HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 1

1. Phương trình mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5$

2. Gọi I là tâm mặt cầu. Vì $I\in Ox\Rightarrow I(x;0;0)$

Ta có $IA^2=IB^2\Leftrightarrow(x-1)^2+2^2+1^2=(x-3)^2+1^2+(-2)^2\Leftrightarrow x=2$

Suy ra tâm $I(2;0;0)$ và bán kính $R^2=IB^2=6$

Vậy phương trình mặt cầu $(S):(x-2)^2+y^2+z^2=6$.

3. Vì mặt cầu (S) có tâm $I(3;-2;4)$ và tiếp xúc với $mp(P)$

Suy ra $R=d(I,(P))=\dfrac{|2.3+2+2.4+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\dfrac{20}{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=\dfrac{400}{9}$.

4. Gọi C_1,C_2,C_3 lần lượt là hình chiếu của C lên các trục tọa độ Ox,Oy,Oz

Suy ra $C_1(2;0;0)$, $C_2(0;-4;0)$, $C_3(0;0;3)$.

Giả sử $(S):x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$

Do (S) đi qua C,C_1,C_2,C_3 nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}-4a+8b-6c+d=-29\\-4a+d=-4\\8b+d=-16\\-6c+d=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{d+4}{4}\\b=-\dfrac{d+16}{8}\\c=\dfrac{d+9}{6}\\-2d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=\dfrac{3}{2}\\d=0\end{cases}.$$

Vậy phương trình mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y-3z=0$.

5. Vì tâm I của mặt cầu nằm trên $mp(Oxy)$ nên $I(x;y;0)$

Ta có: $\begin{cases}IM^2=IN^2\\IN^2=IP^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6x+2y=1\\2x-4y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{10}\\y=\dfrac{4}{5}\end{cases}\Rightarrow I\left(\dfrac{1}{10};\dfrac{4}{5};0\right)$.

Và $R^2 = IM^2 = \dfrac{109}{20}$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S):\left(x-\dfrac{1}{10}\right)^2+\left(y-\dfrac{4}{5}\right)^2+z^2=\dfrac{109}{20}$.

6. Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với Oy nên suy ra $R=d(I,Oy)=3$

Vậy phương trình $(S):(x-6)^2+(y-3)^2+(z+4)^2=9$.

Bài 2

1.Ta có, bán kính mặt cầu $R=d(I,(P))=\dfrac{|1+2+4+1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{8}{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=\dfrac{64}{9}$.

2. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với mp(P)

$\Rightarrow \Delta:\begin{cases}x=1+t\\ y=1+2t\\ z=-3+2t\end{cases}$.

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với $mp\left(P\right)$ tại A nên tâm

$I\in\Delta\Rightarrow I(1+t;1+2t;-3+2t)$

Và $d(I,(P))=R=3\Leftrightarrow\dfrac{|9t|}{3}=3\Leftrightarrow t=\pm1$.

* Với $t=1\Rightarrow I(2;3;-1)\Rightarrow(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9$.

* Với $t=-1\Rightarrow I(0;-1;-5)\Rightarrow(S):x^2+(y+1)^2+(z+5)^2=9$.

3. Vì mặt cầu (S) có tâm $I\in d\Rightarrow I(2-3t;1+2t;1+2t)$.

Mặt cầu (S) tiếp xúc với hai mp (P) và (Q) nên $d(I,(P))=d(I,(Q))=R$

$\Leftrightarrow \frac{|2-3t|}{3} = \frac{|6-3t|}{3} \Leftrightarrow 2-3t = -6+3t \Leftrightarrow t = \frac{4}{3} \Rightarrow I(-2; \frac{11}{3}; \frac{11}{3})$ và $R = \frac{2}{3}$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S): (x+2)^2 + (y - \frac{11}{3})^2 + (z - \frac{11}{3})^2 = \frac{4}{9}$.

4. Giả sử phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

Vì

$$A, B, C, D \in (S) \Rightarrow \begin{cases} -2b + d + 1 = 0 \\ -4a - 6b - 2c + d + 14 = 0 \\ 4a - 4b - 4c + d + 12 = 0 \\ -2a + 2b - 4c + d + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2b - 1 \\ -4a - 4b - 2c + 13 = 0 \\ 4a - 2b - 4c + 11 = 0 \\ -2a + 4b - 4c + 5 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}, c = \frac{5}{2}, d = 2$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - x - 3y - 5z + 2 = 0$.

5. Giả sử phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$.

Vì

$$\begin{cases} A, B, C \in (S) \\ I \in (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c - 2 = 0 \\ -4a - 2c + d + 5 = 0 \\ -2a + d + 1 = 0 \\ -2a - 2b - 2c + d + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2a - 1 \\ -2a - 2c + 4 = 0 \\ a + b + c - 2 = 0 \\ -2b - 2c + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \\ d = 1 \end{cases}$$

.

Vậy phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z + 1 = 0$.

6. Gọi I là tâm mặt cầu, suy ra $I(-2; 0; z)$

Do (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng (P) và (Q) nên ta có:

$$d(I,(P)) = d(I,(Q)) \Leftrightarrow \frac{|2z+10|}{\sqrt{5}} = \frac{|z-1|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow z = -11, z = -3$$

- $z=-3 \Rightarrow I(-2;0;-3),\ R=\dfrac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow$ phương trình

$(S):(x+2)^2+y^2+(z+3)^2=\dfrac{16}{5}$

- $z=-11 \Rightarrow I(-2;0;-11),\ R=\dfrac{12}{\sqrt{5}} \Rightarrow$ phương trình

$(S):(x+2)^2+y^2+(z+11)^2=\dfrac{144}{5}$

Bài 3

1. Giả sử $(S): x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$

Do (S) đi qua A,B,C,D nên ta có hệ: $\begin{cases}6a+6b+d=-18\\6a+6c+d=-18\\6b+6c+d=-18\\6a+6b+6c+d=-27\end{cases}$

Giải hệ trên ta tìm được: $a=b=c=-\dfrac{3}{2};d=0$

Vậy $(S): x^2+y^2+z^2-3x-3y-3z=0$.

2. Ta có:

$\overrightarrow{AB}=(0;-3;3),\ \overrightarrow{AC}=(-3;0;3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-9;-9;-9) \Rightarrow \vec{n}=(1;1;1)$ là VTPT của (ABC). Suy ra phương trình $(ABC): x+y+z-6=0$.

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Suy ra $\begin{cases}I\in(ABC)\\IA=IB\\IB=IC\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b+c-6=0\\b-c=0\\a-b=0\end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=2$. Vậy $I(2;2;2)$.

Bài 4

1. Đường thẳng Δ qua điểm $M(-2;1;-1)$ và có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_{\Delta}(1;2;-2)$. Ta có $\overrightarrow{IM}(4;2;2)$ nên $\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}_{\Delta}\right]=(-8;10;6)$, do đó bán kính của mặt cầu là:

$$R=d(I,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}_{\Delta}\right]\right|}{\left|\vec{u}_{\Delta}\right|}=\frac{\sqrt{(-8)^2+10^2+6^2}}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{10\sqrt{2}}{3}.$$

Phương trình mặt cầu cần tìm

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=\frac{200}{9}.$$

2. Đường thẳng Δ' qua điểm $M(2;-3;0)$ và có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_{\Delta'}(-1;1;1)$. Ta có $\overrightarrow{IM}(1;6;5)$ nên $\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}_{\Delta}\right]=(1;-4;5)$, do đó

$$d(I,\Delta')=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}_{\Delta'}\right]\right|}{\left|\vec{u}_{\Delta'}\right|}=\frac{\sqrt{1^2+(-4)^2+5^2}}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}}=\sqrt{14}.$$

Vì mặt cầu cắt Δ' tại hai điểm A,B nên bán kính mặt cầu được xác định theo công thức $R^2=d^2(I,\Delta')+\left(\frac{AB}{2}\right)^2=14+36=50$

Vậy mặt cầu cần tìm có phương trình là: $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=50.$

3. Đường thẳng d' qua điểm $N(-4;-6;-19)$ và có $\vec{u}_{d'}(3;2;-2)$.

Vì tâm mặt cầu $I\in d$ nên $I(2+t;3+t;-1+2t)$.

Ta có $\overrightarrow{MI}(t;t;21+2t)$, $\overrightarrow{NI}(6+t;9+t;18+2t)$ nên

$$\left[\overrightarrow{NI},\vec{u}_{d'}\right]=(6t+54;-8t-66;t+15).$$

Vì mặt cầu qua điểm M và tiếp xúc với d' nên $MI=d(I,d')=R$.

Do đó $MI=\frac{\left|\left[\overrightarrow{NI},\vec{u}_{d'}\right]\right|}{\left|\vec{u}_{d'}\right|}$, hay

$$\sqrt{t^2+t^2+(21+t)^2}=\frac{\sqrt{(6t+54)^2+(-8t-66)^2+(t+15)^2}}{\sqrt{3^2+2^2+(-2)^2}}$$

$$\Leftrightarrow 17(3t^2+42t+441)=101t^2+1734t+7497\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=-\frac{102}{5}\end{array}\right..$$

Với $t=0$ thì $I(2;3;-1),R=21$ nên phương trình mặt cầu

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=441.$$

Với $t=-\dfrac{102}{5}$ thì $I\left(-\dfrac{92}{5};-\dfrac{87}{5};-\dfrac{209}{5}\right), R=\dfrac{\sqrt{20817}}{5}$ nên phương trình mặt cầu: $\left(x+\dfrac{92}{5}\right)^2+\left(y+\dfrac{87}{5}\right)^2+\left(z+\dfrac{209}{5}\right)^2=\dfrac{20817}{25}$.

Bài 5

1. Vì tâm $I\in\Delta$ nên $I(-2+t;\ 1+2t;\ -1-2t)$.

Mặt cầu tiếp xúc với hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) nên :

$$d(I,\ (\alpha_1))=d(I,\ (\alpha_2))=R$$

Suy ra $\dfrac{|3(-2+t)+2(1+2t)-1-t-6|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}=\dfrac{|2(-2+t)+3(1+2t)-1-t|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}$

$$\Leftrightarrow |6t-11|=|7t-2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}6t-11=7t-2\\ 6t-11=2-7t\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-9\\ t=1\end{array}\right.$$

- Nếu $t=1$ thì $I(-1;\ 3;\ -3), R=\dfrac{5}{\sqrt{14}}$ nên phương trình mặt cầu

$$(x+1)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=\frac{25}{14}.$$

- Nếu $t=-9$ thì $I(-11;\ -17;\ 17), R=\dfrac{65}{\sqrt{14}}$ nên phương trình mặt cầu

$$(x+11)^2+(y+17)^2+(z-17)^2=\frac{4225}{14}.$$

2. Đường thẳng Δ' qua điểm $M(2;\ -3;\ 0)$ và có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_{\Delta'}(-1;\ 1;\ 1)$.

Ta có $\overrightarrow{IM}(1;\ 6;\ 5)$ nên $\left[\overrightarrow{IM},\ \vec{u}_{\Delta}\right]=(1;\ -4;\ 5)$, do đó

$$d(I,\ \Delta')=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\ \vec{u}_{\Delta'}\right]\right|}{\left|\vec{u}_{\Delta'}\right|}=\frac{\sqrt{1^2+(-4)^2+5^2}}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}}=\sqrt{14}.$$

Vì mặt cầu cắt Δ' tại hai điểm A, B nên bán kính mặt cầu được xác định theo công thức : $R^2=d^2(I,\ \Delta')+\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2=14+36=50$

Vậy mặt cầu cần tìm có phương trình là: $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=50$.

3. Đường thẳng d' qua điểm $N(-2;-2;4)$ và có $\overrightarrow{u_{d'}}=(1;1;-4)$ là VTCP

Vì tâm mặt cầu $I\in d$ nên $I(2+t;\ -t;\ 3+2t)$

Ta có $\overrightarrow{MI}=(t+1;\ -t-1;2t-1)$, $\overrightarrow{NI}=(4+t;2-t;-1+2t)$ nên

$$\left[\overrightarrow{NI},\vec{u}_{d'}\right]=(2t-7;6t+15;2t+2).$$

Vì mặt cầu qua điểm M và tiếp xúc với d' nên $MI=d(I,d')=R$.

Do đó $MI=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{NI},\vec{u}_{d'}\right]\right|}{\left|\vec{u}_{d'}\right|}$, hay

$$\sqrt{(2t-1)^2+2(1+t)^2}=\frac{\sqrt{(2t-7)^2+(6t+15)^2+(2t+2)^2}}{\sqrt{1^2+1^2+4^2}}$$

$$\Leftrightarrow 18(6t^2+3)=44t^2+160t+278\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=\dfrac{7}{2}\end{array}\right.$$

- Với $t=-1$ thì $I(1;1;1), R=9$ nên phương trình mặt cầu

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$$

- Với $t=\dfrac{7}{2}$ thì $I\left(\dfrac{11}{2};-\dfrac{7}{2};10\right), R=\dfrac{3\sqrt{34}}{2}$ nên phương trình mặt cầu

$$\left(x-\frac{11}{2}\right)^2+\left(y+\frac{7}{2}\right)^2+(z-10)^2=\frac{153}{2}.$$

Bài 6 Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=5$.

Khoảng cách từ I đến (P) : $d(I,(P))=\dfrac{|2-4-3-4|}{3}=3<R$

Suy ra mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn.

Gọi H, r lần lượt là tâm và bán kính đường tròn đó, suy ra H là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P) nên tọa độ của H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 - t \\ 2x - 2y - z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow H(3;0;2).$$ Bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2} = 4$.

Bài 7 Mặt cầu (S) có tâm $I(1;\ 0;\ 2)$, bán kính $R = 3$.

1. Ta có $d(I;\ (P)) = \dfrac{|2+0+2+5|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = 3 = R$ nên mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu.

Tiếp điểm M là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P).

Gọi $M(x;\ y;\ z)$ thì $\overrightarrow{IM}(x-1;\ y;\ z-2)$ nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{IM} = t.\vec{n}_{(P)} \\ M \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-3}{1} \\ 2x + 2y + z + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{11}{9};\ -\frac{20}{9};\ \frac{17}{9}\right).$$

2. Giả sử (S) cắt đường thẳng Δ tại điểm N.

Vì $N \in \Delta$ nên $N(-3+2t;\ 1+t;\ t)$.

Vì $N \in (S)$ nên $(-4+2t)^2 + (1+t)^2 + (t-2)^2 = 9$, hay

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ hoặc } t = 2$$

Với $t = 1$ thì $N_1(-1;\ 2;\ 1)$ và với $t = 2$ thì $N_2(1;\ 3;\ 2)$.

Vậy mặt cầu (S) cắt đường thẳng Δ tại $N_1(-1;\ 2;\ 1)$ và $N_2(1;\ 3;\ 2)$.

Bài 8. (α_1): $6x - 3y - 2z - 35 = 0$, (α_1): $6x - 3y - 2z + 63 = 0$.

Vì hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) song song với nhau, nên tâm I

mặt cầu cần tìm thuộc mặt phẳng (α): $6x - 3y - 2z + 14 = 0$.

Bán kính mặt cầu cần tìm $R = \dfrac{1}{2}d((\alpha_1),\ (\alpha_2)) = 7$.

1. Tiếp điểm của mặt cầu với (α_1) là $A(5;\ -1;\ -1)$ nên tâm I thuộc đường thẳng d qua $A, d \perp (\alpha_1)$.

Phương trình $d: \begin{cases} x = 5 + 6t \\ y = -1 - 3t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$. Do đó tâm $I = d \cap (\alpha) = (-1;\ 2;\ 1)$.

Phương trình mặt cầu cần tìm $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 49$.

2. Gọi $I(a;\ b;\ c)$ là tâm mặt cầu. Ta có

$$\begin{cases} BI=7 \\ BI=CI \\ I\in(\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=49 \\ 2x+3y+z-2=0 \\ 6x-3y-2z+14=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{10+10x}{3}, z=12+8x \\ (x-1)^2+\left(\dfrac{-19-10x}{3}\right)^2+(14+8x)^2=49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{10+10x}{3}, z=12+8x \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-\dfrac{1693}{685} \end{array}\right. \end{cases}$$

Suy ra có hai mặt cầu thỏa mãn là

$$(S):(x+1)^2+y^2+(z-4)^2=49.$$

$$(S):\left(x+\frac{1693}{685}\right)^2+\left(y-\frac{672}{137}\right)^2+\left(z+\frac{5324}{685}\right)^2=49.$$

Bài 9.

1. Ta có $\vec{n}_{(P)}(1;-1;1)$ và $A\in\Delta_1, B\in\Delta_2$ nên

$$A(a;\ a;\ 2a),\ B(-1-2b;\ b;\ 1+b),\ \overrightarrow{AB}(-1-2b-a;\ b-a;\ 1+b-2a).$$

Vì $\Delta//(P)$ và $AB=\sqrt{2}$ nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{n}_{(P)}=0 \\ \left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1-2b-a-b+a+1+b-2a=0 \\ (1+2b+a)^2+(b-a)^2+(1+b-2a)^2=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ (1-a)^2+(-2a)^2+(1-3a)^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ 14a^2-8a=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=0;\ b=0 \\ a=\dfrac{4}{7};\ b=-\dfrac{4}{7} \end{array}\right.$$

Nếu $a=b=0$ thì $A(0;0;0)\in(P)$ nên $\Delta\subset(P)$ (không thỏa mãn).

Nếu $a=\frac{4}{7};\ b=-\frac{4}{7}$ thì $A\left(\frac{4}{7};\frac{4}{7};\frac{8}{7}\right)$, $\overrightarrow{AB}\left(-\frac{3}{7};-\frac{8}{7};-\frac{5}{7}\right)=-\frac{1}{7}(3;\ 8;\ 5)$

Nên đường thẳng cần tìm là $\Delta: \dfrac{x-\frac{4}{7}}{3}=\dfrac{y-\frac{4}{7}}{8}=\dfrac{z-\frac{8}{7}}{5}$.

2. Ta có $\begin{cases} \Delta\in(Q) \\ \Delta\perp d \end{cases}$ nên $\vec{u}_\Delta=\left[\vec{u}_d;\ \vec{n}_{(Q)}\right]=(2;-3;1)$. Như vậy ta cần tìm một điểm mà Δ đi qua.

Giao điểm M của d và (Q) có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{-1} \\ x+y+z+2=0 \end{cases} \Rightarrow M(1;\,-3;\,0).$

Gọi (R) là mặt phẳng chứa d và $(R)\perp(Q)$.

Một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (R) là

$$\vec{n}_{(R)}=\left[\vec{u}_d;\,\vec{n}_{(Q)}\right]=(2;-3;1).$$

Hình chiếu vuông góc của đường thẳng d lên mặt phẳng (Q) có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_{d'}=\left[\vec{n}_{(R)};\,\vec{n}_{(Q)}\right]=(-4;-1;5).$

Đường thẳng d' qua M nên có phương trình là $d':\begin{cases} x=1-4t \\ y=-3-t\;(t\in\mathbb{R}). \\ z=5t \end{cases}$

Rõ ràng $\Delta\perp(R)\Rightarrow\Delta\perp d'$, do đó gọi $N=\Delta\cap d'$ thì MN chính là khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ, hay $MN=\sqrt{42}.$

Tọa độ điểm $N(1-4t;\,-3-t;\,5t)$ nên

$$(1-4t-1)^2+(-3-t-3)^2+(5t-0)^2=42 \Leftrightarrow 42t^2=42 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \end{array}\right..$$

Với $t=1$ thì $N(-3;\,-4;\,5)$ nên phương trình đường thẳng Δ là

$$\Delta:\frac{x+3}{2}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z-5}{1}.$$

Với $t=-1$ thì $N(5;\,-2;-5)$ nên phương trình đường thẳng Δ là

$$\Delta:\frac{x-5}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z+5}{1}.$$

3. Mặt cầu (S) có tâm $I(2;\,3;\,1)$ và bán kính $R=3.$

Ta có điểm $C(0;\,5;\,0)$, thuộc mặt cầu (S) nên $\Delta\perp IC.$

Vì $\begin{cases} \Delta\perp IC \\ \Delta\perp d_1 \end{cases}$ nên một véc tơ chỉ phương của Δ là

$$\vec{u}_\Delta=\left[\overrightarrow{IC};\,\vec{u}_{d_1}\right]=(2;3;2).$$

Phương trình đường thẳng cần tìm là $\Delta:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z}{2}.$

Bài 10.

Điều kiện tồn tại mặt cầu $14 - m > 0$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;\ 2;\ -3)$ và bán kính $R = \sqrt{14 - m}$.

1. Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng là

$$d(I;\ (P)) = \frac{|-1 - 2.2 + 2.(-3) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 4$$

Vì mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng nên $R = 4 \Leftrightarrow m = -2$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = -2$.

2. Ta có $d(I;\ (Q)) = \dfrac{|-2 - 2 + 6 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 1$.

Vì đường tròn giao tuyến có diện tích là 4π nên có bán kính $r = 2$, do đó bán kính của mặt cầu là:

$R^2 = r^2 + d^2(I,\ (Q)) \Leftrightarrow R^2 = 5 \Leftrightarrow 14 - m = 5 \Leftrightarrow m = 9$.

Vậy giá trị cần tìm là: $m = 9$.

3. Gọi $H(-1 - t;\ 2t;\ 2 - t)$ là hình chiếu của $I(-1;\ 2;\ -3)$ trên Δ.

Ta có $\overrightarrow{IH}(-t;\ 2t - 2;\ 5 - t)$ và $\overrightarrow{u_\Delta}(-1;\ 2;\ -2)$ nên

$IH \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{IH}.\vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow t + 4t - 4 - 10 + 2t = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Vậy $\overrightarrow{IH}(-2;\ 2;\ 3) \Rightarrow IH = \sqrt{17}$.

Do tam giác IAB cân tại I nên vuông cân tại I, do đó tam giác IHA cũng vuông cân tại H, vì thế

$R = IA = \sqrt{2}.IH = \sqrt{34} \Rightarrow \sqrt{14 - m} = \sqrt{34} \Rightarrow m = -20$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = -20$.

Bài 11.

1. Ta có $\overrightarrow{n_1} = (2; -2; -1)$, $\overrightarrow{n_2} = (1; 2; -2)$ lần lượt là VTPT của (α) và (β)

Suy ra $\vec{u} = \dfrac{1}{3}\left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (2; 1; 2)$ là VTCP của đường thẳng d

Hơn nữa điểm $A(6; 4; 5)$ là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β) nên $A \in d$

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 3; 0)$, bán kính $R = \sqrt{13 - m}$ với $m < 13$.

$\overrightarrow{IA} = (8;1;5) \Rightarrow \left[\overrightarrow{IA}, \vec{u}\right] = (-3;-6;6) \Rightarrow d(I,d) = 3$

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow AH = \dfrac{AB}{2} = 4$ và $IH = 3$

Trong tam giác vuông IHA ta có: $IA^2 = IH^2 + AH^2 \Leftrightarrow R^2 = 9 + 16$

$\Leftrightarrow 13 - m = 25 \Leftrightarrow m = -12$.

Vậy $m = -12$ là giá trị cần tìm.

2. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;1)$, bán kính $R = 3$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua I, vuông góc với (P)

Suy ra phương trình $\Delta : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{1}$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu

$(S) \Leftrightarrow d(I,(P)) = R \Leftrightarrow \dfrac{\left|m^2 + 3m - 1\right|}{3} = 3$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 + 3m - 10 = 0 \\ m^2 + 3m + 8 = 0 \quad \text{VN} \end{array}\right. \Leftrightarrow m = -5, m = 2$.

Khi đó $(P): 2x + 2y + z - 10 = 0$. Tọa độ tiếp điểm A là nghiệm của hệ:

$\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{1} \\ 2x + 2y + z - 10 = 0 \end{cases}$, giải hệ này ta được $x = 3, y = 1, z = 2 \Rightarrow A(3;1;2)$.

3. Vì $A \in \Delta_1, B \in \Delta_2$ nên $A(-2+2a;\ -3+5a;\ 4-a), B(3-b;1;10+b)$.

Do đó $\overrightarrow{AB}(5-b-2a;\ 4-5a;\ 6+b+a)$.

Ta có $\begin{cases} AB \perp \Delta_1 \\ AB \perp \Delta_2 \end{cases}$ nên $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\vec{u}_{\Delta_1} = 0 \\ \overrightarrow{AB}.\vec{u}_{\Delta_2} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(5-b-2a) + 5(4-5a) - (6+b+a) = 0 \\ -5+b+2a+6+b+a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a + b = 8 \\ 3a + 2b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$

Vì thế $A(0;2;3)$, $B(5;1;8)$.
Gọi (α_1), (α_2) lần lượt là các mặt phẳng qua A, vuông góc với Δ_1 và mặt phẳng qua B, vuông góc với Δ_2. Rõ ràng AB là giao tuyến của hai mặt phẳng (α_1), (α_2).
Mặt cầu (S) tiếp xúc với Δ_1 tại A và tiếp xúc với Δ_2 tại B nên tâm I của mặt cầu thuộc mặt phẳng (α_1) và (α_2). Hay I nằm trên giao tuyến AB suy ra I là trung điểm của AB.

Ta có $I\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2};\frac{11}{2}\right), R=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{52}}{2}$ nên phương trình mặt cầu là:

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\left(z-\frac{11}{2}\right)^2=\frac{51}{4}.$$

Bài 12.

1. Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-3;-3)$, bán kính $R=\sqrt{5}$
$d(I,(\alpha))=1<R$ nên đường tròn (C) có bán kính $r=2$

Gọi H là tâm của (C), suy ra $IH:\begin{cases}x=2+t\\ y=-3-2t\\ z=-3+2t\end{cases}$

Tọa độ của H là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x=2+t\\ y=-3-2t\\ z=-3+2t\\ x-2y+2z+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{5}{3}\\ y=-\frac{7}{3}\\ z=-\frac{13}{3}\end{cases}\Rightarrow H\left(\frac{5}{3};-\frac{7}{3};-\frac{13}{3}\right)$$

2. Gọi d là đường thẳng đi qua H và vuông góc với

$$(\alpha)\Rightarrow d:\begin{cases}x=\frac{5}{3}+t\\ y=-\frac{7}{3}-2t\\ z=-\frac{13}{3}+2t\end{cases}$$

Gọi I', R' là tâm và bán kính của mặt cầu (S')

Vì $I' \in d, I' \in (P) \Rightarrow I': \begin{cases} x = \frac{5}{3} + t \\ y = -\frac{7}{3} - 2t \\ z = -\frac{13}{3} + 2t \\ x + y + z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow I'\left(\frac{11}{3}; -\frac{19}{3}; -\frac{1}{3}\right)$

Suy ra $d(I', (\alpha)) = \frac{50}{9} \Rightarrow R' = \sqrt{r^2 + d^2(I', (\alpha))} = \frac{2\sqrt{706}}{9}$

Vậy phương trình $(S'): \left(x - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{19}{3}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2824}{81}$.

Bài 13.

1. Ta có khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P_1), (P_2)$ bằng: 6

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng song song (P_1) và (P_2) nên bán kính mặt cầu (S) là: $R = 3$.

2. Gọi (R) là mặt phẳng song song với hai mặt phẳng (P_1), (P_2) và nằm ở giữa hai mặt phẳng đó, suy ra $(R): 2x - y + 2z + 2 = 0$

Gọi I là tâm của mặt cầu, suy ra $I \in (R)$. Hơn nữa $IA = 3$ nên I thuộc mặt cầu (S') tâm A bán kính bằng 3. Do đó I thuộc đường tròn (C) là giao của mặt cầu (S') và mặt phẳng (R). Từ đó ta tìm được tâm (C) là $H\left(-\frac{11}{9}; \frac{10}{9}; \frac{7}{9}\right)$, bán kính $r = \frac{4\sqrt{5}}{3}$.