ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN.

A.TÓM TẮT GIÁO KHOA.

Phương pháp:

Phương pháp chung để lập phương trình của đường thẳng Δ ta cần đi tìm một điểm đi qua và một véc tơ chỉ phương (VTCP). Khi tìm VTCP của đường thẳng Δ, ta cần lưu ý:

• Nếu giá của hai véc tơ không cùng phương $\vec{a},\vec{b}$ cùng vuông góc với Δ thì $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ là một VTCP của Δ.

• Nếu đường thẳng Δ đi qua hai điểm phân biệt M,N thì $\overrightarrow{MN}$ là một VTCP của đường thẳng Δ.

Trong một số trường hợp chúng ta thường xác định đường thẳng bằng các cách sau:

Cách 1: Tìm hai điểm A,B thuộc đường thẳng Δ. Khi tìm điểm thuộc đường thẳng ta cần lưu ý: $M \in d : \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$

$\Leftrightarrow M\left(x_0+at;y_0+bt;z_0+ct\right)$

Cách 2: Tìm hai mặt phẳng phân biệt chứa đường thẳng Δ. Khi đó Δ chính là giao tuyến của hai mặt phẳng đó. Vì có nhiều mặt phẳng chứa Δ nên khi chọn mặt phẳng chứa Δ, ta thường dựa vào các dấu hiệu sau:

• Nếu đường thẳng d đi qua M và vuông góc với d' thì đường thẳng d nằm trong mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d'

• Nếu đường thẳng Δ đi qua M và cắt đường thẳng d thì đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng đi qua M và đường thẳng d.

• Nếu đường thẳng Δ đi qua M và song song với mặt phẳng (P) thì đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng đi qua M và song song với (P).

• Nếu đường thẳng Δ song song với đường thẳng d và cắt đường thẳng d' thì đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng chứa d' và song song với đường thẳng d.

B.PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.

Bài toán 1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI .

Phương pháp:

Để xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1} \text{ và } d_2: \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}.$$

Ta làm như sau:

Xét hệ phương trình : $\begin{cases} x_1+a_1t=x_2+a_2t' \\ y_1+b_1t=y_2+b_2t' \\ z_1+c_1t=z_2+c_2t' \end{cases}$ (*)

- Nếu (*) có nghiệm duy nhất $(t_0;t'_0)$ thì hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại $A\left(x_1+a_1t_0;y_1+b_1t_0;z_1+c_1t_0\right)$.
- Nếu (*) có vô số nghiệm thì hai đường thẳng d_1 và d_2 trùng nhau
- Nếu (*) vô nghiệm, khi đó ta xét sự cùng phương của hai véc tơ

$$\overrightarrow{u_1}=\left(a_1;b_1;c_1\right) \text{ và } \overrightarrow{u_2}=\left(a_2;b_2;c_2\right).$$

+) Nếu $\overrightarrow{u_1}=k\overrightarrow{u_2}\Rightarrow d_1//d_2$

+) Nếu $\overrightarrow{u_1}\neq k.\overrightarrow{u_2}$ thì d_1 và d_2 chéo nhau.

Ví dụ 1.3.6. Trong không gian hệ toạ độ $Oxyz$,

1. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x-2y+z=0$. Gọi C là giao điểm của Δ với (P), M là điểm thuộc Δ. Tính khoảng cách từ M đến (P), biết $MC=\sqrt{6}$

2. Cho các điểm $A(2;1;0)$, $B\left(1;2;2\right)$, $C\left(1;1;0\right)$ và mặt phẳng (P): $x+y+z-20=0$. Xác định tọa độ điểm D thuộc đường thẳng AB sao cho đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P)

Lời giải.

1. Cách 1: Phương trình tham số của $\Delta: \begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=-2-t \end{cases}, t\in R$.

Thay x,y,z vào phương trình (P) ta được :

$$1+2t-2t-t-2=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow C\left(-1;-1;-1\right).$$

Điểm

$M \in \Delta \Leftrightarrow M(1+2t;t;-2-t) \Rightarrow MC = \sqrt{6} \Leftrightarrow (2t+2)^2 + (t+1)^2 + (t+1)^2 = 6$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \Rightarrow M(1;0;-2) \Rightarrow d\left(M;(P)\right) = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ t = -2 \Rightarrow M(-3;-2;0) \Rightarrow d\left(M;(P)\right) = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{array}\right. .$$

Cách 2: Đường thẳng Δ có $\vec{u} = (2;1;-1)$ là VTCP

Mặt phẳng (P) có $\vec{n} = (1;-2;1)$ là VTPT

Gọi H là hình chiếu của M lên (P), suy ra $\cos HMC = \left|\cos\left(\vec{u},\vec{n}\right)\right|$ nên ta có

$$d(M,(P)) = MH = MC.\cos HMC = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

2. Ta có $\overrightarrow{AB} = \left(-1;1;2\right)$, phương trình $AB: \begin{cases} x = 2-t \\ y = 1+t \\ z = 2t \end{cases}$

Vì D thuộc đường thẳng $AB \Rightarrow D\left(2-t;1+t;2t\right) \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \left(1-t;t;2t\right)$.

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng $\left(P\right): \vec{n} = \left(1;1;1\right)$

Vì C không thuộc mặt phẳng P nên $CD // \left(P\right) \Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{CD} = 0$

$\Leftrightarrow 1.\left(1-t\right) + 1.t + 1.2t = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{2}$.

Vậy $D\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2};-1\right)$.

Ví dụ 2.3.6 Trong không gian hệ toạ độ $Oxyz$,

1. Cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{2}$. Xác định tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho khoảng cách từ M đến Δ bằng OM

2. Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$ và $\Delta_2 : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{2}$. Xác định toạ độ điểm M thuộc Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến Δ_2 bằng 1

Lời giải.

1. Vì $M \in Ox \Rightarrow M(m;0;0)$

Đường thẳng Δ đi qua $N(0;1;0)$ có $\vec{u} = (2;1;2)$ là VTCP nên

$$d(M,\Delta) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{NM},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \frac{\sqrt{5m^2 + 4m + 8}}{3}$$

Nên

$$d(M,\Delta) = OM \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5m^2 + 4m + 8}}{3} = |t| \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = -1, m = 2$$

.

Vậy có hai điểm M thỏa yêu cầu bài toán: $M_1(-1;0;0)$, $M_2(2;0;0)$.

2. Đường thẳng Δ_2 qua $A(2;1;0)$ có $\vec{u} = (2;1;2)$ VTCP

Vì

$$M \in \Delta_1 \Rightarrow M(3+t;t;t) \Rightarrow \overrightarrow{AM}(t+1;t-1;t) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AM}.\vec{u}\right] = (t-2;-2;3-t)$$

Nên $d(M,\Delta_2) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AM}.\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = 1 \Leftrightarrow (t-2)^2 + (-2)^2 + (3-t)^2 = 9$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 10t + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \Rightarrow M(4;1;1) \\ t = 4 \Rightarrow M(7;4;4) \end{array}\right..$$

Ví dụ 3. 3.6. Trong không gian hệ toạ độ $Oxyz$:

1. Cho đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$. Gọi I là giao điểm của Δ và (P). Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho MI vuông góc với Δ và $MI = 4\sqrt{14}$

Đề thi ĐH Khối B – 2011

2. Cho đường thẳng $\Delta : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+5}{-2}$ và hai điểm $A(-2;1;1),\ B(-3;-1;2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho tam giác MAB có diện tích bằng $3\sqrt{5}$

Đề thi ĐH Khối B – 2011

Lời giải.

1. Ta có Δ cắt (P) tại $I(1;1;1)$.

Điểm $M(x;y;3-x-y) \in (P) \Rightarrow \overrightarrow{MI} = \left(1-x;1-y;x+y-2\right)$

Đường thẳng Δ có $\vec{a} = \left(1;-2;-1\right)$ là VTCP

Ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{MI}.\vec{a} = 0 \\ MI^2 = 16.14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x-1 \\ (1-x)^2 + (1-y)^2 + (-2+x+y)^2 = 16.14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -7 \end{cases}$$

hoặc $\begin{cases} x = 5 \\ y = 9 \end{cases}$

Vậy có hai điểm thỏa yêu cầu bài toán: $M(-3;-7;13)$ và $M(5;9;-11)$.

2. Vì $M \in \Delta \Rightarrow M(-2+t;1+3t;-5-2t)$

Ta có

$\overrightarrow{AB} = (-1;-2;1), \overrightarrow{AM} = (t;3t;-6-2t) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right] = (t+12;-t-6;-t)$

Do đó $S_{\Delta MAB} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right]\right| = 3\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{(t+12)^2 + (-t-6)^2 + t^2} = 3\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow t^2 + 12t = 0 \Leftrightarrow t = 0, t = -12$.

Vậy có hai điểm thỏa yêu cầu bài toán: $M(-2;1;-5)$ và $M(-14;-35;19)$.

Ví dụ 4.3.6. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng (P) có phương trình : $x-2y+2z-1=0$ và hai đường thẳng $d_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+9}{6}$, $d_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$. Xác định tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d_1 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng d_2 và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng nhau

Lời giải.

Giả sử $M\left(a;b;c\right)$ là điểm cần tìm.

Vì $M\in\Delta_1 \Rightarrow \frac{a+1}{1}=\frac{b}{1}=\frac{c+9}{6}\Rightarrow \begin{cases} a=b-1 \\ c=6b-9 \end{cases}$

Khoảng cách từ M đến mp (P) là:

$$d=d(M;(P))=\frac{|a-2b+2c-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{|11b-20|}{3}.$$

Gọi (Q) là mp qua M và vuông góc với Δ_2, ta có:

Suy ra $(Q): 2(x-a)+1(y-b)-2(z-c)=0 \Leftrightarrow 2x+y-2z+9b-16=0$

Gọi H là giao điểm của (Q) và Δ_2, suy ra tọa độ H là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 2x+y-2z+9b-16=0 \\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-2} \end{cases} \Rightarrow H(-2b+3;-b+4;2b-3)$$

Do đó $MH^2=(3b-4)^2+(2b-4)^2+(4b-6)^2=29b^2-88b+68$

Yêu cầu bài toán trở thành: $MH^2=d^2 \Leftrightarrow 29b^2-88b+68=\frac{(11b-20)^2}{9}$

$\Leftrightarrow 261b^2-792b+612=121b^2-440b+400$

$\Leftrightarrow 140b^2-352b+212=0 \Leftrightarrow 35b^2-88b+53=0b=1, b=\frac{53}{35}$.

Vậy có 2 điểm thoả mãn là: $M(0;1;-3)$ và $M\left(\frac{18}{35};\frac{53}{35};\frac{3}{35}\right)$.

Ví dụ 5.3.6. Xét vị trí tương đối giữa các đường thẳng Δ_1,Δ_2. Tính góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1:\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{1}$ và $\Delta_2:\ \frac{x+1}{4}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{5}$, tìm giao điểm của chúng (nếu có).

Lời giải.

Đường thẳng Δ_1 qua điểm $M_1(1;\,-1;\,5)$ và có $\overrightarrow{u_1}(2;\,3;\,1)$ là VTCP.

Đường thẳng Δ_2 qua điểm $M_2(-1;\,-1;\,1)$ và có $\overrightarrow{u_2}(4;\,3;\,5)$ là VTCP.

Cách 1: Ta có $\overrightarrow{M_1M_2}(-2;\,0;\,-4)$ và $\left[\vec{u}_1,\vec{u}_1\right]=(12;\,-6;\,-6)$, nên

$$\left[\vec{u}_1,\vec{u}_1\right].\overrightarrow{M_1M_2}=-24+0+24=0$$

Vậy hai đường thẳng cắt nhau tại điểm M.

Cách 2: Ta có $\overrightarrow{u_1}(2;\ 3;\ 1), \overrightarrow{u_2}(4;\ 3;\ 5)$ không cùng phương nên hai đường thẳng hoặc cắt nhau, hoặc chéo nhau.

Chuyển hai phương trình về dạng tham số và xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 1+2u=-1+4v \\ -1+3u=-1+3v \\ 5+u=1+5v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-2v=-1 \\ u-v=0 \\ u-5v=-4 \end{cases} \Leftrightarrow u=v=-1.$$

Vậy hai đường thẳng cắt nhau tại điểm $M(3;\ 2;6)$.

Góc giữa hai đường thẳng

$$\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\left|\cos(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})\right|=\frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}=\frac{|8+9+5|}{\sqrt{14}.\sqrt{50}}=\frac{11}{5\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow (\Delta_1,\Delta_2)=\arccos\left(\frac{11}{5\sqrt{7}}\right)\approx 33,74^0$$

Ví dụ 6.3.6. Tìm tọa độ H là hình chiếu vuông góc của $A(2;\ 1;\ 4)$ lên:

1. Mặt phẳng $(P): 2x-y-z+7=0.$

2. Đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{2}.$

Lời giải.

1. Lập phương trình đường thẳng d đi qua A và $d\perp(P)$. Khi đó điểm H là giao điểm của d và (P).

Vì $\vec{n}_{(P)}(2;-1;-1)$ nên đường thẳng d đi qua $A(2;\ 1;\ 4)$ và $d\perp(P)$ có phương trình là $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1-t \\ z=4-t \end{cases}$ $(t\in R)$. Điểm $H\in d$ nên $H(2+2t;1-t;4-t)$.

Mà điểm $H\in(P)$ nên $2(2+2t)-(1-t)-(4-t)+7=0 \Leftrightarrow t=-1.$

Vậy tọa độ $H(0;2;\ 5)$.

2. Có hai cách giải.

Cách 1: Lập phương trình mặt phẳng (α) qua A và $(\alpha)\perp\Delta$, tọa độ điểm H là giao của (α) và Δ.

Vì $\vec{u}_{\Delta}(1;\ 1;\ 2)$ nên mặt phẳng (α) qua A và $(\alpha)\perp\Delta$ có phương trình là $x+y+2z-11=0.$

Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y+2z-11=0 \\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3, \\ z=3 \end{cases}$ hay $H(2;3;3)$.

Cách 2: Vì $H\in\Delta$ nên H chỉ phụ thuộc một ẩn. Sử dụng điều kiện $AH\perp\Delta$ ta tìm được tọa độ H.

Vì $H\in\Delta$ nên $H(1+t;\,2+t;\,1+2t)\Rightarrow\overrightarrow{AH}(t-1;t+1;\,2t-3)$.

Vì $AH\perp\Delta$ nên $\overrightarrow{AH}.\vec{u}_\Delta=0\Leftrightarrow t-1+t+1+2(2t-3)=0\Leftrightarrow t=1$.

Vậy tọa độ $H(2;3;3)$.

Ví dụ 7.3.6. Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mp (α). Tìm tọa độ giao điểm của chúng nếu có :

1. $d:\begin{cases} x=12+4t \\ y=9+3t \quad ,t\in\mathbb{R} \\ z=1+t \end{cases}$ $\qquad (\alpha):3x+4y-z-2=0$

2. $d:\dfrac{x+10}{-3}=\dfrac{y-4}{4}=\dfrac{z-1}{-1}$ $\qquad (\alpha):\ y+4z+17=0$

Lời giải.

Ta kí hiệu $\overrightarrow{u_d}$ là VTCP của đường thẳng Δ, $\overrightarrow{n_\alpha}$ là VTPT của mp (α)

1. Cách 1 : Thay phương trình của d vào phương trình của (α) ta có :

$$3(12+4t)+4(9+3t)-1-t-2=0\Leftrightarrow 23t+69=0\Leftrightarrow t=-3$$

Vậy d cắt (α) tại $A(0;0;-2)$.

Cách 2 : Ta có : $\overrightarrow{u_d}=(4;3;1)$, $\overrightarrow{n_\alpha}=(3;4;-1)\Rightarrow\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_\alpha}=35\neq 0$.

Vậy d và (α) cắt nhau.

2. Cách 1 : Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x+3y+6z+2=0 \\ x+y+z+5=0 \\ y+4z+17=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=-4z-17 \\ 2x-6z-49=0 \\ x-3y-12=0 \end{cases}$$

Ta thấy hệ này vô nghiệm suy ra $d//(\alpha)$.

Cách 2 : Ta có : $\overrightarrow{u_d}=(-3;4;-1)$, $\overrightarrow{n_\alpha}=(0;1;4)\Rightarrow\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_\alpha}=0$

Mặt khác điểm $M(-10;4;1)\in d$ mà $M\notin(\alpha)\Rightarrow d//(\alpha)$.

Ví dụ 8.3.6. Tính khoảng cách từ $A(2;3;-1)$ đến đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{2}$

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua $B(3;2;0)$ và có $\vec{u}=(1;3;2)$ là VTCP

Cách 1: Gọi H là hình chiếu của A lên Δ, suy ra $H\left(3+t;2+3t;2t\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AH}=\left(t+1;3t-1;2t+1\right)$

Vì $AH\perp\Delta \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow 1(t+1)+3(3t-1)+2(2t+1)=0 \Leftrightarrow t=0$

Do đó $\overrightarrow{AH}=(1;-1;1)\Rightarrow d\left(A,\Delta\right)=AH=\sqrt{3}$.

Cách 2: Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(1;-1;1\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}\right]=\left(-5;-1;4\right)$

Do đó $d\left(A,\Delta\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\dfrac{\sqrt{(-5)^2+(-1)^2+4^2}}{\sqrt{1^2+3^2+2^2}}=\sqrt{3}$.

Ví dụ 9.3.6. Tìm m để hai đường thẳng sau cắt nhau và tìm tọa độ giao điểm của chúng :

$$d_1: \frac{x-6}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-3}{m-1} \qquad d_2: \frac{x-4}{4}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{2}$$

Lời giải.

Cách 1 :

Ta có ptts của đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=6+2t \\ y=-2+4t \\ z=3+(m-1)t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=4+4t' \\ y=-t' \\ z=2+2t' \end{cases}$

Ta có d_1 và d_2 cắt nhau $\Leftrightarrow$ hệ $\begin{cases} 6+2t=4+4t' \\ -2+4t=3-t' \\ 3+(m-1)t=2+2t' \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Từ hai phương trình đầu của hệ ta tìm được $t=t'=1$ thay vào phương trình thứ ba ta có : $3+(m-1).1=2+2\Rightarrow m=2$.

Khi đó tọa độ giao điểm của hai đường thẳng là : $A\left(8;2;4\right)$.

Cách 2 :

Đường thẳng d_1 có VTCP $\overrightarrow{u_1}=(2;4;m-1)$ và đi qua $M_1(6;-2;3)$

Đường thẳng d_2 có VTCP $\overrightarrow{u_2}=(4;-1;2)$ và đi qua $M_2(4;0;2)$

Do đó : $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(m+7;4m-8;-18)$, $\overrightarrow{M_1M_2}=(-2;2;-1)$

Ta có d_1 và d_2 cắt nhau

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2}=0\\ \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\neq\vec{0}\end{cases}\Leftrightarrow -2(m+7)+2(4m-8)+18=0$$

$\Leftrightarrow m=2$ và tọa độ giao điểm là : $A\left(8;2;4\right)$.

Ví dụ 10.3.6 Cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{-3}$ và điểm $A(2;-5;-6)$

1. Tìm tọa độ hình chiếu của A lê đường thẳng Δ

2. Tìm tọa độ điểm M nằm trên Δ sao cho $AM=\sqrt{35}$

Lời giải.

Ta có $\vec{u}=(2;1;-3)$ là VTCP của đường thẳng Δ

1. Cách 1.

Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng Δ, suy ra

$H\left(1+2t;-2+t;-1-3t\right)\Rightarrow\overrightarrow{AH}=\left(2t-1;t+3;-3t+5\right)$.

Vì $AH\perp\Delta\Rightarrow\overrightarrow{AH}.\vec{u}=0\Leftrightarrow 2(2t-1)+(t+3)-3(-3t+5)=0$

$\Leftrightarrow 14t-14=0\Leftrightarrow t=1$ Vậy $H\left(3;-1;-4\right)$.

Cách 2. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với Δ

Suy ra phương trình $(P): 2x+y-3z-17=0$. Khi đó $H=\Delta\cap(P)$ nên tọa độ của H

là nghiệm của hệ: $\begin{cases}2x+y-3z-17=0\\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{-3}\end{cases}$, giải hệ này ta tìm được

$H\left(3;-1;-4\right)$.

2. Vì $M\in\Delta\Rightarrow M\left(1+2t;-2+t;-1-3t\right)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\left(2t-1;t+3;-3t+5\right)$

Nên $AM=\sqrt{35}\Leftrightarrow(2t-1)^2+(t+3)^2+(3t-5)^2=35$

$\Leftrightarrow t^2-2t=0\Leftrightarrow t=0,t=2$

- $t=0\Rightarrow M(1;-2;-1)$

- $t = 2 \Rightarrow M(5; 0; -7)$.

Ví dụ 11.3.6. Cho tam giác AIB có $A(-a\sqrt{3};\ 0;\ 0)$, $B(a\sqrt{3};\ 0;\ 0)$ và $\widehat{AIB} = 120^0, a > 0$. Điểm I thuộc trục tung và có tung độ âm. Trên đường thẳng qua I song song với trục Oz lấy các điểm C, D sao cho tam giác ABC vuông, tam giác ABD đều và C, D có cao độ dương. Tìm tọa độ các điểm I, C, D.

Lời giải.

Tìm tọa độ điểm I.

Vì I thuộc trục tung và có tung độ âm nên $I(0;\ t;\ 0), t < 0$.

Ta có $\overrightarrow{IA}(-a\sqrt{3};\ -t;\ 0)$, $\overrightarrow{IB}(a\sqrt{3};\ -t;\ 0)$ nên

$$\cos\widehat{AIB} = \cos(\overrightarrow{IA};\ \overrightarrow{IB}) = \frac{\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}}{\left|\overrightarrow{IA}\right|.\left|\overrightarrow{IB}\right|}$$

$$\Leftrightarrow \cos 120^0 = \frac{-3a^2 + t^2}{\sqrt{(-a\sqrt{3})^2 + (-t^2) + 0^2}.\sqrt{(a\sqrt{3})^2 + (-t^2) + 0^2}}$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 + t^2 = 2(3a^2 - t^2) \Leftrightarrow t^2 = a^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = a \\ t = -a \end{array}\right. \Rightarrow I(0;\ -a;\ 0).$$

Vậy điểm $I(0;\ -a;\ 0)$.

Đường thẳng qua I và song song với trục Oz có phương trình

$$\Delta: \begin{cases} x = 0 \\ y = -a \ (t \in \mathbb{R}). \\ z = t \end{cases}$$

Tìm tọa độ điểm C.

Vì $C \in \Delta$ nên $C(0;\ -a;\ t), t > 0$. Ta có $\overrightarrow{CA}(-a\sqrt{3};\ a;\ -t)$, $\overrightarrow{CB}(a\sqrt{3};\ a;\ -t)$.

Rõ ràng $CA = CB$ nên tam giác ABC phải vuông tại C.

Hay $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow -3a^2 + a^2 + t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 2a^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{2}a \\ t = -\sqrt{2}a \end{array}\right.$.

Mà $t > 0$ nên $C(0;\ -a;\ \sqrt{2}a)$.

Tìm tọa độ điểm D. Vì $D \in \Delta$ nên $D(0;\ -a;\ t), t > 0$.

Ta có $\overrightarrow{DA}(-a\sqrt{3};\ a;\ -t)$, $\overrightarrow{DB}(a\sqrt{3};\ a;\ -t)$.

Rõ ràng $DA = DB$ nên tam giác ABC đều khi và chỉ khi

$$\left|\overrightarrow{DA}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| \Leftrightarrow 3a^2 + a^2 + t^2 = 12a^2 \Leftrightarrow t^2 = 8a^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2\sqrt{2}a \\ t = -2\sqrt{2}a \end{array}\right..$$

Mà $t > 0$ nên $D(0; -a; 2\sqrt{2}a)$.

Vậy các điểm cần tìm là $I(0; -a; 0)$, $C(0; -a; \sqrt{2}a)$, $D(0; -a; 2\sqrt{2}a)$.

Ví dụ 12.3.6 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$:

1. Cho hai đường thẳng: $d_1 : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$; $d_2 : \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Xét vị trí tương đối giữa d_1 và d_2. Tìm tọa độ các điểm $M \in d_1, N \in d_2$ sao cho MN song song với $mp(P): x - y + z = 0$ và độ dài $MN = \sqrt{2}$;

2. Cho hai đường thẳng: $d_1 : \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-3}{1}$; $d_2 : \frac{x+5}{6} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{2}$. Chứng minh rằng d_1 và d_2 cắt nhau tại I. Tìm tọa độ các điểm A, B lần lượt thuộc d_1, d_2 sao cho tam giác AIB cân tại I và có diện tích bằng $\frac{\sqrt{41}}{42}$

Lời giải.

1. Đường thẳng d_1 đi qua $O(0;0;0)$ có $\overrightarrow{u_1} = (1;1;2)$ là VTCP,

Đường thẳng d_2 đi qua $A(-1;0;1)$ có VTCP $\overrightarrow{u_2} = -2;1;1$

Suy ra $\overrightarrow{OA} = (-1;0;1)$, $\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-1;-5;3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}\right]\overrightarrow{OA} = 4 \neq 0$

Do đó d_1, d_2 chéo nhau.

Ta có $M \in d_1 \Rightarrow M(t;t;2t)$, $N \in d_2 \Rightarrow N(-1-2s; s; 1+s)$

Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} MN // (P) \\ MN = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{n_p} = 0 \\ MN = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -s \\ \sqrt{(t-s)^2 + 4t^2 + (1-3t)^2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

Giải hệ và kiểm tra điều kiện song song ta được

$M\left(\frac{4}{7}; \frac{4}{7}; \frac{8}{7}\right), N\left(\frac{1}{7}; -\frac{4}{7}; \frac{3}{7}\right)$

thỏa mãn.

2. Xét hệ phương trình : $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-3}{1} \\ \dfrac{x+5}{6}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=2 \end{cases}$

Vậy d_1 cắt d_2 tại giao điểm $I\left(1;1;2\right)$.

d_1 đi qua điểm $M_1\left(3;3;3\right)$ có $\overrightarrow{u_1}=(2;2;1)$ là VTCP ;

d_2 đi qua $M_2(-5;-2;0)$ và có $\overrightarrow{u_2}=(6;3;2)$ là VTCP.

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2. Ta có :

$$\cos\varphi=\frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}=\frac{20}{21}\Rightarrow \sin\varphi=\sqrt{1-\cos^2\varphi}=\frac{\sqrt{41}}{21}$$

Giả sử $IA=IB=a>0$. diện tích của tam giác IAB là

$$S=\frac{1}{2}.IA.IB.\sin\varphi=a^2\frac{\sqrt{41}}{42}=\frac{\sqrt{41}}{42}\Rightarrow a=1.$$

$A\in d_1\Rightarrow A(3+2t;3+2t;3+t)\Rightarrow \overrightarrow{IA}=(2t+2;2t+2;t+1)$

$$\Rightarrow IA^2=1\Leftrightarrow 9(t+1)^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{2}{3} \\ t=-\dfrac{4}{3} \end{array}\right.\Rightarrow A_1\left(\frac{5}{3};\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right),\ A_2\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right).$$

$B\in d_2\Rightarrow B(-5+6t;-2+3t;2t)\Rightarrow \overrightarrow{IB}=(6t-6;3t-3;2t-2)$

$$\Rightarrow IB^2=1\Leftrightarrow 49(t-1)^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{8}{7} \\ t=\dfrac{6}{7} \end{array}\right.\Rightarrow B_1\left(\frac{13}{7};\frac{10}{7};\frac{16}{7}\right),\ B_2\left(\frac{1}{7};\frac{4}{7};\frac{12}{7}\right).$$

Vậy có 4 cặp điểm A,B cần tìm là:

$A\left(\frac{5}{3};\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right)$; $B\left(\frac{13}{7};\frac{10}{7};\frac{16}{7}\right)$ hoặc $A\left(\frac{5}{3};\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right)$; $B\left(\frac{1}{7};\frac{4}{7};\frac{12}{7}\right)$ hoặc

$A\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$; $B\left(\frac{13}{7};\frac{10}{7};\frac{16}{7}\right)$ hoặc $A\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$; $B\left(\frac{1}{7};\frac{4}{7};\frac{12}{7}\right)$.

Ví dụ 13.3.6 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$: cho mặt phẳng (α): $3x+2y-z+4=0$ và hai điểm $A(4;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 4;\ 0)$. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng AB.

1. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (α).
2. Xác định tọa độ điểm K sao cho KI vuông góc với mặt phẳng (α), đồng thời K cách đều gốc tọa độ O và mặt phẳng (α).

Lời giải.

1. $\overrightarrow{AB}(-4;\ 4;\ 0)$ nên đường thẳng AB có phương trình $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Gọi $M = AB \cap (\alpha)$ thì $M(4-t;\ t;\ 0)$ và thỏa mãn

$$3(4-t) + 2t - 0 + 4 = 0 \Leftrightarrow t = 16 \Rightarrow M(-12;\ 16;\ 0).$$

Vậy giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (α) là $M(-12;\ 16;\ 0)$.

2. Trung điểm của AB là $I(2;\ 2;\ 0)$.

Đường thẳng KI qua I và vuông góc với (α): $3x + 2y - z + 4 = 0$ có phương trình KI : $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = -t \end{cases}$ $(t \in R)$, nên $K(2+3t;\ 2+2t;\ -t)$.

Ta có: $d(K, (\alpha)) = \dfrac{|3(2+3t) + 2(2+2t) + t + 4|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \sqrt{14}\,|t+1|$.

Mà $OK = d(K, (\alpha))$ nên

$$\sqrt{(2+3t)^2 + (2+2t)^2 + t^2} = \sqrt{14}\,|t+1|$$

$$14t^2 + 20t + 8 = 14(t^2 + 2t + 1) \Leftrightarrow 8t + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{3}{4} \Rightarrow K\left(-\frac{1}{4};\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{4}\right).$$

Vậy điểm cần tìm là $K\left(-\dfrac{1}{4};\ \dfrac{1}{2};\ \dfrac{3}{4}\right)$.

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Xét vị trí tương đối giữa các cặp đường thẳng sau

1. $d_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z}{-2}$ và $d_2 : \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{3}$

2. $d_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+3}{2}$ và $d_2 : \dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y-5}{-1} = \dfrac{z+6}{1}$

3. $d_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z+1}{2}$ và $d_2 : \dfrac{2x+1}{-1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$.

Bài 2 Xét vị trí tương đối giữa các đường thẳng Δ_1, Δ_2. Tính góc giữa hai đường thẳng và tìm giao điểm của chúng (nếu có). Biết

1.

2. $\Delta_1: \begin{cases} x = -t \\ y = 3t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 0 \\ y = 9 \\ z = 5 + 5t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

3. $\Delta_1: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+3}{-4} = \dfrac{z+3}{-3}$ và Δ_2 là giao tuyến của hai mp $(\alpha_1): x + y - z = 0$ và $(\alpha_2): 2x - y + 2z = 0$.

Bài 3 Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng d và mp (α). Tìm tọa độ giao điểm của chúng nếu có.

1. $d: \dfrac{x-13}{8} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{3}$; $(\alpha): x + 2y - 4z + 1 = 0$.

2. $d: \dfrac{x-13}{8} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{3}$ $(\alpha): x + 2y - 4z + 1 = 0$.

Bài 4.

1. Cho hình vuông $ABCD$ có đỉnh $C(1; -1; -2)$ và đường chéo $BD: \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+1}{1}$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, D biết điểm B có hoành độ dương.

2. Cho hình bình hành $ABCD$ có $A \in d_1$, $B \in d_2$ với

$$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1};\ d_2: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}.$$

Tìm tọa độ các đỉnh A, B của hình bình hành biết đường thẳng chứa cạnh CD có phương trình $CD: \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{2}$.

Bài 5 Tính các khoảng cách sau

1. Từ $A(3;2;1)$ đến đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{1}$

2. Giữa hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = -3t' \\ y = 3 + t' \\ z = -2 \end{cases}$.

3. Giữa hai đường thẳng $\Delta_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+2}{3}$ và

$\Delta_2 : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-3}{4}$

4. Giữa $\Delta : \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{3}$ và $(\alpha) : x - 4x + 2z + 1 = 0$.

Bài 6

Cho ba điểm $A(1;\,0;\,0),\ B(0;\,1;\,1),\ C(0;\,0;\,2)$ và đường thẳng

$\Delta : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (CAB) bằng 30^0.

CÁC BÀI TOÁN DÀNH CHO HỌC SINH ÔN THI ĐẠI HỌC

Bài 7

Cho tam giác ABC có $AC : \dfrac{x-4}{7} = \dfrac{y+4}{-6} = \dfrac{z}{-1}$ và $AB : \begin{cases} x = -1 - t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác, biết trực tâm của tam giác trùng với gốc tọa độ.

Bài toán 2. LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Dạng 1: d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ v cĩ VTCP $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$:

$$(d) : \begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t \\ z = z_o + a_3 t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Dạng 2: d đi qua hai điểm A, B: Một VTCP của d l $\overrightarrow{AB}$.

Dạng 3: d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và song song với đường thẳng Δ cho trước:

Vì $d \,//\, \Delta$ nn VTCP của Δ cũng l VTCP của d.

Dạng 4: d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ v vuong gĩc với mặt phẳng (P) cho trước:

Vì $d \perp (P)$ nn VTPT của (P) cũng l VTCP của d.

Dạng 5: d l giao tuyến của hai mặt phẳng (P), (Q):

- ***Cch 1***: Tìm một điểm và một VTCP.

– Tìm toạ độ một điểm $A \in d$ bằng cách giải hệ phương trình $\begin{cases}(P)\\(Q)\end{cases}$ (với việc chọn gi trị cho một ẩn)

– Tìm một VTCP của d: $\vec{a} = \left[\vec{n}_P, \vec{n}_Q\right]$

• ***Cch 2:*** Tìm hai điểm A, B thuộc d, rồi viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm đó.

Dạng 6: d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc với hai đường thẳng d_1, d_2:

Vì $d \perp d_1$, $d \perp d_2$ nn một VTCP của d l: $\vec{a} = \left[\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}\right]$

Dạng 7: d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$, vuông góc và cắt đường thẳng Δ.

• ***Cch 1***: Gọi H l hình chiếu vuong gĩc của M_0 trên đường thẳng Δ.

$$\begin{cases} H \in \Delta \\ \overrightarrow{M_0H} \perp \vec{u}_\Delta \end{cases}$$

Khi đó đường thẳng d là đường thẳng đi qua M_0, H.

• ***Cch 2***: Gọi (P) l mặt phẳng đi qua A v vuong gĩc với d, (Q) là mặt phẳng đi qua A v chứa d. Khi đó $d = (P) \cap (Q)$

Dạng 8: d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2:

• ***Cch 1***: Gọi $M_1 \in d_1$, $M_2 \in d_2$ Từ điều kiện M, M_1, M_2 thẳng hng ta tìm được M_1, M_2. Từ đó suy ra phương trình đường thẳng d.

• ***Cch 2***: Gọi $(P) = (M_0, d_1)$, $(Q) = (M_0, d_2)$. Khi đó $d = (P) \cap (Q)$, do đó, một VTCP của d cĩ thể chọn l $\vec{a} = \left[\vec{n}_P, \vec{n}_Q\right]$.

Dạng 9: d nằm trong mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2:

Tìm cc giao điểm $A = d_1 \cap (P)$, $B = d_2 \cap (P)$. Khi đó d chính là đường thẳng AB.

Dạng 10: d song song với Δ và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2:

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ v d_1, mặt phẳng (Q) chứa Δ v d_2.

Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.

Dạng 11: d là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 cho nhau:

• *Cch 1*: Gọi $M \in d_1$, $N \in d_2$. Từ điều kiện $\begin{cases} MN \perp d_1 \\ MN \perp d_2 \end{cases}$, ta tìm được M, N.

Khi đó, d là đường thẳng MN.

• **Cch 2**:

– Vì $d \perp d_1$ v $d \perp d_2$ nn một VTCP của d cĩ thể l: $\vec{a} = \left[\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}\right]$.

– Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa d v d_1, bằng cch:

+ Lấy một điểm A trn d_1.

+ Một VTPT của (P) cĩ thể l: $\vec{n}_P = \left[\vec{a}, \vec{a}_{d_1}\right]$.

– Tương tự lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa d v d_1.

Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.

Dạng 12: d l hình chiếu của đường thẳng Δ ln mặt phẳng (P):

• Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa Δ v vuong gĩc với mặt phẳng (P) bằng cch:

– Lấy $M \in \Delta$.

– Vì (Q) chứa Δ v vuong gĩc với Δ nn $\vec{n}_Q = \left[\vec{a}_\Delta, \vec{n}_P\right]$.

Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.

Dạng 13: d đi qua điểm M, vuong gĩc với d_1 v cắt d_2:

• *Cch 1*: Gọi N là giao điểm của d v d_2. Điều kiện $MN \perp d_1$, ta tìm được N.

Khi đó, d là đường thẳng M, N.

• *Cch 2*:

– Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M v vuong gĩc với d_1.

– Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa M v d_2.

Khi đó $d = (P) \cap (Q)$.

Ví dụ 14.3.6 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$:

1. Cho điểm $A(1;2;3)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{-2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, vuông góc với đường thẳng d và cắt trục Ox ***Đề thi ĐH Khối D – 2011***

Lời giải.

1. Gọi M là giao điểm của đường thẳng Δ với Ox

Suy ra $M(m;0;0) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (m-1;-2;-3)$, đường thẳng Δ có $\vec{a} = (2;1;-2)$ là VTCP

Vì $AM \perp d \Rightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{a} \Leftrightarrow m = -1 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-2;-2;-3)$

Vậy phương trình đường thẳng Δ là: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$.

Ví dụ 15.3.6 Lập phương trình chính tắc của đường thẳng Δ, biết:
Δ đi qua $M(1;0;-1)$ và vuông góc với hai đường thẳng

$d_1 : \frac{x}{-5} = \frac{y+2}{8} = \frac{z-1}{3}$; $d_2 : \begin{cases} x = t \\ y = -1-2t \\ z = 0 \end{cases}$

Lời giải.

Ta có: d_1 có $\overrightarrow{u_1} = (5;-8;-3)$ VTCP; d_2 có $\overrightarrow{u_2} = (1;-2;0)$ là VTCP

Cách 1: Giả sử $\vec{u} = (a;b;c)$ là một VTCP của Δ.

Vì Δ vuông góc với d_1 và d_2 nên

$$\begin{cases} \vec{u}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \vec{u}.\overrightarrow{u_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a-8b-3c = 0 \\ a-2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ c = \frac{2}{3}b \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \frac{b}{3}.(6;3;2)$$

Phương trình Δ là: $\begin{cases} x = 1+6t \\ y = 3t \\ z = -1+2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Cách 2. Vì $\Delta \perp d_1$, $\Delta \perp d_2$ nên $\vec{u} = \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-6;-3;-2)$ là một VTCP của Δ

Suy ra phương trình Δ là: $\begin{cases} x = 1-6t \\ y = -3t \\ z = -1-2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 16.3.6 Lập phương trình chính tắc của đường thẳng Δ, biết:

1. Δ đi qua $A(1;2;1)$ đồng thời Δ cắt đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = t \end{cases}$ và vuông góc với đường thẳng $d_2 : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+3}{-2}$;

2. Δ đi qua $B(9;0;-1)$, đồng thời Δ cắt hai đường thẳng $\Delta_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+1}{1}$, $\Delta_2 : \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-4}{-3}$

Lời giải.

1. Cách 1: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và d_1, khi đó ta có $\Delta \subset (P)$

Ta có đường thẳng d_1 đi qua $M(1;2;0)$ và có $\overrightarrow{u_1} = (1;-1;1)$ là VTCP

Nên $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u_1}\right] = (-1;-1;0)$ là VTPT của (P).

Vì $\begin{cases} \Delta \subset (P) \\ \Delta \perp d_2 \end{cases}$, suy ra $\vec{u} = \left[\vec{n}, \overrightarrow{u_2}\right] = (2;-2;1)$ là VTCP của Δ (trong đó $\overrightarrow{u_2} = (2;1;-3)$ là VTCP của đường thẳng d_2).

Vậy phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$.

Cách 2: Gọi $E = \Delta \cap d_1$, suy ra $E(1+t;2-t;t)$ nên $\overrightarrow{AE} = (t;-t;t-1)$

Vì $\Delta \perp d_2 \Rightarrow \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{u_2} = 0 \Leftrightarrow 2t - t - 2(t-1) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow \overrightarrow{AE} = (2;-2;1)$

Vậy phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$.

2. Đường thẳng Δ_1 đi qua $C(1;3;-1)$ và có $\overrightarrow{v_1} = (2;-1;1)$ là VTCP

Đường thẳng Δ_2 đi qua $D(-2;3;4)$ và có $\overrightarrow{v_2} = (-1;1;-3)$ là VTCP

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua B và Δ_1, suy ra $\Delta \subset (\alpha)$ và $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{BC}\right] = (-3;-8;-2)$ là VTPT của (α).

Gọi (β) là mặt phẳng đi qua B và Δ_2, suy ra $\Delta \subset (\beta)$ và $\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{BD}\right] = (14;38;8)$ là VTPT của (β).

Ta có Δ là giao tuyến của (α) và (β) nên $\vec{a} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (12;-4;-2)$ là VTCP

Vậy phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là:

$$\frac{x-9}{6}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{-1}.$$

3.

Ví dụ 17.3.6 Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ, biết:

1. Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-3=0$ và $(\beta): 2y-z-1=0$

2. Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x+y-z+3=0$ và $(\beta): 2x-y+5z-4=0$.

3. Δ là hình chiếu vuông góc của $d: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-1}$ lên mp $(\alpha): x+y+z-1=0$

Lời giải.

1. Để lập phương trình đường thẳng Δ ta có các cách sau

Cách 1: Ta có $\overrightarrow{n_1}=(1;1;1)$ và $\overrightarrow{n_2}=(0;2;-1)$ lần lượt là VTPT của (α) và (β)

Do $\Delta=(\alpha)\cap(\beta)$, suy ra $\vec{a}=\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=(-3;1;2)$ là VTCP của Δ

Xét hệ phương trình $\begin{cases}x+y+z-3=0\\2y-z-1=0\end{cases}$ (*). Cho $y=1\Rightarrow x=z=1$, suy ra $M(1;1;1)\in\Delta$

Vậy phương trình tham số của đường thẳng Δ là: $\begin{cases}x=1-3t\\y=1+t\\z=1+2t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

Cách 2: Xét $N(x;y;z)\in\Delta\Leftrightarrow N\in(\alpha)\cap(\beta)\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z-3=0\\2y-z-1=0\end{cases}$

Đặt $y=t$, ta có: $\begin{cases}x=4-3t\\y=t\\z=-1+2t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$, đây chính là phương trình tham số của Δ.

Cách 3: Trong hệ (*) cho $y=0\Rightarrow z=-1, x=4$. Do đó điểm $E(4;0;-1)\in\Delta$

Hay $\Delta\equiv ME$, từ đó ta lập được phương trình tham số của Δ là:

$\begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

2. Để lập phương trình đường thẳng Δ ta có các cách sau

Cách 1: Ta có $A(-1;-1;1)$, $B(-5;6;4)$ là hai điểm chung của (α) và (β)

$\Rightarrow A, B \in d \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-4;7;3)$ là một VTCP của d

Phương trình tham số của d : $\begin{cases} x = -1 - 4t \\ y = -1 + 7t, \ t \in R \\ z = 1 + 3t \end{cases}$.

Phương trình chính tắc của d : $\dfrac{x+1}{-4} = \dfrac{y+1}{7} = \dfrac{z-1}{3}$.

Cách 2: Ta có $\overrightarrow{n_1} = (1;1;-1)$, $\overrightarrow{n_2} = (2;-1;5)$ lần lượt là VTPT của $(\alpha), (\beta)$

Vì d là giao tuyến của (α) và (β) nên $\vec{u} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (4;-7;-3)$

Từ đó ta lập được phương trình cuả d.

Cách 3: Ta có $M(x;y;z) \in d \Leftrightarrow \begin{cases} M \in (\alpha) \\ M \in (\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 2x - y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$

Đặt $z = t$ ta được: $\begin{cases} x + y = -3 + t \\ 2x - y = 4 - 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{3}t \\ y = -\dfrac{10}{3} + \dfrac{7}{3}t \end{cases}$

Phương trình tham số của d : $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{3}t \\ y = -\dfrac{10}{3} + \dfrac{7}{3}t; \ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$.

3. Để lập phương trình đường thẳng Δ ta có các cách sau

Đường thẳng d đi qua $M(1;2;0)$ và có $\vec{v} = (1;2;-1)$ là VTCP.

Mặt phẳng (α) có $\vec{n} = (1;1;1)$ là VTPT

Xét hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{-1} \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$, giải hệ này ta được

$x = 0, y = 0, z = 1$, suy ra d và (α) cắt nhau tại $I(0;0;1)$ và $I \in \Delta$.

Cách 1: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với (α)

Ta có $\overrightarrow{n_1} = \left[\vec{v}, \vec{n}\right] = (3; -2; -1)$ là VTPT của (P)

Vì $\Delta = (\alpha) \cap (P)$ nên $\vec{u} = \left[\vec{n}, \overrightarrow{n_1}\right] = (-1; -4; 5)$ là VTCP của Δ

Vậy phương trình của đường thẳng Δ là: $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z-1}{5}$.

Cách 2. Gọi N là hình chiếu của M lên (α), vì $MN \perp (\alpha)$ nên $\vec{n} = (1; 1; 1)$ là VTCP

của MN, suy ra phương trình MN : $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{1}$

Do $N = MN \cap (\alpha)$ nên tọa độ của N là nghiệm của hệ: $\begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{1} \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$

Giải hệ này ta tìm được: $x = \dfrac{1}{3}, y = \dfrac{4}{3}, z = -\dfrac{2}{3} \Rightarrow N\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{4}{3}; -\dfrac{2}{3}\right)$.

Khi đó đường thẳng $\Delta \equiv IN$, từ đó ta lập được phương trình Δ:
$\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z-1}{5}$.

Ví dụ 18.3.6 Cho đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) có phương trình:

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 - t \\ z = 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R}), \ (P) : 2x - y + 2z = 11 = 0.$$

1. Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu của $A(1; -2; -5)$ trên Δ;
2. Tìm tọa độ điểm A' sao cho $AA' = 2AH$ và ba điểm A, A', H thẳng hàng;
3. Tìm tọa độ điểm B' đối xứng với điểm $B(1; -1; 2)$ qua (P).

Lời giải.

1. Đường thẳng Δ có $\overrightarrow{u_\Delta} = (2; -1; 2)$ là VTCP

Cách 1: Vì $H \in \Delta$ nên $H(1 + 2t; -1 - t; 2t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (2t; 1 - t; 2t + 5)$.

Điểm H là hình chiếu của A trên Δ nên $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_\Delta} = 0$, hay

$$2.(2t) - 1.(1 - t) + 2(2t + 5) = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow H(-1; 0; -2).$$

Vậy điểm cần tìm là $H(-1; 0; -2)$.

Cách 2: Gọi (α) là mặt phẳng qua $A(1; -2; -5)$ và vuông góc với Δ.

Ta có một véc tơ pháp tuyến của (α) là $\overrightarrow{n_\alpha} = (2;\,-1;\,2)$ nên

$$(\alpha):\ 2x - y + 2z - 6 = 0.$$

Điểm H là hình chiếu của A trên Δ thì $H = (P) \cap \Delta \Rightarrow H(-1;\,0;\,-2)$.

2. Gọi $A'(x;\,y;\,z)$.

Vì ba điểm A, A', H thẳng hàng và $AA' = 2AH$ nên có hai trường hợp

- $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AH}$, khi đó H là trung điểm AA' nên

$$\begin{cases} x_A + x_{A'} = 2x_H \\ y_A + y_{A'} = 2y_H \\ z_A + z_{A'} = 2z_H \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A \\ y_{A'} = 2y_H - y_A \\ z_{A'} = 2z_H - z_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = -3 \\ y_{A'} = 2 \\ z_{A'} = 1 \end{cases}.$$

Vậy $A'(-3;\,2;\,1)$.

- $\overrightarrow{AA'} = -2\overrightarrow{AH}$, khi đó ta có

$$\begin{cases} x_{A'} - 1 = -2.(-2) \\ y_{A'} + 2 = -2.2 \\ z_{A'} + 5 = -2.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 5 \\ y_{A'} = -6 \\ z_{A'} = -11 \end{cases} \Rightarrow A'(5;\,-6;\,-11).$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn là $A'(-3;\,2;\,1)$ hoặc $A'(5;\,-6;\,-11)$.

3. Gọi d là đường thẳng đi qua $B(1;\,-1;\,2)$ và $d \perp (P)$, khi đó một véc tơ phương của d là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng.

Ta có $\overrightarrow{u_d} = (2;\,-1;\,2)$ nên $d:\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{2}$.

Điểm K là hình chiếu của B trên (P) thì $K = d \cap (P)$, nên tọa độ K là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{2} \\ 2x - y + 2z = 11 = 0 \end{cases} \Rightarrow H(-3;\,1;\,-2)$.

Điểm B' đối xứng với B qua (P) khi H là trung điểm của BB' nên tọa độ điểm B' cần tìm $B'(-7;\,3;\,-6)$.

Ví dụ 19.3.6 Trong không gian $Oxyz$,

1. Cho mặt phẳng $(\alpha): 2x - 2y + z - n = 0$ và đường thẳng

$\Delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-3}{2m-1}$. Tìm m, n để:

a) Đường thẳng Δ nằm trong $mp(\alpha)$

b) Đường thẳng Δ song song với $mp(\alpha)$

2. Tìm m để :

a) Hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-6}{2} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-1+m}{m-1}$ và $d_2: \dfrac{x-4}{4} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+2}{2}$ cắt nhau. Tìm giao điểm của chúng.

b) Đường thẳng $d_m: \begin{cases} x = (-2m^2 + m + 1)t \\ y = 1 - (4m^2 + 4m + 1)t \\ z = -2 + (m^2 - m)t \end{cases}$ song song với $(P): 2x - y + 2 = 0$.

Lời giải.

1. Mặt phẳng (α) có $\vec{n} = (2;-2;1)$ là VTPT

Đường thẳng Δ đi qua $A(1;-1;3)$ và có $\vec{u} = (2;1;2m-1)$ là VTCP

a) **Cách 1:** Ta có $B(3;0;2m+2) \in \Delta$

$$\Delta \subset (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} A \in (\alpha) \\ B \in (\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - n = 0 \\ 8 + 2m - n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 7 \\ m = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Cách 2: Ta có $\Delta \subset (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} A \in (\alpha) \\ \vec{n}.\vec{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - n = 0 \\ 2m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 7 \\ m = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$

b) Ta có: $\Delta // (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} A \notin (\alpha) \\ \vec{n}.\vec{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - n \neq 0 \\ 2m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \neq 7 \\ m = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$

2. a) Hai đường thẳng cắt nhau khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} 6 + 2t = 4 + 4t' \\ -3 - 2t = -3t' \\ 1 - m + (m-1)t = -2 + 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3, t' = -1 \\ 1 - m + (m-1).(-3) = -4 \end{cases} \Rightarrow m = 2.$$

Khi đó hai đường thẳng cắt nhau tại $A(0;3;4)$.

b) **Cách 1:**

Đường thẳng d_m đi qua $A(0;1;-2)$ có $\vec{u}=(-2m^2+m+1;-4m^2-4m-1;m^2-m)$ là VTCP. Mặt phẳng (P) có $\vec{n}=(2;-1;0)$ là VTPT

Ta có

$$d_m // (P) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}.\vec{n}=0 \\ A \notin (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m^2+2m+2+4m^2+4m+1=0 \\ -1+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}.$$

Cách 2: Ta có $d_m // (P) \Leftrightarrow$ hệ phương trình sau vô nghiệm:

$$\begin{cases} x=(-2m^2+m+1)t \\ y=1-(4m^2+4m+1)t \\ z=-2+(m^2-m)t \\ 2x-y+2=0 \end{cases}$$

Thay ba phương trình đầu vào phương trình cuối ta được: $(6m+3)t=-1$

Do đó hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$.

Ví dụ 20.3.6 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$: cho tứ diện $ABCD$ có các đỉnh $A(1;2;1)$, $B(-2;1;3)$, $C(2;-1;1)$ và $D(0;3;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ C đến (P) bằng khoảng cách từ D đến (P)

Lời giải.

Mặt phẳng *(P)* thoả mãn yêu cầu bài toán trong hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: (P) đi qua A, B song song với CD.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;-1;2)$, $\overrightarrow{CD}=(-2;4;0)$, suy ra $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]=(-8;-4;-14)$ là VTPT của (P). Phương trình (P): $4x+2y+7z-15=0$.

Trường hợp 2: (P) đi qua A, B và cắt CD tại I, suy ra I là trung điểm của CD Do đó $I(1;1;1) \Rightarrow \overrightarrow{AI}=(0;-1;0)$.

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P): $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AI}\right]=(2;0;3)$.

Phương trình $(P): 2x+3z-5=0$.

Vậy $(P): 4x+2y+7z-15=0$ hoặc $(P): 2x+3z-5=0$.

Ví dụ 21.3.6 Cho đường thẳng $\Delta_1: \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$ và đường thẳng

$\Delta_2: \begin{cases} x=-1-2t \\ y=2+3t \\ z=1 \end{cases}$ $(t\in R)$. Lập phương trình đường thẳng Δ cắt Δ_1 và cắt Δ_2

đồng thời thỏa mãn:

1. Δ nằm trong mặt phẳng $(P): 2x+3y-z+2=0$.

2. Δ song song với đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-3}{1}$.

3. Δ đi qua điểm $M(1;-5;-1)$.

Lời giải.

1. Vì Δ cắt Δ_1 và cắt Δ_2 đồng thời Δ nằm trong mặt phẳng (P), nên Δ chính là đường thẳng đi qua các giao điểm của Δ_1 và Δ_2 với (P).

Gọi $A=\Delta_1\cap(P)$ thì tọa độ A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1} \\ 2x+3y-z+2=0 \end{cases} \Rightarrow A(-1;0;0).$$

Gọi $B=\Delta_2\cap(P)$. Vì $B\in\Delta_2$ nên $B(-1-2t;2+3t;1)$. Lại có $B\in(P)$ nên $2(-1-2t)+3(2+3t)+1=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow B(1;-1;1)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}(2;-1;1)$ nên phương trình đường thẳng cần tìm là

$$\Delta: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{1}.$$

2. Có nhiều cách giải bài toán này, chẳng hạn:

Cách 1: Tìm một điểm thuộc Δ.

Vì Δ cắt Δ_1 và song song với d, nên Δ nằm trong mặt phẳng (α) chứa Δ_1 và song song với d. Ta có (α) qua $M_1(2;1;1)$, (α) có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(\alpha)}=\left[\vec{u}_{\Delta_1},\vec{u}_d\right]=(-2;1;5)$ nên $(\alpha): -2x+y+5z-2=0$.

Ta có $\begin{cases} \Delta\subset(\alpha) \\ \Delta\cap\Delta_2=C \end{cases}$ nên $C=\Delta_2\cap(\alpha)\Rightarrow C(-1-2t;2+3t;1)$ và thỏa mãn $-2(-1-2t)+(2+3t)+5-2=0 \Leftrightarrow t=-1$, nên $C(1;-1;1)$.

Lại có $\Delta /\!/ d$ nên một véc tơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}_d(4;3;1)$, do đó phương trình cần tìm $\Delta: \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-1}{1}$.

Cách 2: Xác định hai mặt phẳng cùng chứa đường thẳng Δ.

Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng

- Mặt phẳng (α) chứa Δ_1 và song song với d.
- Mặt phẳng (β) chứa Δ_2 và song song với d.

Ta có $(\alpha): -2x + y + 5z - 2 = 0$.

Mặt phẳng (β) qua $M_2(-1; 2; 1)$, đồng thời (β) có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(\beta)} = \left[\vec{u}_{\Delta_2}, \vec{u}_d\right] = (3; 2; -18)$ nên $(\beta): 3x + 2y - 18z + 17 = 0$.

Hai điểm $D(-3; -4; 0), E(1; -1; 1)$ là các điểm chung của mặt phẳng (α) và (β), nên phương trình cần tìm là $\Delta: \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-1}{1}$.

Cách 3: Xác định tọa độ hai giao điểm.

Gọi $N_1 = \Delta \cap \Delta_1 \Rightarrow N_1(2+3t_1; 1+t_1; 1+t_1)$ và $N_2 = \Delta \cap \Delta_2$ thì $N_2(-1-2t_2; 2+3t_2; 1) \Rightarrow \overrightarrow{N_1N_2}(-3-2t_2-3t_1; 1+3t_2-t_1; -t_1)$.

Ta có $\Delta // d$ nên $\overrightarrow{N_1N_2} // \vec{u}_d$, do đó

$$\frac{-3-2t_2-3t_1}{4} = \frac{1+3t_2-t_1}{3} = \frac{-t_1}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 - 2t_2 = 3 \\ 2t_1 + 3t_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -1 \end{cases}$$

Vì thế $N_1(5; 2; 2), N_2(1; -1; 1)$. Phương trình đường thẳng cần tìm

$$\Delta: \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{1}.$$

3. Bài toán này cũng có thể giải bằng ba cách như bài toán trên. Ở đây, chúng tôi giới thiệu cách 1.

Vì Δ cắt Δ_1 và qua M, nên Δ nằm trong mặt phẳng (Q) chứa Δ_1 và qua $M(1; -5; -1)$. Ta có $M_1(2; 1; 1) \in \Delta_1, \overrightarrow{MM_1}(1; 6; 2), \vec{u}_{\Delta_1}(3;1;1)$.

Một véc tơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_{(Q)} = \left[\vec{u}_{\Delta_1}, \overrightarrow{MM_1}\right] = (-4; -5; 17)$ nên

$$(Q): 4x + 5y - 17z + 4 = 0.$$

Ta có $\begin{cases} \Delta \subset (Q) \\ \Delta \cap \Delta_2 = F \end{cases}$ nên $F = \Delta_2 \cap (Q) \Rightarrow F(-1-2t; 2+3t; 1)$ và thỏa mãn $4(-1-2t) + 5(2+3t) - 17 + 4 = 0 \Leftrightarrow t = -1$, nên $F(-3; 5; 1)$.

Vậy Δ là đường thẳng MF.

Ta có $\overrightarrow{MF}(-4; 10; 2) = 2(-2; 5; 1)$ nên phương trình Δ là

$\Delta: \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y+5}{5} = \dfrac{z+1}{1}$.

Ví dụ 22.3.6 Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC, biết:

1. Đỉnh $A(1;-3;2)$, phương trình hai đường trung tuyến:

$$BM:\begin{cases}x=2+3t\\y=-2-3t\\z=-1-t\end{cases}(t\in\mathbb{R}),\quad CN:\begin{cases}x=-3t'\\y=-1\\z=1+5t'\end{cases}(t,t'\in\mathbb{R}).$$

2. Đỉnh $A(1;2;7)$ và phương trình hai đường cao:

$$BE:\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-5}{-3},\quad CF:\frac{x-1}{2}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-4}{1}.$$

3. Đỉnh $A(3;2;3)$, phương trình phân giác trong góc B và đường cao CK là:

$$BD:\frac{x-1}{1}=\frac{y-4}{-2}=\frac{z-3}{1},\quad CK:\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-3}{-2}.$$

Lời giải.

1. Tọa độ của điểm B và trung điểm N của AB lần lượt là

$$B(2+3b;-2-3b;-1-b),\ N(-3n;-1;1+5n).$$

Theo công thức tính tọa độ trung điểm, ta có

$$\begin{cases}x_A+x_B=2x_N\\y_A+y_B=2y_N\\z_A+z_B=2z_N\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+2+3b=-6n\\-3-2-3b=-2\\2-1-b=2+10n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-1\\n=0\end{cases}$$

Tọa độ điểm $B(-1;1;0)\Rightarrow\overrightarrow{AB}(-2;4;-2)=-2(1;-2;1)$.

Phương trình đường thẳng chứa cạnh $AB:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+3}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$.

Tương tự, ta có $M(2+3m;-2-3m;-1-m)$, $C(-3c;-1;1+5c)$ nên

$$\begin{cases}x_A+x_C=2x_M\\y_A+y_C=2y_M\\z_A+z_C=2z_M\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-3c=4+6m\\-3-1=-4-6m\\2+1+5c=-2-2m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-1\\m=0\end{cases}$$

Tọa độ điểm $C(3;-1;-4)\Rightarrow\overrightarrow{AC}(2;-2;-2)=-2(-1;1;1)$.

Phương trình đường thẳng chứa cạnh $AC:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-2}{1}$.

Ta có $\overrightarrow{BC}(4;-2;-4)=-2(-2;\ 1:2)$ nên phương trình đường thẳng chứa cạnh $BC:\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+4}{2}$.

2. Phương trình mặt phẳng (P) qua $A(1;2;7)$ và vuông góc với BE là $2x+y-3z+17=0$.

Ta có $C = CF \cap (P)$ nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-5}{-3} = \dfrac{z-4}{1} \\ 2x + y - 3z + 17 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(13;\,-13;\,10).$

Phương trình mặt phẳng (Q) qua $A(1;\,2;\,7)$ và vuông góc với CF là $(Q):\ 2x - 3y + z - 3 = 0.$

Ta có $B = BF \cap (Q)$ nên tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-5}{-3} \\ 2x - 3y + z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(5;\,3;\,2).$

Do đã biết tọa độ ba đỉnh của tam giác nên các phương trình đường thẳng chứa cạnh của tam giác ABC là

$$AB:\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 5 - t \end{cases},\quad BC:\begin{cases} x = 7 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 \end{cases},\quad CA:\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 2t \\ z = 5 - t \end{cases}.$$

3. Mặt phẳng (α) qua $A(3;\,2;\,3)$ vuông góc với CK là

$$(\alpha):\quad x + y - 2z + 1 = 0.$$

Vì $B = (\alpha) \cap BD$ nên tọa độ điểm B thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-4}{-2} = \dfrac{z-3}{1} \end{cases} \Rightarrow B(1;\,4;\,3).$$

Muốn tìm tọa độ điểm C ta tìm điểm A' đối xứng với điểm A qua phân giác trong góc B. Điểm A' thuộc đường thẳng BC nên lập được phương trình đường thẳng BC và tìm được $C = BC \cap CK$.

Gọi H là hình chiếu của A trên BD, suy ra $H(1+t;4-2t;3+t)$.

Ta có $\overrightarrow{AH}(t-2;\,2-2t;\,t)$, $\vec{u}_{BD}(1;\,-2;\,1)$ nên

$$\overrightarrow{AH}.\vec{u}_{BD} = 0 \Leftrightarrow 1.(t-2) - 2.(2-2t) + t = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Vậy $H(2;\,2;\,4)$.

Gọi A' đối xứng với A qua BD thì $A'(1;\,2;\,5)$.

Đường thẳng BC là đường thẳng BA' nên có phương trình là

$$BC:\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - t \\ z = 5 + t \end{cases}.$$

Tọa độ điểm C thỏa mãn hệ $\begin{cases} x_C = 1 = 2 + c \\ y_C = 2 - t = 3 + c \\ z_C = 5 + t = 3 - 2c \end{cases} \Rightarrow C(1;2;5).$

Phương trình các đường thẳng cần tìm là

$$AB: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + t \\ z = 3 \end{cases}, \quad BC: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - t \\ z = 5 + t \end{cases}, \quad CA: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = 5 + t \end{cases}.$$

CÁC BÀI TOÁN LUYỆN TẬP

Bài 1 Lập phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng d biết:

1. d đi qua $A(2;0;1)$ và có $\vec{u} = (1;-1;-1)$ là VTCP .

2. d đi qua $A(1;2;1)$ và $B(-1;0;0)$,

3. d đi qua $M(-2;1;0)$ và vuông góc với $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$,

4. d đi qua $N(-1;2;-3)$ và song song với $\Delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{3-z}{1}$.

5. d nằm trong $(P): x + 2y - 3z + 4 = 0$ sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{-1}$

Bài 2 Lập phương trình của đường thẳng Δ biết

1. Δ đi qua $M(1;4;-2)$ và song song với hai mặt phẳng

$$(P): 6x + 6y + 2z + 3 = 0 \text{ và } (Q): 3x - 5y - 2z - 1 = 0.$$

2. Δ nằm trong $(P): y + 2z = 0$ và cắt hai đường thẳng

$$d_1: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases} \quad ; \quad d_1: \begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 4 + 2t' \\ z = 1 \end{cases}.$$

3. Δ đi qua $M(-4;-5;3)$ và cắt hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1} \text{ và } d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$$

4. Δ đi qua $M(0;1;1)$, vuông góc với $d_1: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{1}$ và cắt đường thẳng $d_2: \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases}$.

Bài 3 Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ, biết
1. Δ đi qua hai điểm $A(1;2;4)$ và $B(-3;5;-1)$
2. Δ đi qua A (ở ý 1) và song song với đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{-1}$
3. Δ nằm trong mặt phẳng (α) (ở ý 3) đồng thời Δ cắt và vuông góc với đường thẳng d (ở ý 2).
Bài 4 Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(5;5;0)$ và đường thẳng d có phương trình: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-7}{-4}$.
1. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua đường thẳng d.
2. Tìm toạ độ điểm B, C thuộc d sao cho tam giác ABC vuông tại C và $BC = \sqrt{29}$.
Bài 5 Trong không gian $Oxyz$ cho đường đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-2}{-1}$ và điểm $A(4;3;2)$.
1. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $AM = \sqrt{105}$,
2. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua Δ.
3. Tìm tọa độ điểm D thuộc Δ sao cho khoảng cách từ D đến $(\alpha): x - 2y + 2z + 2 = 0$ bằng 1.
Bài 6 Viết phương trình đường thẳng Δ biết
1. Δ đi qua $A(-2;2;1)$ và cắt Oy tại điểm B sao cho $OB = 2OA$
2. Δ đi qua $B(1;1;2)$ và cắt đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+1}{1}$ tại C sao cho tam giác OBC có diện tích bằng $\dfrac{\sqrt{83}}{2}$.
Bài 7 Cho hai đường thẳng
$\Delta_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-1}$, $\Delta_2: \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{1}$.

1. Chứng minh rằng hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau và lập phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó.

2. Tìm điểm M thuộc Δ_1 có khoảng cách đến Δ_2 bằng $\frac{\sqrt{210}}{3}$.

3. Lập phương trình tham số các đường phân giác của các góc tọa bởi hai đường thẳng.

Bài 8 Lập phương trình chính tắc của đường thẳng Δ biết

1. Δ qua $A(2;0;3)$, Δ cắt và vuông góc với đường thẳng Δ_1 có phương trình $\Delta_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{-1}$.

2. Δ qua $B(1;-1;1)$, Δ vuông góc $d_1: \frac{x+1}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z}{1}$ và Δ cắt $d_2: \frac{x-2}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+3}{3}$.

3. Δ qua $C(0;-4;0)$, Δ song song $(Q): 5x+2y+7z+7=0$ và Δ cắt đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{1}$.

CÁC BÀI TOÁN DÀNH CHO HỌC SINH ÔN THI ĐẠI HỌC

Bài 9

1. Cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=-3+2t \\ y=-1+t \\ z=3+t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ và mặt phẳng có phương trình $(\alpha): x+2y-z+5=0$. Gọi A là giao điểm của Δ và (α). Tìm điểm $B\in\Delta$, $C\in(\alpha)$ sao cho $BA=2BC=\sqrt{6}$ và $ABC=60^0$.

2. Lập phương trình của đường thẳng Δ, biết Δ đi qua $A(2;3;-1)$ và cắt d tại điểm B sao cho $d\left(B,(\alpha)\right)=2\sqrt{3}$.

Bài 10 Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng :

$$\Delta_1: \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-1} \text{ và } \Delta_2: \frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+9}{-2}$$

1. Chứng minh rằng hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 chéo nhau. Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

2. Hai điểm A, B thay đổi trên Δ_1 sao cho $AB=3$. Tìm điểm C trên đường thẳng Δ_2 sao cho ΔABC có diện tích nhỏ nhất.

3. Viết phương trình đường thẳng d cắt hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt tại M, N thỏa mãn $MN = 6\sqrt{5}$ và d tạo với Δ_1 một góc α thỏa $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{8}{15}}$.

Bài 11 Lập phương trình chính tắc của đường thẳng Δ biết

1. Δ qua $A(1;-2;2)$ và cắt trục Oz tại B sao cho $OB = 2OA$.

2. Δ qua $A(1;-2;2)$ và cắt đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{-1}$ tại điểm C sao cho $d(C, (Oxy)) = 3$.

3. Δ qua $A(1;-2;2)$ và cắt đường thẳng $d': \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ tại điểm D sao cho diện tích tam giác OAD bằng $\dfrac{45}{2}$ (đvdt).

Bài 12 Cho ba điểm $A(2;\ 1;\ 0), B(0;\ 4;\ 0), C(0;\ 2;\ -1)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{3}$. Lập phương trình đường thẳng Δ biết

1. Δ qua A và cắt d tại M sao cho $AM = 3$.

2. Δ qua B và cắt d tại N sao cho diện tích $S_{BNC} = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

3. Δ vuông góc với mặt phẳng (ABC), Δ cắt d tại D sao cho tứ diện $ABCD$ có thể tích bằng $\dfrac{19}{6}$ (đvtt).

Bài 13 Cho hai đường thẳng có phương trình tham số

$$\Delta_1: \begin{cases} x = -1 + t_1 \\ y = -2 + t_1 \\ z = 1 \end{cases}, \quad \Delta_2: \begin{cases} x = 1 - t_2 \\ y = 0 \\ z = 1 + t_2 \end{cases} \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{R}).$$

1. Chứng minh rằng hai đường thẳng cắt nhau tại điểm I.

2. Lập phương trình đường thẳng Δ cắt Δ_1 và Δ_2 lần lượt tại A, B sao cho tam giác IAB cân tại I và có diện tích bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Bài 14

1. Trong không gian $Oxyz$ cho ha đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{3} \text{ và } d_2: \frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-3}{-3}$$

Chứng minh rằng hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau. Viết phương trình đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng đó.

2. Tìm tọa độ các điểm $A \in d_1$, $B \in d_2$ sao cho $AB \perp d_3$ và $AB = \sqrt{13}$,

trong đó: $d_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{1}$ và $d_2 : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{3}$,

$d_3 : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-6}{1}$.

Bài 15 Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ biết

1. Δ qua $A(-1;0;4)$ và cắt đường thẳng $\Delta_1 : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-6}{-1}$ và tạo với đường thẳng ấy góc 60^0.

2. Δ qua $B(-3;-1;3)$ và cắt $\Delta_2 : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-5}{2}$, Δ tạo với mặt phẳng $(\alpha): x+2y-z+5=0$ góc 30^0.

Bài 16 Trong không gian $Oxyz$

Cho đường thẳng $d_m : \dfrac{x-4m+3}{2m-1} = \dfrac{y-2m-3}{m+1} = \dfrac{z-8m-7}{4m+3}$ với

$m \notin \left\{-1; -\dfrac{3}{4}; \dfrac{1}{2}\right\}$

Chứng minh rằng khi m thay đổi thì đường thẳng d_m luôn nằm trong một mặt phẳng cố định. Viết phương trình mặt phẳng đó.