BÀI TẬP TỔNG HỢP CẤP SỐ CỘNG CẤP SỐ NHÂN

2/24. Một cấp số cộng và một cấp số nhân đều là các dãy tăng các số hạng thứ nhất của hai dãy số đều bằng 3, các số hạng thứ hai bằng nhau. Tỉ số giữa các số hạng thứ ba của CSN và CSC là $\frac{9}{5}$. Tìm ba số hạng của hai cấp số thỏa tính chất trên.

LỜI GIẢI

Gọi u_1, u_2, u_3 là ba số hạng liên tiếp của CSC.

Gọi a_1, a_2, a_3 là ba số hạng liên tiếp của CSN.

Theo đề bài ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u_1 = a_1 = 3 \\ u_2 = a_2 \\ \dfrac{a_3}{u_3} = \dfrac{9}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = a_1 = 3 \\ u_1 + d = a_1 q \\ 5a_3 = 9u_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = a_1 = 3 \quad (1) \\ 3 + d = 3q \quad (2) \\ 5\left(a_1 q^2\right) = 9\left(u_1 + 2d\right) \quad (3) \end{cases}$$

Từ (2) có $d = 3q - 3$ thay vào (3) được: $15q^2 = 9\left(3 + 6q - 6\right) \Leftrightarrow 5q^2 - 18q + 9 = 0 \Leftrightarrow q = 3 \vee q = \frac{3}{5}$

Chọn $q = 3$ (vì dãy tăng) $\Rightarrow d = 6$

Kết luận: 3 số hạng của CSC cần tìm: $u_1 = 3, u_2 = 9, u_3 = 15$

3 số hạng của CSN cần tìm: $a_1 = 3, a_2 = 9, a_3 = 27$.

3/24. Cho bốn số nguyên dương, trong đó ba số đầu lập thành một CSC, ba số hạng sau thành lập CSN. Biết rằng tổng của số hạng đầu và số hạng cuối là 37, tổng của hai số hạng giữa là 36. Tìm bốn số đó.

LỜI GIẢI

Gọi bốn số nguyên dương cần tìm là: a, b, c, d.

Theo đề bài có a, b, c là ba số hạng liên tiếp của CSC. Ta có: $a + c = 2b$ (1)

Ba số hạng b, c, d là ba số hạng liên tiếp của CSN. Ta có: $b.d = c^2$ (2)

Theo giả thuyết đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a + d = 37 \quad (3) \\ b + c = 36 \quad (4) \end{cases}$

Từ (4) có: $b = 36 - c$ thay vào (1) được $a + c = 72 - 2c \Rightarrow a = 72 - 3c$, thay a vào (3) được: $d = 37 - 72 + 3c \Leftrightarrow d = -35 + 3c$.

Thay b, d vào (2) được: $\left(36 - c\right)\left(-35 + 3c\right) = c^2 \Leftrightarrow 4c^2 - 143c + 1260 = 0 \Leftrightarrow c = 20 \vee c = \frac{63}{4}$

Với $c = 20 \Rightarrow b = 16, a = 12, d = 95$.

Với $c = \frac{63}{4} \Rightarrow b = \frac{81}{4}, a = \frac{99}{4}, d = \frac{49}{4}$.

4/25. Ba số khác nhau có tổng bằng 114 có thể coi là ba số hạng liên tiếp của một CSN, hoặc coi là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ hai mươi lăm của một CSC. Tìm các số đó.

LỜI GIẢI

Gọi u_1, u_2, u_3 là ba số hạng liên tiếp của CSN, với công bội là q.

Theo đề bài $u_1 = a_1, u_2 = a_4, u_3 = a_{25}$, với a_1, a_4, a_{25} là các số hạng của một cấp số cộng với công sai d.

Ta có $\begin{cases} a_4 = a_1 + 3d \\ a_{25} = a_1 + 24d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a_4 = 8a_1 + 24d \quad (1) \\ a_{25} = a_1 + 24d \quad (2) \end{cases}$. Lấy phương trình $(1) - (2)$ được:

$8a_4 - a_{25} = 7a_1 \Leftrightarrow 8u_2 - u_3 = 7u_1 \Leftrightarrow 8u_1 q - u_1 q^2 = 7u_1 \Leftrightarrow q^2 - 8q + 7 = 0 \Leftrightarrow q = 1 \vee q = 7$

Vì u_1, u_2, u_3 khác nhau nên chọn $q = 7$.

Theo đề bài có: $u_1 + u_2 + u_3 = 114 \Leftrightarrow u_1 + u_1q + u_1q^2 = 114 \Leftrightarrow u_1\left(1 + q + q^2\right) = 114 \Rightarrow u_1 = 2$

Kết luận ba số cần tìm: $u_1 = 2, u_2 = 14, u_3 = 98$.

6/25. Ba số khác nhau có tổng là 217 có thể coi là các số hạng liên tiếp của một CSN hoặc là các số hạng thứ 2 thứ 9 và thứ 44 của một CSC. Hỏi phải lấy bao nhiêu số hạng đầu tiên của CSC để tổng của chúng là 820?

LỜI GIẢI

Gọi u_1, u_2, u_3 là ba số hạng liên tiếp của CSN, với công bội là q.

Theo đề bài $u_1 = a_2, u_2 = a_9, u_3 = a_{44}$, với a_2, a_9, a_{44} là các số hạng của một cấp số cộng với công sai d.

Ta có $\begin{cases} a_9 = a_2 + 7d \\ a_{44} = a_2 + 42d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a_9 = 6a_2 + 42d & (1) \\ a_{44} = a_2 + 42d & (2) \end{cases}$. Lấy phương trình $(1) - (2)$ được:

$6a_9 - a_{44} = 5a_2 \Leftrightarrow 6u_2 - u_3 = 5u_1 \Leftrightarrow 6u_1q - u_1q^2 = 5u_1 \Leftrightarrow q^2 - 6q + 5 = 0 \Leftrightarrow q = 1 \vee q = 5$

Vì u_1, u_2, u_3 khác nhau nên chọn $q = 5$.

Theo đề bài có: $u_1 + u_2 + u_3 = 217 \Leftrightarrow u_1 + u_1q + u_1q^2 = 217 \Leftrightarrow u_1\left(1 + q + q^2\right) = 217 \Rightarrow u_1 = 7$

Suy ra $u_2 = u_1q = 35$.

Ta có $\begin{cases} a_2 = 7 \\ a_9 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + d = 7 \\ a_1 + 8d = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ d = 4 \end{cases}$

Theo đề bài ta có $S_n = 820 \Leftrightarrow \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right] = 820$

$\Leftrightarrow n\left(6 + 4n - 4\right) = 1640 \Leftrightarrow 4n^2 + 2n - 1640 = 0 \Leftrightarrow n = 20$

Kết luận phải lấy 20 số hạng đầu tiên để tổng của chúng bằng 820.

7/25. Một CSN và CSN đều có số hạng đầu tiên là bằng 5, số hạng thứ hai của CSC lớn hơn số hạng thứ hai của CSN là 10, còn các số hạng thứ 3 của hai cấp số thì bằng nhau. Tìm cấp số đó.

LỜI GIẢI

Gọi u_1, u_2, u_3 là ba số hạng đầu tiên liên tiếp của CSC, với công sai d.

Gọi a_1, a_2, a_3 là ba số hạng đầu tiên liên tiếp của CSN, với công bội q.

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} u_1 = a_1 = 5 \\ u_2 - a_2 = 10 \\ u_3 = a_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = a_1 = 5 \\ u_1 + d - a_1q = 10 \\ u_1 + 2d = a_1q^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = a_1 = 5 \\ 5 + d - 5q = 10 \\ 5 + 2d = 5q^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = a_1 = 5 \\ d = 5 + 5q & (2) \\ 5 + 2d = 5q^2 & (3) \end{cases}$

Thế (2) vào (3) được: $q^2 - 2q - 3 = 0 \Leftrightarrow q = 3 \vee q = -1$

Với $q = 3 \Rightarrow d = 20$. Vậy $u_1 = 5, u_2 = 25, u_3 = 45$ và $a_1 = 5, a_2 = 15, a_3 = 45$.

Với $q = -1 \Rightarrow d = 0$. Vậy $u_1 = u_2 = u_3 = 5$ và $a_1 = 5, a_2 = -5, a_3 = 5$.

9/25. 1). Ba số x, y, z theo thứ tự đó lập thành một CSN với công bội $q(q \neq 1)$, đồng thời các số x, 2y, 3z theo thứ tự đó lập thành một CSC với công sai $d(d \neq 0)$. Hãy tìm q và d.

LỜI GIẢI

Ta có $x + 3z = 2.2y \Leftrightarrow x + 3xq^2 = 4xq \Leftrightarrow 3q^2 - 4q + 1 = 0 \Leftrightarrow q = \frac{1}{3}$.

3). Các số $x+6y, 5x+2y, 8x+y$ theo thứ tự đó thành lập một CSC. Đồng thời các số $x-1, y+2, x-3y$ theo thứ tự đó lập thành CSN. Hãy tìm x và y.

LỜI GIẢI

Dựa vào tính chất của CSC và CSN ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x+6y)+(8x+y)=2(5x+2y)\\(x-1)(x+3y)=(y+2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3y & (1)\\(x-1)(x-3y)=(y+2)^2 & (2)\end{cases}$$

Thay (1) vào (2) được: $(3y-1)6y=(y+2)^2 \Leftrightarrow 17y^2-10y-4=0$

4). Ba số x, y, z theo thứ tự đó lập thành một CSN. Ba số x, y – 4 , z theo thứ tự đó lập thành CSN. Đồng thời các số x, y – 4 , z – 9 theo thứ tự đó lập thành CSC. Tìm x, y, z?

LỜI GIẢI

Dựa vào tính chất của CSC và CSN ta có hệ phương trình: $\begin{cases}x.z=y^2 & (1)\\x.z=(y-4)^2 & (2)\\x+(z-9)=2(y-4) & (3)\end{cases}$

Từ (1) và (2) ta có $y^2=(y-4)^2 \Leftrightarrow 16-8y=0 \Leftrightarrow y=2$

Thay y = 2 vào (3) được: $x+z=5$. Có $x+z=5$ và $x.z=4$ suy ra giá trị của x và z là nghiệm của phương trình $X^2-SX+P=0 \Leftrightarrow X^2-5X+4=0 \Leftrightarrow X=4 \vee X=1$

$\Rightarrow x=4, z=1 \vee x=1, z=4$

Có 2 bộ (x,y,z) thỏa yêu cầu là (1,2,4) và (4,2,1).

3.24:Tìm a, b, c biết rằng: a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng và a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, đồng thời $a+b+c=30$.

LỜI GIẢI

Theo đề bài ta có: $\begin{cases}a+c=2b & (1)\\a.b=c^2 & (2)\\a+b+c=30 & (3)\end{cases}$

Thay(1) vào (3) được $3b=30 \Rightarrow b=10$

thay $b=10$ vào (1) và (2): $\begin{cases}a+c=20\\10a=c^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{c^2}{10}+c=20\\a=\dfrac{c^2}{10}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c^2+10c+200=0\\a=\dfrac{c^2}{10}.\end{cases}$

$\left[\begin{array}{l}c=10\Rightarrow a=10\ (\text{loai})\\c=-20\Rightarrow a=40\end{array}\right.$

Kết luận: $a=40; b=10; c=-20$.

4) Ba số dương a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân và đồng thời $\begin{cases}a+b+c=7\\\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{7}{4}\end{cases}$

LỜI GIẢI

Theo đề: $\begin{cases}a+b+c=7\\\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{7}{4}\end{cases}$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a + a.q + a.q^2 \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a.q} + \dfrac{1}{a.q^2} = \dfrac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\left(1+q+q^2\right) = 7 \quad (*) \\ \dfrac{q^2+q+1}{a.q^2} = \dfrac{7}{4} \quad (**) \end{cases}$$

Lấy $\dfrac{(*)}{(**)}$ được: $a^2.q^2 = 4 \Leftrightarrow (a.q)^2 = 2^2 \Rightarrow a.q = \pm 2.$

Với $a.q = 2 \Rightarrow a = \dfrac{2}{q}$ thay vào $(*)$ được:

$\dfrac{2}{q}\left(1+q+q^2\right) = 7 \Leftrightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Leftrightarrow q = 2 \ \vee \ q = \dfrac{1}{2}.$

• $q = 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 2; c = 4$ • $q = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a = 4; b = 2; c = 1.$

Với $a.q = -2 \Rightarrow$ a và q trái dấu.

Nếu $q < 0 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow b = a.q < 0$ (loại)

Vì a, b, c phải là 3 số dương.

Nếu $q > 0 \Rightarrow a < 0$ (loại)

5)a,b,c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng và a,b,c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, đồng thời $a.b.c = 125.$

LỜI GIẢI

•a, b, c là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng, nên có: $a + c = 2b.$

•b, c, a là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, nên có: $b.a = c^2.$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a + c = 2b & (1) \\ b.a = c^2 & (2) \\ a.b.c = 125 & (3) \end{cases}$

Thay (2) vào (3) được: $c^3 = 125 \Rightarrow c = 5$

Thay $c = 5$ vào (1) và (2):

$$\begin{cases} a + 5 = 2b \\ a.b = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 5 \\ (2b-5)b = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b - 5 \\ 2b^2 - 5b - 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 5 \Rightarrow a = 5 \\ b = -\dfrac{5}{2} \Rightarrow a = -10. \end{array}\right.$$

Vậy: $a = b = c = 5$ hoặc $a = -10; b = -\dfrac{5}{2}; c = 5.$

6) a,b,c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân và $a, b, c - 4$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, đồng thời $a, b - 1, c - 5$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân.

LỜI GIẢI

Có a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, nên: $a.c = b^2.$

Có $a, b, c - 4$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, nên: $a + c - 4 = 2b.$

Có $a, b - 1, c - 5$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân, nên: $a.(c-5) = (b-1)^2.$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a.c = b^2 & (1) \\ a + c - 4 = 2b & (2) \\ a(c-5) = (b-1)^2 & (3) \end{cases}$

Thay (1) vào (3): $b^2 - 5a = b^2 - 2b + 1 \Leftrightarrow -5a = -2b + 1 \Rightarrow b = \dfrac{5a+1}{2}$

Thay vào (2) được: $a+c-4=5a+1 \Rightarrow c=4a+5$.

Thay b và c theo a vào (1) được: $a(4a+5)=\left(\frac{5a+1}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow 16a^2+20a=25a^2+10a+1 \Leftrightarrow 9a^2-10a+1=0 \Leftrightarrow a=1 \ \vee \ a=\frac{1}{9}$

Với $a=1 \Rightarrow b=3; c=9$.

Với $a=\frac{1}{9} \Rightarrow b=\frac{7}{9}; c=\frac{49}{9}$.

7) a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân và $a, b+2, c+9$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, đồng thời $a, b+2, c$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân.

LỜI GIẢI

Vì a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân nên có: $a.c=b^2$.

Vì $a, b+2, c+9$ là ba số hạng liên tiếp của cấp số cộng, có:

$a+c+9=2(b+2)$.

Vì $a, b+2, c$ là ba số hạng liên tiếp của cấp số nhân,có: $a.c=(b+2)^2$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a.c=b^2 & (1) \\ a+c+9=2(b+2)^2 & (2) \\ a.c=(b+2)^2 & (3) \end{cases}$

Thay (1) vào (3) được: $b^2=(b+2)^2 \Leftrightarrow b=-1$

thay $b=-1$ vào (1) và (2) được: $\Leftrightarrow \begin{cases} a.c=1 \\ a+c=-7 \end{cases}$ .Vậy a, c là nghiệm của phương trình: $X^2+7X+1=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{-7+3\sqrt{5}}{2} \\ c=\frac{-7-3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} a=\frac{-7-3\sqrt{5}}{2} \\ c=\frac{-7+3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Tìm m để phương trình $-x^4+2(m+2)x^2-2m-3=0$ (i) có 4 nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

LỜI GIẢI

- Đặt $t=x^2$, $(t \ge 0)$ thì $(i) \Leftrightarrow g(t)=-t^2+2(m+2)t-2m-3 \quad (ii)$
- Để (i) có bốn nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 $(x_1<x_2<x_3<x_4) \Leftrightarrow (ii)$ có hai nghiệm dương phân biệt:

$$\Leftrightarrow 0<t_1<t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2+2m+1>0 \\ S=2m+4>0 \\ P=2m+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\frac{3}{2} \\ m\neq -1 \end{cases} \quad (*)$$

- Theo Viét: $\begin{cases} t_1+t_2=2m+4 & (1) \\ t_1t_2=2m+3 & (2) \end{cases}$. Khi đó bốn nghiệm của (i) được xếp theo thứ tự tăng dần là:

$x_1=-\sqrt{t_2}<x_2=-\sqrt{t_1}<x_3=\sqrt{t_1}<x_4=\sqrt{t_2}$.

- Theo đề x_1, x_2, x_3, x_4 lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3$

$\Leftrightarrow -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = \sqrt{t_1} + \sqrt{t_1} = \sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1 \quad (3)$

$$(1),(2),(3) \Rightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 = 2m + 4 \\ 9t_1 - t_2 = 0 \\ t_1 t_2 = 2m + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{m+2}{5} \\ t_2 = \dfrac{9}{5}(m+2) \\ \dfrac{m+2}{5} \cdot \dfrac{9}{5}(m+2) = 2m + 3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow 9m^2 - 14m - 39 = 0 \Leftrightarrow m = 3 \vee m = -\dfrac{13}{9}$ (thỏa $(*)$)

Tìm m để phương trình $x^3 + (5-m)x^2 + (6-5m)x - 6m = 0$ (i) có 3 nghiệm phân biệt lập thành cấp số nhân ?

LỜI GIẢI

$(i) \Leftrightarrow (x+2)\left[x^2 + (3-m)x - 3m\right] = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = -3 \vee x = m$.

(i) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq -3 \end{cases}$ (ii). Do các nghiệm này lập thành cấp số nhân và ta sắp xếp các nghiệm này theo thứ tự tăng dần được các dãy số sau:

- $-3;\ -2;\ m$ lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow -3.m = (-2)^2 \Leftrightarrow m = -\dfrac{4}{3}$.
- $-3;\ m;\ -2$ lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow -3.(-2) = m^2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{6}$.
- $m;\ -3;\ -2$ lập thành cấp số nhân $m.(-2) = (-3)^2 \Leftrightarrow m = -\dfrac{9}{2}$.

- So với (ii), các giá trị m cần tìm là: $m = -\dfrac{9}{2} \vee m = -\dfrac{4}{3} \vee m = \pm\sqrt{6}$.

Tìm tham số m để phương trình $x^3 - (3m+1)x^2 + 2mx = 0$ (i) có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

LỜI GIẢI

$(i) \Leftrightarrow x\left[x^2 - (2m+1)x + 2m\right] = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2m$

- (i) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m \neq 0 \\ 2m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad (ii)$

- Để các nghiệm này lập thành cấp số cộng nên ta sắp xếp các nghiệm này theo thứ tự tăng dần được các dãy số sau:

+ $2m;\ 0;\ 1$ lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow 2m + 1 = 2.0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$ (thỏa (ii)).

+ $0;\ 2m;\ 1$ lập thành cấp số cộng $\Leftrightarrow 0 + 1 = 2.2m \Leftrightarrow m = \dfrac{1}{4}$ (thỏa (ii)).

+ $0;\ 1;\ 2m$ lập thành cấp số cộng $\text{Û}\ \ 0 + 2m = 2.1\ \text{Û}\ \ m = 1$ (thỏa (ii)).

- Vậy $m = -\dfrac{1}{2}\ \text{Ú}\ m = \dfrac{1}{4}\ \text{Ú}\ m = 1$ là các giá trị cần tìm.

Lưu ý

Trong bài giải trên, ta đã tìm ra được cả ba nghiệm của phương trình bằng nguyên tắc nhẩm nghiệm. Còn nếu không tìm ra được nghiệm hoặc không đủ ba nghiệm, sẽ làm như thế nào ? Ta cùng xét hai bài tập nhỏ sau:

— ***Bài toán không tìm được nghiệm nào của phương trình***:

Tìm m để phương trình $x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0$ có ba nghiệm phân biệt và các nghiệm đó thành lập cấp số cộng.

Bài giải

$x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0 \qquad (*)$

Gọi $x_1, x_2, x_3; (x_1 < x_2 < x_3)$ là ba nghiệm của phương trình $(*)$. Khi đó, ta sẽ phân tích được:

$x^3 - 3x^2 - 9x + m = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

$= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3$ và đồng nhất hệ số của x^2, ta được:

$x_1 + x_2 + x_3 = 3,\ (i)$. Do x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số cộng theo thứ tự đó nên $x_1 + x_3 = 2x_2\ (ii)$.

Thế (ii) vào (i), ta được: $x_2 = 1$.

Thế $x_2 = 1$ vào $(*)$ được $m = 11$. Do đây chỉ là điều kiện cần, ta xét thêm điều kiện đủ, nghĩa là khi $m = 11$ thì $(*)\ \text{Û}\ \ x^3 - 3x^2 - 9x + 11 = 0$

$\text{Û}\ \ (x - 1)(x^2 - 2x - 11) = 0\ \text{Û}\ \ x_1 = 1 - 2\sqrt{3}\ \text{Ú}\ x_2 = 1\ \text{Ú}\ x_3 = 1 + 2\sqrt{3}$ luôn có $x_1 + x_3 = 2x_2$ nên $m = 11$ là giá trị cần tìm của bài toán.

Cần nhớ: nếu đa thức bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ (a\ ^1\ 0)$ có các nghiệm x_1, x_2, x_3 khi $f(x) = 0$ thì ta luôn phân tích được thành tích số dạng:

$\boxed{ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}$.

Chứng minh rằng, với mọi m phương trình $x^3 - (m^2 + 3)x^2 + (m^2 + 3)x - 1 = 0$ luôn có 3 nghiệm và ba nghiệm này lập thành cấp số nhân.

LỜI GIẢI

Ta có $x^3 - (m^2 + 3)x^2 + (m^2 + 3)x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)\left[x^2 - (m^2 + 2)x + 1\right] = 0$ (1)

$\Leftrightarrow x = 1 = x_3$ hoặc $x^2 - (m^2 + 2)x + 1 = 0$ (2).

Có $\Delta_{(2)} = (m^2 + 2)^2 - 4 = m^4 + 4m^2 \geq 0, \forall m \Rightarrow$ phương trình (2) luôn có 2 nghiệm x_1, x_2. Ngoài ra có $x_1.x_2 = 1 = x_3^2$ (đpcm).