}\right) = 335$

d) $\begin{cases} u_6 = 8 \\ {u_2}^2 + {u_4}^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 5d = 8 \\ (u_1 + d)^2 + (u_1 + 3d)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 - 5d \\ (8 - 5d + d)^2 + (8 - 5d + 3d)^2 = 16 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 - 5d \\ (8 - 4d)^2 + (8 - 2d)^2 = 16 \quad (*) \end{cases}$

Giải $(*)$: $20d^2 - 96d + 112 = 0 \Leftrightarrow d = \frac{14}{5} \ \vee \ d = 2$.

Với $d = \frac{14}{5} \Rightarrow u_1 = -6$

Số hạng thứ 20: $u_{20} = u_1 + 19d = -6 + 19.\frac{14}{5} = \frac{236}{5}$.

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10\left(2.(-6) + 19.\frac{14}{5}\right) = 412$

Với $d = 2 \Rightarrow u_1 = -2$

Số hạng thứ 20: $u_{20} = u_1 + 19d = -2 + 19.2 = 36$.

Tổng của 20 số hạng đầu tiên: $S_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10(2.(-2) + 19.2) = 340$

DẠNG 3: Dựa vào tính chất của cấp số cộng, chứng minh đẳng thức:

Ví dụ: Cho a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, chứng minh rằng:

a). $a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$

b). $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$

c). $a^2 + ab + b^2, a^2 + ac + c^2, b^2 + bc + c^2$ là cấp số cộng.

LỜI GIẢI

a). Vì a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng: $a + c = 2b \Leftrightarrow a = 2b - c$

Ta có: $a^2 - 2ab = a^2 - a(a + c) = -ac \ = -c(2b - c) = c^2 - 2bc$

Vậy $a^2 - 2ab = c^2 - 2bc \Leftrightarrow a^2 + 2bc = c^2 + 2ab$.

b). Ta có $a^2 + 8bc = (2b - c)^2 + 8bc$

$= 4b^2 - 4bc + c^2 + 8bc \ = 4b^2 + 4bc + c^2 \ = (2b + c)^2$.

c). Ta cần chứng minh:

$(a^2 + ab + b^2) + (b^2 + bc + c^2) = 2(a^2 + ac + c^2)$

$\Leftrightarrow 2b^2 + ab + bc = a^2 + 2ac + c^2$

$\Leftrightarrow 2b^2 + b(a + c) = (a + c)^2$

$\Leftrightarrow 2b^2 + 2b^2 = (2b)^2$

$\Leftrightarrow 4b^2 = 4b^2$ (đúng).

BÀI TẬP TỔNG HỢP

Câu 1: Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết:

a). $\begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59 \end{cases}$ b). $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases}$ c). $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4 \end{cases}$

d). $\begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2.u_7 = 75 \end{cases}$ e). $\begin{cases} u_6 + u_7 = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$ f). $\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ s_3 = 21 \end{cases}$

LỜI GIẢI

Gọi số hạng đầu là u_1 và công sai là d.

a). $\begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d = 27 \\ u_1 + 14d = 59 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$

b). $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 8d = 5(u_1 + d) \\ u_1 + 12d = 2(u_1 + 5d) + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u_1 - 3d = 0 \\ u_1 - 2d = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4 \end{cases} \quad (1)$

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + d + u_1 + 3d - (u_1 + 5d) = -7 \\ u_1 + 7d - (u_1 + 6d) = 2(u_1 + 3d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - d = -7 \\ 2u_1 + 5d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -5 \\ d = 2. \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2.u_7 = 75 \end{cases} \quad (1)$

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d - (u_1 + 6d) = -8 \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4d = -8 \\ (u_1 + d)(u_1 + 6d) = 75 \end{cases} \begin{cases} d = 2 \\ (u_1 + 2)(u_1 + 12) = 75 \quad (*) \end{cases}$

Giải $(*) \Leftrightarrow u_1^2 + 14u_1 - 51 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_1 = -17 \end{cases}$

Vậy $\begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u_1 = -17 \\ d = 2. \end{cases}$

e). $\begin{cases} u_6 + u_7 = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases} \quad (1)$

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d + u_1 + 14d = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 20d = 60 \\ (u_1 + 3d)^2 + (u_1 + 11d)^2 = 1170 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 30 - 10d \\ (30 - 10d + 3d)^2 + (30 - 10d + 11d)^2 = 1170 \quad (*) \end{cases}$

Giải $(*) : (30 - 7d)^2 + (30 + d)^2 = 1170. \Leftrightarrow 50d^2 - 360d + 630 = 0 \Leftrightarrow d = \frac{21}{5} \vee d = 3$

Với $d = \frac{21}{5} \Rightarrow u_1 = -12$. Với $d = 3 \Rightarrow u_1 = 0$

f). $\begin{cases} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 155 \\ s_3 = 21 \end{cases}$

Ta có: $S_3 = 21 \Leftrightarrow u_1 + u_2 + u_3 = 21 \Leftrightarrow u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d = 21 \Leftrightarrow d = 7 - u_1$.

Ta có: $u_1^2+u_2^2+u_3^2=155 \Leftrightarrow u_1^2+(u_1+d)^2+(u_1+2d)^2=155$

$\Leftrightarrow u_1^2+(u_1+7-u_1)^2+(u_1+14-2u_1)^2=155 \Leftrightarrow u_1^2+49+(14-u_1)^2=155$

$\Leftrightarrow 2u_1-28u_1+90=0 \Leftrightarrow u_1=9 \vee u_1=5$

Với $u_1=9 \Rightarrow d=-2$. Với $u_1=5 \Rightarrow d=2$

Câu 2: Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết:

1) $\begin{cases}S_3=12\\S_5=35\end{cases}$ 2) $\begin{cases}u_1+u_2+u_3=9\\u_1^2+u_2^2+u_3^2=35\end{cases}$ 3) $\begin{cases}u_1+u_2+u_3+u_4=16\\u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=84\end{cases}$

4) $\begin{cases}S_5=5\\u_1.u_2.u_3.u_4.u_5=45\end{cases}$ 5) $\begin{cases}S_4=20\\\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+\dfrac{1}{u_3}+\dfrac{1}{u_4}=\dfrac{25}{24}\end{cases}$

6) $\begin{cases}u_1+u_2+u_3+u_4+u_5=20\\u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2=170\end{cases}$ 7) $\begin{cases}u_1+u_2+u_3=-12\\u_1.u_2.u_3=8\end{cases}$ 8) $\begin{cases}u_1+u_5=\dfrac{5}{3}\\u_3.u_4=\dfrac{65}{72}\end{cases}$

LỜI GIẢI

1) $\begin{cases}S_3=12\\S_5=35\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{3}{2}(2u_1+2d)=12\\\dfrac{5}{2}(2u_1+4d)=35\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2u_1+2d=8\\2u_1+4d=14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u_1=1\\d=3.\end{cases}$

2) $\begin{cases}u_1+u_2+u_3=9\\u_1^2+u_2^2+u_3^2=35\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u_1+u_1+d+u_1+2d=9\\u_1^2+(u_1+d)^2+(u_1+2d)^2=35\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}u_1=3-d\\(3-d)^2+3^2+(3+d)^2=35\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u_1=3-d\\d^2=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u_1=3-d\\d=\pm2\end{cases}$

Với $d=2 \Rightarrow u_1=1$. Với $d=-2 \Rightarrow u_1=5.$

3) $\begin{cases}u_1+u_2+u_3+u_4=16\\u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=84\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u_1+u_1+d+u_1+2d+u_1+3d=16\\u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=84\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}4u_1+6d=16 \quad (1)\\u_1^2+(u_1+d)^2+(u_1+2d)^2+(u_1+3d)^2=84 \quad (2)\end{cases}$

Từ $(1) \Rightarrow u_1=\dfrac{16-6d}{4}=4-\dfrac{3}{2}d$ thay vào (2) được:

$\left(4-\dfrac{3}{2}d\right)^2+\left(4-\dfrac{3}{2}d+d\right)^2+\left(4-\dfrac{3}{2}d+2d\right)^2+\left(4-\dfrac{3}{2}d+3d\right)^2=84$

$\Leftrightarrow \left(4-\dfrac{3}{2}d\right)^2+\left(4-\dfrac{d}{2}\right)^2+\left(4+\dfrac{d}{2}\right)^2+\left(4+\dfrac{3d}{2}\right)^2=84 \Leftrightarrow 64+5d^2=84 \Leftrightarrow d^2=4 \Leftrightarrow d=\pm2$ Với $d=2 \Rightarrow u_1=1$.

Với $d=-2 \Rightarrow u_1=7$

4) $\begin{cases}S_5=5\\u_1.u_2.u_3.u_4.u_5=45\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{5}{2}(2u_1+4d)=5 \Leftrightarrow 2u_1+4d=2 \Rightarrow u_1=1-2d \quad (1)\\u_1(u_1+d)(u_1+2d)(u_1+3d)(u_1+4d)=45 \quad (2)\end{cases}$

Thay (1) vào (2):

$\Leftrightarrow (1-2d)(1-2d+d)(1-2d+2d)(1-2d+3d)(1-2d+4d)=45$

$\Leftrightarrow (1-2d)(1-d)(1+d)(1+2d)=45 \Leftrightarrow (1-2d)(1+2d)(1-d)(1+d)=45$

$\Leftrightarrow (1-4d^2)(1-d^2)=45.$ Đặt $t=d^2$, $t\geq 0$

$\Leftrightarrow (1-4t)(1-t)=45 \Leftrightarrow 4t^2-5t-44=0$

$\Leftrightarrow t=4$ (nhận) hoặc $t=-\frac{11}{4}$ (loại) $\Leftrightarrow d^2=4 \Leftrightarrow d=\pm 2$

Với $d=2 \Rightarrow u_1=-3$. Với $d=-2 \Rightarrow u_1=5$.

5). $\begin{cases} S_4=20 \\ \frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}=\frac{25}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2u_1+3d)=20 \\ \frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}=\frac{25}{24} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1=5-\frac{3}{2}d \\ \frac{1}{5-\frac{3}{2}d}+\frac{1}{5-\frac{3}{2}d+d}+\frac{1}{5-\frac{3}{2}d+2d}+\frac{1}{5-\frac{3}{2}d+3d}=\frac{25}{24} \quad (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5-\frac{3}{2}d}+\frac{1}{5+\frac{3}{2}d}\right)+\left(\frac{1}{5-\frac{d}{2}}+\frac{1}{5+\frac{d}{2}}\right)=\frac{25}{24} \Leftrightarrow \frac{10}{25-\frac{9d^2}{4}}+\frac{10}{25-\frac{d^2}{4}}=\frac{25}{24}$$

Đặt: $\frac{d^2}{4}=t; t\geq 0$.

$$\Leftrightarrow \frac{10}{25-9t}+\frac{10}{25-t}=\frac{25}{24} \Leftrightarrow \frac{2(25-t)+2(25-9t)}{(25-9t)(25-t)}=\frac{5}{24} \Leftrightarrow \frac{100-20t}{(25-9t)(25-t)}=\frac{5}{24}$$

$$\Leftrightarrow 24(20-4t)=(25-9t)(25-t) \Leftrightarrow 9t^2-154t+145=0 \Leftrightarrow t=\frac{145}{9} \quad \vee \quad t=1$$

• $t=\frac{145}{9} \Leftrightarrow d^2=\frac{145}{9} \Rightarrow d=\pm\frac{\sqrt{145}}{3}$

Với $d=\frac{\sqrt{145}}{3} \Rightarrow u_1=5-\frac{\sqrt{145}}{2}$. Với $d=-\frac{\sqrt{145}}{3} \Rightarrow u_1=5+\frac{\sqrt{145}}{2}$

• $t=1 \Leftrightarrow d^2=1 \Leftrightarrow d=\pm 1$

Với $d=1 \Rightarrow u_1=5-\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$. Với $d=-1 \Leftrightarrow u_1=5+\frac{3}{2}=\frac{13}{2}$.

6) $\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4+u_5=20 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2=170 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1+u_1+d+u_1+2d+u_1+3d+u_1+4d=20 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2=170 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5u_1+10d=20 \Rightarrow u_1=4-2d \\ u_1^2+(u_1+d)^2+(u_1+2d)^2+(u_1+3d)^2+(u_1+4d)^2=170 \quad (2) \end{cases}$$

Thay: $u_1=4-2d$ vào (2) được:

$(4-2d)^2+(4-2d+d)^2+(4-2d+2d)^2+(4-2d+3d)^2+(4-2d+4d)^2=170$

$\Leftrightarrow (4-2d)^2+(4-d)^2+4^2+(4+d)^2+(4+2d)^2=170$

$\Leftrightarrow 80+10d^2=170 \Leftrightarrow d^2=9 \Leftrightarrow d=\pm 3.$

Với $d = 3 \Rightarrow u_1 = 4 - 6 = -2$. Với $d = -3 \Rightarrow u_1 = 4 + 6 = 10$.

7). $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = -12 \\ u_1.u_2.u_3 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d = -12 \\ u_1.u_2.u_3 = 8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 + 3d = -12 \\ u_1(u_1 + d)(u_1 + 2d) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -4 - d & (1) \\ u_1(u_1 + d)(u_1 + 2d) = 8 & (2) \end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được: $(-4 - d)(-4 - d + d)(-4 - d + 2d) = 8 \Leftrightarrow (4 + d)(d - 4) = 2$

$\Leftrightarrow d^2 - 16 = 2 \Leftrightarrow d^2 = 18 \Leftrightarrow d = \pm 3\sqrt{2}$

Với $d = 3\sqrt{2} \Rightarrow u_1 = -4 - 3\sqrt{2}$. Với $d = -3\sqrt{2} \Rightarrow u_1 = -4 + 3\sqrt{2}$.

8) $\begin{cases} u_1 + u_5 = \dfrac{5}{3} \\ u_3.u_4 = \dfrac{65}{72} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 + 4d = \dfrac{5}{3}. \\ (u_1 + 2d)(u_1 + 3d) = \dfrac{65}{72} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{5}{6} - 2d \\ \left(\dfrac{5}{6} - 2d + 2d\right)\left(\dfrac{5}{6} - 2d + 3d\right) = \dfrac{65}{72} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{5}{6} - 2d \\ \dfrac{5}{6} + d = \dfrac{13}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ d = \dfrac{1}{4}. \end{cases}$

Câu 3: Xác định số hạng đầu, công sai và số hạng thứ n của các cấp số cộng sau, biết rằng:

a). $\begin{cases} S_{12} = 34 \\ S_{18} = 45 \end{cases}$ b). $\begin{cases} u_5 = 10 \\ S_{10} = 5 \end{cases}$ c). $\dfrac{S_{20}}{5} = \dfrac{S_{10}}{3} = \dfrac{S_5}{2}$ d). $\begin{cases} S_{20} = 2S_{10} \\ S_{15} = 3S_5 \end{cases}$

LỜI GIẢI

a). $\begin{cases} S_{12} = 34 \\ S_{18} = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{12(2u_1 + 11d)}{2} = 34 \\ \dfrac{18(2u_1 + 17d)}{2} = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6u_1 + 33d = 17 \\ 2u_1 + 17d = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{32}{9} \\ d = -\dfrac{1}{9} \end{cases}$

$u_n = u_1 + (n - 1)d = \dfrac{33}{9} - \dfrac{1}{9}n$

b). $\begin{cases} u_5 = 10 \\ S_{10} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 10 \\ \dfrac{10(2u_1 + 9d)}{2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4d = 10 \\ 2u_1 + 9d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 86 \\ d = -19 \end{cases}$

$u_n = u_1 + (n - 1)d = 105 - 19n$

c). $\dfrac{S_{20}}{5} = \dfrac{S_{10}}{3} = \dfrac{S_5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{S_{20}}{5} = \dfrac{S_{10}}{3} \\ \dfrac{S_{10}}{3} = \dfrac{S_5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{20(2u_1 + 19d)}{10} = \dfrac{10(2u_1 + 9d)}{6} \\ \dfrac{10(2u_1 + 9d)}{6} = \dfrac{5(2u_1 + 4d)}{4} \end{cases}$

$\begin{cases} 2u_1 + 55d = 0 \\ 2u_1 + 24d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow u_n = 0$

d). $\begin{cases} S_{20} = 2S_{10} \\ S_{15} = 3S_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 20(2u_1 + 19d) = 20(2u_1 + 9d) \\ 15(2u_1 + 14d) = 15(2u_1 + 4d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ u_1 \in ¡ \end{cases} \Rightarrow u_n = u_1 \in ¡$

Câu 4: Cho cấp số cộng: $u_1; u_2; u_3; ....$ có công sai d.

1). Biết $u_2+u_{22}=40$. Tính S_{23}
2). Biết $u_1+u_4+u_7+u_{10}+u_{13}+u_{16}=147$. Tính $u_6+u_{11} \vee u_1+u_6+u_{11}+u_{16}$
4). Biết $u_4+u_8+u_{12}+u_{16}=224$. Tính: S_{19}
5). Biết $u_{23}+u_{57}=29$. Tính: $u_{10}+u_{70}+u_{157}+3u_1$

LỜI GIẢI

1). Biết $u_2+u_{22}=40$. Tính S_{23}

Ta có: $u_2+u_{22}=40 \Leftrightarrow u_1+d+u_1+21d=40 \Leftrightarrow 2u_1+22d=40$

Mà $S_{23}=\frac{23}{2}(2u_1+22d)=\frac{23}{2}.40=460.$

2). Biết $u_1+u_4+u_7+u_{10}+u_{13}+u_{16}=147$. Tính $u_6+u_{11} \vee u_1+u_6+u_{11}+u_{16}$

Có: $u_1+u_4+u_7+u_{10}+u_{13}+u_{16}=147.$

$\Leftrightarrow u_1+u_1+3d+u_1+6d+u_1+9d+u_1+12d+u_1+15d=147.$

$\Leftrightarrow 6u_1+45d=147 \Leftrightarrow 2u_1+15d=49.$

Ta có: $u_6+u_{11}=u_1+5d+u_1+10d=2u_1+15d=49.$

Ta có: $u_1+u_6+u_{11}+u_{16}=u_1+u_1+5d+u_1+10d+u_1+15d$

$=4u_1+30d=2(2u_1+15d)=2.49=98.$

4). Biết $u_4+u_8+u_{12}+u_{16}=224$. Tính: S_{19}

Có: $u_4+u_8+u_{12}+u_{16}=224$

$\Leftrightarrow u_1+3d+u_1+7d+u_1+15d=224 \Leftrightarrow 4u_1+36d=224 \Leftrightarrow u_1+9d=56$

Ta có: $S_{19}=\frac{19}{2}(2u_1+18d)=19(u_1+9d)=19.56=1064.$

5). Biết $u_{23}+u_{57}=29$. Tính: $u_{10}+u_{70}+u_{157}+3u_1$

Ta có: $u_{23}+u_{57}=29 \Leftrightarrow u_1+22d+u_1+56d=29 \Leftrightarrow 2u_1+78d=29.$

Ta có: $3u_1+u_{10}+u_{70}+u_{157}=3u_1+u_1+9d+u_1+69d+u_1+156d$

$=6u_1+234d=3(2u_1+78d)=3.29=87$

Câu 5: Tìm 3 số hạng liên tiếp của 1 cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 27 và tổng các bình phương của chúng là 293.

LỜI GIẢI

Gọi 3 số hạng liên tiếp của cấp số cộng: $u_1;u_2;u_3$. Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases} u_1+u_2+u_3=27 & (1) \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=293 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow u_1+u_1+d+u_1+2d=27 \Leftrightarrow 3u_1+3d=27 \Leftrightarrow d=9-u_1.$

$(2) \Leftrightarrow u_1^2+(u_1+d)^2+(u_1+2d)^2=293$

$\Leftrightarrow u_1^2+(u_1+9-u_1)^2+(u_1+18-2u_1)^2=293 \Leftrightarrow u_1^2+81+(18-u_1)^2=293$

$\Leftrightarrow 2u_1^2-36u_1-112=0 \Leftrightarrow u_1=14 \vee u_1=4$

Với $u_1=14 \Rightarrow d=-5 \Rightarrow u_2=9;u_3=4.$

Với $u_1=4 \Rightarrow d=5 \Rightarrow u_2=9;u_3=14.$

Ta có thể gọi 3 số hạng liên tiếp của CSC là $u_1=u-d, u_2=u, u_3=u+d$ *với công sai d*

Câu 6: Tìm 4 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng có tổng bằng 20 và tích của chúng là 384.

LỜI GIẢI

Gọi 4 số hạng của cấp số cộng cần tìm là u_1, u_2, u_3, u_4 có công sai d.

Theo đề bài ta có: $\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 20 \ (1) \\ u_1.u_2.u_3.u_4 = 384 \ (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow u_1 + u_1 + d + u_1 + 2d + u_1 + 3d = 20$

$\Leftrightarrow 4u_1 + 6d = 20 \Rightarrow u_1 = \dfrac{20-6d}{4} = 5 - \dfrac{3}{2}d.$

$(2) \Leftrightarrow u_1(u_1+d)(u_1+2d)(u_1+3d) = 384.$

$\Leftrightarrow \left(5-\dfrac{3}{2}d\right)\left(5-\dfrac{3}{2}d+d\right)\left(5-\dfrac{3}{2}d+2d\right)\left(5-\dfrac{3}{2}d+3d\right) = 384$

$\Leftrightarrow \left(5-\dfrac{3}{2}d\right)\left(5+\dfrac{3}{2}d\right)\left(5-\dfrac{d}{2}\right)\left(5+\dfrac{d}{2}\right) = 384 \Leftrightarrow \left(25-\dfrac{9d^2}{4}\right)\left(25-\dfrac{d^2}{4}\right) = 384.$

Đặt $t = \dfrac{d^2}{4}, t \geq 0.$

$\Leftrightarrow (25-9t)(25-t) = 384 \Leftrightarrow 9t^2 - 250t + 241 = 0 \Leftrightarrow t_1 = \dfrac{241}{9} \ \vee \ t_2 = 1.$

Cách 2: gọi $u_1 = u - 3d,\ u_2 = u - d,\ u_3 = u + d,\ u_4 = u + 3d$

Ta có: $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 20 \Leftrightarrow 4u = 20 \Rightarrow u = 5.$

Và: $u_1.u_2.u_3.u_4 = 384. \Leftrightarrow (u-3d)(u-d)(u+d)(u+3d) = 384$

$\Leftrightarrow (u^2 - 9d^2)(u^2 - d^2) = 384 \Leftrightarrow (25 - 9d^2)(25 - d^2) = 384.$

Đặt: $t = d^2, t \geq 0.$

$\Leftrightarrow 9t^2 - 250t + 241 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \ \vee \ t = \dfrac{241}{9}$

Với $t = 1 \Leftrightarrow d^2 = 1 \Leftrightarrow d = \pm 1.$

- $d = 1 \Rightarrow u_1 = 2; u_2 = 4; u_3 = 6; u_4 = 8$
- $d = -1 \Rightarrow u_1 = 8; u_2 = 6; u_3 = 4; u_4 = 2$

Với: $t = \dfrac{241}{9} \Rightarrow d = \pm\dfrac{\sqrt{241}}{3}$

- $d = \dfrac{\sqrt{241}}{3} \Rightarrow u_1 = 5 - \sqrt{241}; u_2 = 5 - \sqrt{241}; u_3 = 5 + \dfrac{\sqrt{241}}{3}; u_4 = 5 + \sqrt{241}$
- $d = -\dfrac{\sqrt{241}}{3} \Rightarrow u_1 = 5 + \sqrt{241}; u_2 = 5 + \dfrac{\sqrt{241}}{3}; u_3 = 5 - \dfrac{\sqrt{241}}{3}; u_4 = 5 - \sqrt{241}.$

Ta có thể gọi 4 số hạng liên tiếp của CSC là $u_1 = u - 3d, u_2 = u - d, u_3 = u + d, u_4 = u + 3d$ *với công sai 2d.*

Câu 7: Định x để 3 số $10 - 3x, 2x^2 + 3, 7 - 4x$ theo thứ tự đó lập thành 1 cấp số cộng.

LỜI GIẢI

Theo tính chất cấp số cộng ta có: $(10-3x) + (7-4x) = 2(2x^2+3)$

$\Leftrightarrow 17 - 7x = 4x^2 + 6 \Leftrightarrow 4x^2 + 7x - 11 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -\dfrac{11}{4}.$

Câu 8 : Một tam giác vuông có chu vi bằng 3a, và 3 cạnh lập thành một CSC. Tính độ dài ba cạnh của tam giác theo a.

LỜI GIẢI

Gọi x, y, z theo thứ tự tăng dần của độ dài ba cạnh của tam giác.

Chu vi của tam giác: $x+y+z=3a$ (1)

Tính chất của CSC có $x+z=2y$ (2)

Vì tam giác vuông nên có: $x^2+y^2=z^2$ (3)

Thay (2) vào (1) được $3y=3a \Leftrightarrow y=a$, thay $y=a$ vào (2) được: $x+z=2a \Rightarrow x=2a-z$

Thay x và y vào (3) được: $(2a-z)^2+a^2=z^2 \Leftrightarrow 5a^2-4az=0 \Leftrightarrow z=\frac{5a}{4} \Rightarrow x=\frac{3a}{4}$

Kết luận độ dài ba cạnh của tam giác thỏa yêu cầu: $\frac{3a}{4}, a, \frac{5a}{4}$.

Câu 9 : Tìm 3 số hạng liên tiếp của một CSC biết tổng của chúng bằng 15 và tổng bình phương của chúng bằng 83.

LỜI GIẢI

Gọi ba số hạng liên tiếp của CSC là $u_1=u-d, u_2=u, u_3=u+d$ với công sai là d:

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3=15 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2=83 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u=15 \\ (u-d)^2+u^2+(u+d)^2=83 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=5 \\ d^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=5 \\ d=\pm 2 \end{cases}$

Với $d=2 \Rightarrow u_1=3, u_2=5, u_3=7$

Với $d=-2 \Rightarrow u_1=7, u_2=5, u_3=3$.

Câu 10 : Tìm 5 số hạng liên tiếp của một CSC biết tổng của chúng bằng 40 và tổng bình phương của chúng bằng 480.

LỜI GIẢI

Gọi năm số hạng liên tiếp của CSC là $u_1=u-2d, u_2=u-d, u_3=u, u_4=u+d, u_5=u+2d$ với công sai là d:

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4+u_5=40 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2=480 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5u=40 \\ (u-2d)^2+(u-d)^2+u^2+(u+d)^2+(u+2d)^2=480 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=8 \\ d^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=8 \\ d=\pm 4 \end{cases}$

Với $d=4 \Rightarrow u_1=0, u_2=4, u_3=8, u_4=12, u_5=16$.

Với $d=-4 \Rightarrow u_1=16, u_2=12, u_3=8, u_4=4, u_5=0$

Câu 11: Tìm 4 số hạng liên tiếp của một CSC biết tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương của chúng bằng 30.

LỜI GIẢI

Gọi bốn số hạng liên tiếp của CSC là $u_1=u-3d, u_2=u-d, u_3=u+d, u_4=u+3d$ với công sai là 2d:

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} u_1+u_2+u_3+u_4=10 \\ u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=30 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4u=10 \\ (u-3d)^2+(u-2d)^2+(u+2d)^2+(u+3d)^2=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\frac{5}{2} \\ d^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=8 \\ d=\pm 4 \end{cases}$

Câu 12: Một CSC có 7 số hạng với công sai d dương và số hạng thứ tư bằng 11. Hãy tìm các số hạng còn lại của CSC đó, biết hiệu của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 6.

LỜI GIẢI

Gọi $u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7$ là bảy số hạng liên tiếp của CSC với công sai d.

Theo đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases}u_4=11\\u_3-u_5=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+3d=11\\(u_1+2d)-(u_1+5d)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+3d=11\\d=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=17\\d=-2\end{cases}$

Kết luận: $u_1=17,u_2=15,u_3=13,u_4=11,u_5=9,u_4=7,u_5=5,u_6=3,u_7=1$.

Câu 13: Một CSC có 7 số hạng mà tổng của số hạng thứ ba và số hạng thứ năm bằng 28, tổng số hạng thứ năm và số hạng cuối bằng 140. Tìm CSC đó.

LỜI GIẢI

Gọi $u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7$ là bảy số hạng liên tiếp của CSC với công sai d.

Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$\begin{cases}u_3+u_5=28\\u_5+u_7=140\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1+2d+u_1+4d=28\\u_1+4d+u_1+6d=140\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2u_1+6d=28\\2u_1+10d=140\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=-70\\d=28\end{cases}$

Câu 14: Viết sáu số xen giữa hai số 3 và 24 để được CSC có tám số hạng. Tìm CSC đó

LỜI GIẢI

Gọi $3,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7,24$ là CSC cần tìm, ta có:

$\begin{cases}u_1=3\\u_8=24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=3\\u_1+7d=24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=3\\d=3\end{cases}$

Vậy $u_1=3,u_2=6,u_3=9,u_4=12,u_5=15,u_6=18,u_7=21,u_8=24$

Câu 15: Ba góc của một tam giác vuông lập thành một CSC. Tìm số đo các góc đó.

LỜI GIẢI

Gọi 3 góc A, B, C theo thứ tự đó là ba góc của tam giác ABC lập thành CSC.

Ta có $\begin{cases}A+B+C=180\\A+C=2B\\C=90\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A+B=90\\A-2B=-90\\C=90\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=30\\B=60\\C=90\end{cases}$

Câu 16: Bốn số nguyên lập thành CSC, biết tổng của chúng bằng 20, tổng nghịch đảo của chúng bằng $\frac{25}{24}$. Tìm bốn số đó.

LỜI GIẢI

Gọi bốn số hạng liên tiếp của CSC là $u_1=u-3d,u_2=u-d,u_3=u+d,u_4=u+3d$ với công sai là 2d:

Theo đề bài ta có: $\begin{cases}u_1+u_2+u_3+u_4=20\\\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}=\frac{25}{24}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4u=20\\\frac{1}{u-3d}+\frac{1}{u-d}+\frac{1}{u+d}+\frac{1}{u+3d}=\frac{25}{24}\end{cases}$

$\begin{cases}u=5\\\frac{1}{5-3d}+\frac{1}{5+3d}+\frac{1}{5-d}+\frac{1}{5+d}=\frac{25}{24}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=5\\\frac{10}{25-9d^2}+\frac{10}{25-d^2}=\frac{25}{24}\end{cases}\quad(2)$

Giải (2): đặt $t=d^2$, điều kiện $t\ge0$

$(2)\Leftrightarrow\frac{2}{25-9t}+\frac{2}{25-t}=\frac{5}{24}\Leftrightarrow\frac{100-20t}{(25-9t)(25-t)}=\frac{5}{24}\Leftrightarrow 24(20-4t)=(25-9t)(25-t)$

$\Leftrightarrow 9t^2 - 154t + 145 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = \dfrac{145}{9}$

Vì các số hạng là những số nguyên nên chọn t = 1.

Câu 17: Cho a, b, c là 3 số hạng liên tiếp của một CSC. Chứng minh:

a). $a^2 - bc, b^2 - ac, c^2 - ab$ cũng là 3 số hạng liên tiếp của một CSC.

b). $2(a+b+c)^3 = 9\left[a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b)\right]$

LỜI GIẢI

Vì a, b, c là 3 số hạng liên tiếp của một CSC. Nen theo tính chất CSC có: $a + c = 2b$

a). Ta phải chứng minh: $a^2 - bc + c^2 - ab = 2(b^2 - ac)$

$\Leftrightarrow a^2 + c^2 - b(a+c) = 2b^2 - 2ac \Leftrightarrow a^2 + 2ac + c^2 - 2b^2 = 2b^2$

$\Leftrightarrow (a+c)^2 = 4b^2 \Leftrightarrow 4b^2 = 4b^2$ (đúng) (đpcm).

b). Ta có: $9\left[a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b)\right] = 9\left[a^2(3b-a) + 2b^3 + (2b-a)^2(a+b)\right]$

$= 9\left[3a^2b - a^3 + 2b^3 + (4b^2 - 4ab + a^2)(a+b)\right]$

$= 9\left(3a^2b - a^3 + 2b^3 + 4ab^2 + 4b^3 - 4a^2b - 4ab^2 + a^3 + a^2b\right) = 54b^3$ (1)

Ngoài ra: $2(a+b+c)^3 = 2(3b)^3 = 54b^3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Câu 18 : Cho a^2, b^2, c^2 lập thành 1 cấp số cộng có công sai khác không.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{b+c}; \dfrac{1}{c+a}; \dfrac{1}{a+b}$ cũng lập thành một cấp số cộng.

LỜI GIẢI

Theo giả thuyết $a^2 + c^2 = 2b^2$

Ta phải chứng minh: $\dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{a+b} = \dfrac{2}{c+a}$

Ta có: $a^2 + c^2 = b^2 + b^2$

$\Leftrightarrow a^2 - b^2 = b^2 - c^2 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) = (b-c)(b+c) \Leftrightarrow \dfrac{a-b}{b+c} = \dfrac{b-c}{a+b}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a-b}{(b+c)(c+a)} = \dfrac{(b-c)}{(a+b)(c+a)} \Leftrightarrow \dfrac{(a+c)-(b+c)}{(b+c)(c+a)} = \dfrac{(a+b)-(c+a)}{(a+b)(c+a)}$

$\Leftrightarrow \dfrac{a+c}{(a+c)(c+a)} - \dfrac{b+c}{(b+c)(c+a)} = \dfrac{a+b}{(a+b)(c+a)} - \dfrac{c+a}{(a+b)(c+a)}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{b+c} - \dfrac{1}{c+a} = \dfrac{1}{c+a} - \dfrac{1}{a+b}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} = \dfrac{2}{c+a}$ (đpcm).

Câu 19: Cho cấp số cộng :a,b,c. CMR: $\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}; \dfrac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}; \dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, (a>0; b>0; c>0)$ theo thứ tự đó cũng lập thành CSC.

LỜI GIẢI

Vì a, b, c lập thành CSC, ta có $a + c = 2b$

Ta cần chứng minh: $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$

Ta có: $a+c=2b \Leftrightarrow a-b=b-c \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \quad \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)}=\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)}$

$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)-\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)}=\frac{\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)-\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \quad \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}};\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}};\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ Theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng.

Câu 20: Trong một cấp số cộng, đặt: $S_k=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_k$

a). Biết $S_m=n$ và $S_n=m$ (với $m\neq n$). Hãy tính S_{m+n}.

b). Biết $S_m=S_n$ (với $m\neq n$). Hãy tính S_{m+n}

LỜI GIẢI

a). $S_m=n \Leftrightarrow \frac{m\left[2u_1+(m-1)d\right]}{2}=n \Leftrightarrow 2mu_1+\left(m^2-m\right)d=2n \ (1)$

Tương tự $S_n=m$ ta có: $2nu_1+\left(n^2-n\right)d=2m \ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $2u_1(m-n)+\left[\left(m^2-n^2\right)-(m-n)\right]d=-(m-n)$

Do $m\neq n$ nên:

$2u_1+(m+n-1)d=-2 \Leftrightarrow (m+n-1)d=-2-2u_1$

Mặt khác ta có: $S_{m+n}=\frac{(m+n)\left[2u_1+(m+n-1)d\right]}{2}$

Thay kết quả trên vào biểu thức của S_{m+n} ta được:

$S_{m+n}=\frac{(m+n)\left(2u_1-2-2u_1\right)}{2}=-(m+n)$

b). $S_m=S_n \Leftrightarrow m\left[2u_1+(m-1)d\right]=n\left[2u_1+(n-1)d\right]$

$\Leftrightarrow 2u_1(m-n)+\left[\left(m^2-n^2\right)-(m-n)d\right]=0 \Leftrightarrow 2u_1+(m+n-1)d=0 \ (\text{do } m\neq n)$

Thay vào biểu thức của S_{m+n} được: $S_{m+n}=0$.

Câu 21: Cho cấp số cộng $u_1,u_2,...,u_n,...$ với công sai $d\neq 0$ và tất cả các số hạng đều dương. Chứng minh:

$$\frac{1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_2}}+\frac{1}{\sqrt{u_2}+\sqrt{u_3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{u_{n-1}}+\sqrt{u_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{u_1}+\sqrt{u_n}}$$

LỜI GIẢI

Ta có $\frac{1}{\sqrt{u_{k-1}}+\sqrt{u_k}}=\frac{\sqrt{u_k}-\sqrt{u_{k-1}}}{u_k-u_{k-1}}=\frac{1}{d}\left(\sqrt{u_k}-\sqrt{u_{k-1}}\right),\left(\forall k=2,3,...,n\right)$

$VT=\frac{1}{d}\left(\sqrt{u_2}-\sqrt{u_1}+\sqrt{u_3}-\sqrt{u_2}+\cdots+\sqrt{u_{n-1}}-\sqrt{u_{n-2}}+\sqrt{u_n}-\sqrt{u_{n-1}}\right)$

$$=\frac{1}{d}\left(\sqrt{u_n}-\sqrt{u_1}\right)=\frac{1}{d}\frac{u_n-u_1}{\sqrt{u_n}+\sqrt{u_1}}=\frac{n-1}{\sqrt{u_n}-\sqrt{u_1}}$$ (đpcm).

Câu 22: Một cấp số cộng có tính chất với mọi số nguyên dương m và n khác nhau, có các tổng S_m và S_n thỏa hệ thức: $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$. Chứng minh: $\frac{u_m}{u_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$

LỜI GIẢI

$$\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}\Leftrightarrow\frac{m\left[2u_1+(m-1)d\right]}{n\left[2u_1+(n-1)d\right]}=\frac{m^2}{n^2}\Leftrightarrow\frac{2u_1+(m-1)d}{2u_1+(n-1)d}=\frac{m}{n}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2u_1+(m-1)d}{m}=\frac{2u_1+(n-1)d}{n}=\frac{\left[2u_1+(m-1)d\right]-\left[2u_1+(n-1)d\right]}{m-n}=d$$

$$\Rightarrow d=2u_1$$

Ta có $\frac{u_m}{u_n}=\frac{u_1+(m-1)d}{u_1+(n-1)d}=\frac{u_1+(m-1)2u_1}{u_1+(n-1)2u_1}=\frac{2m-1}{2n-1}$ (đpcm)

Câu 23: Cho tam giác ABC có $\tan\frac{A}{2},\tan\frac{B}{2},\tan\frac{C}{2}$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng. Chứng minh $\cos A,\cos B,\cos C$ theo thứ tự cũng lập thành cấp số cộng.

LỜI GIẢI

Ta có: $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{C}{2}=2\tan\frac{B}{2}\Leftrightarrow\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}+\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=2.\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}}=2.\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}}=2\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}\Leftrightarrow\frac{\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}}=2.\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\cos^2\frac{B}{2}=2.\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{C}{2}.\sin\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1+\cos B}{2}=\left[\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)+\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)\right].\sin\frac{B}{2}.$$

$$\Leftrightarrow\frac{1+\cos B}{2}=\cos\frac{A-C}{2}.\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{B}{2}.$$

$$\Leftrightarrow\frac{1+\cos B}{2}=\cos\frac{A-C}{2}.\cos\frac{A+C}{2}+\sin^2\frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1+\cos B}{2}=\frac{1}{2}\left[\cos(-C)+\cos A\right]+\frac{1-\cos B}{2}$$

$\Leftrightarrow 1+\cos B=\cos C+\cos A+1-\cos B\Leftrightarrow\cos A+\cos C=2\cos B.$

$\Rightarrow\cos A,\cos B,\cos C$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng.

Câu 24: Cho ΔABC có $\cot\frac{A}{2},\cot\frac{B}{2},\cot\frac{C}{2}$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh: Ba cạnh a,b,c theo thứ tự cũng tạo thành một cấp số cộng.

LỜI GIẢI

Ta có: $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2}=2\cot\frac{B}{2}\Leftrightarrow\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=2.\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$

$\Leftrightarrow\frac{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}}=2\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$

$\Leftrightarrow\frac{\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}}=2.\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}\Leftrightarrow\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}=2.\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}$

$\Leftrightarrow\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{B}{2}=2.\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{C}{2}.\cos\frac{B}{2}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin B=\left[\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{C}{2}\right)-\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)\right].\cos\frac{B}{2}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin B=\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{C}{2}\right).\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{B}{2}.\cos\frac{B}{2}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin B=\cos\left(\frac{A}{2}-\frac{C}{2}\right).\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin B$

$\Leftrightarrow\sin B=\frac{1}{2}\left(\sin A+\sin C\right)\Leftrightarrow 2\sin B=\sin A+\sin C\Leftrightarrow 2.\frac{b}{2R}=\frac{a}{2R}+\frac{c}{2R}\Leftrightarrow a+c=2b$

$\Rightarrow$ Ba cạnh của Δ tạo thành cấp số cộng.

Câu 25: Chứng minh rằng nếu ba số a, b, c lập thành một cấp số cộng thì ba số x, y, z cũng lập thành một cấp số cộng, với: $x=a^2-bc$, $y=b^2-ca$, $z=c^2-ab$.

LỜI GIẢI

a, b, c là cấp số cộng nên $a+c=2b$

Ta có $2y=2b^2-2ca, x+z=a^2+c^2-b(a+c)$

$\Rightarrow x+z=(a+c)^2-2ac-2b^2=4b^2-2ac-2b^2=2b^2-2ac=2y$ (đpcm)

Câu 26: Tính các tổng sau:

a). $S=1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)$

b). $S=1+4+7+\cdots+(3n-2)+(3n+1)+(3n+4)$

c). $S=100^2-99^2+98^2-97^2+...+2^2-1^2$

LỜI GIẢI

a). Ta có dãy số $1,3,5,\cdots,(2n-1),(2n+1)$ là cấp số cộng với công sai $d=2$ và $u_1=1$, số hạng tổng quát $u_m=2n+1$. Do đó có $2n+1=u_1+(m-1)d\Leftrightarrow 2n+1=1+(m-1).2\Rightarrow m=n+1$.

Vậy $S_{n+1}=\frac{(n+1)(2u_1+nd)}{2}=\frac{(n+1)(2n+1)}{2}$.

b). Ta có dãy số $1,4,7,\cdots,(3n-2),(3n+1),(3n+4)$ là cấp số cộng với công sai $d=3$ và $u_1=1$, số hạng tổng quát $u_m=3n+4$. Do đó có: $3n+4=u_1+(m-1)d \Leftrightarrow 3n+4=1+(m-1).3 \Rightarrow m=n+2$

Vậy $S_{n+2}=\dfrac{m(2u_1+(m-1)d)}{2}=\dfrac{(n+2)\left[2+(n+1)3\right]}{2}=\dfrac{(n+2)(3n+5)}{2}$.

c). $S=100^2-99^2+98^2-97^2+...+2^2-1^2$

$=(100-99)(100+99)+(98-97)(98+97)+...+(2-1)(2+1)$

$=199+195+...+3$

Ta có dãy số $3,7,...,195,199$ là cấp số cộng với công sai $d=4$, số hạng đầu tiên $u_1=3$ và số hạng n là $u_n=199$.

Do đó có $199=3+(n-1).4 \Rightarrow n=50$.

Vậy $S=\dfrac{50(2.3+49.4)}{2}=5050$.

Câu 27: Cho cấp số cộng: $a_1;a_2;...$ có công sai d.CMR:

a). $S_{3n}=3(S_{2n}-S_n)$ b). $S_{4n}-S_{2n}=\dfrac{1}{3}S_{6n}$

c). $S_{n+3}+3S_{n+1}=3S_{n+2}+S_n$ d). $2(S_{3n}-S_n)=S_{4n}$ e). $u_n=\dfrac{1}{2}(u_{n-k}+u_{n+k}), \forall n>k$

LỜI GIẢI

Ta có: $S_{3n}=\dfrac{3n}{2}\left[2u_1+(3n-1)d\right]$ (1)

Ta có: $3(S_{2n}-S_n)=3\left\{\dfrac{2n}{2}\left[2u_1+(2n-1)d\right]-\dfrac{n}{2}\left[2u_1+(n-1)d\right]\right\}$

$=3.\dfrac{n}{2}\left[4u_1+(4n-2)d-(2u_1+(n-1)d)\right]=\dfrac{3n}{2}\left[2u_1+(3n-1)d\right]$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $S_{3n}=3(S_{2n}-S_n)$

b). $S_{4n}-S_{2n}=\dfrac{1}{3}S_{6n}$

Ta có $S_{4n}-S_{2n}=\dfrac{4n\left[2a_1+(4n-1)d\right]}{2}-\dfrac{2n\left[2a_1+(2n-1)d\right]}{2}$

$=n(4a_1+8nd-2d-2a_1-2nd+d)=n\left[2a_1+(6n-1)d\right]$ (1)

Và $\dfrac{1}{3}S_{6n}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{6n\left[2a_1+(6n-1)d\right]}{2}=n\left[2a_1+(6n-1)d\right]$ (1)

Từ (1) và (2) suy ra $S_{4n}-S_{2n}=\dfrac{1}{3}S_{6n}$.

c), d). Sử dụng công thức tính tổng khai triển hai vế, cách giải hoàn toàn tương tự câu b).

e). $u_n=\dfrac{1}{2}(u_{n-k}+u_{n+k}), \forall n>k$

có $\dfrac{1}{2}(u_{n-k}+u_{k+1})=\dfrac{1}{2}\left[u_1+(n-k-1)d+u_1+(n+k-1)d\right]=u_1+(n-1)d=u_n$ (đpcm).

Câu 28: Cho dãy số (u_n) định bởi : $\begin{cases} u_1=-2 \\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1-u_n}; n\in N^* \end{cases}$

a). Chứng minh rằng: $u_n < 0, \forall n \in N^*$

b). Đặt $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n}, n \in N^*$. Chứng minh rằng (v_n) là một cấp số cộng.

c). Tìm công thức của số hạng tổng quát u_n theo $n, n \in N^*$

LỜI GIẢI

a). Ta có: $u_1 = -2 < 0$. Giả sử $u_k < 0 \Rightarrow u_{k+1} = \dfrac{u_k}{1 - u_k} < 0, k \in N^*$

Theo nguyên lý quy nạp suy ra $u_n < 0, \forall n \in N^*$

b).Ta có: $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \Rightarrow v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_{n+1}} \Rightarrow v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} =$

$\dfrac{1}{\dfrac{u_n}{1 - u_n}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1 - u_n - 1}{u_n} = -1, \forall n \in N^*$

Vậy (v_n) là 1 cấp số cộng với công sai $d = -1$

c). (v_n) là cấp số cộng với công sai $d = -1$,

$v_1 = \dfrac{u_1 + 1}{u_1} = \dfrac{-2 + 1}{-2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow v_n = \dfrac{1}{2} + (n - 1)(-1) = -n + \dfrac{3}{2}, \forall n \in N^*$

$v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \Rightarrow u_n = \dfrac{1}{v_n - 1} = \dfrac{1}{-n + \dfrac{3}{2} - 1} = \dfrac{2}{1 - 2n}, \forall n \in N^*$

Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1} + 3, \forall n \ge 2$

Chứng minh rằng dãy số $v_n = 2u_n - u_{n-1}$ là một cấp số cộng. Xác định số hạng đầu tiên và công sai của (v_n)