HƯỚNG DẪN GIẢI.

Vấn đề 2. LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

Bài 1

1. Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-4;-4),\overrightarrow{AC}=(2;-3;-1)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-8;-5;-1)$

Vì (P) đi qua A,B,C nên (P) nhận $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-8;-5;-1)$ làm VTPT

Vậy phương trình (P) là: $-8(x-1)-5(y-2)-(z-3)=0$

Hay : $8x+5y+z-21=0$.

2. Gọi M là trung điểm AC, ta có: $M\left(2;\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$

Vì (P) là mặt phẳng trung trực đoạn AC nên (P) đi qua M và nhận $\overrightarrow{AC}=(2;-3;-1)$ làm VTPT.

Vậy phương trình (P) là: $2(x-2)-3\left(y-\frac{1}{2}\right)-1\left(z-\frac{5}{2}\right)=0$

Hay : $2x-3y-z=0$.

3. Ta có $\overrightarrow{MN}=(0;2;-1)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{MN}\right]=(-12;-3;-6)$

Vì (P) đi qua M,N và song song với AB nên (P) nhận $\vec{n}=-\frac{1}{3}\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{MN}\right]=(4;1;2)$ làm VTPT.

Vậy phương trình (P) là: $4x+y+2(z-1)=0\Leftrightarrow 4x+y+2z-2=0$.

4. Gọi A_1,A_2,A_3 lần lượt là hình chiếu của A lên các trục Ox,Oy,Oz

Ta có $A_1(1;0;0)$, $A_2(0;2;0)$, $A_3(0;0;3)$ nên phương trình (P) là:

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1\Leftrightarrow 6x+3y+2z-6=0.$$

Bài 2 Xét hai điểm B,C thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (α), (β).

Khi đó tọa độ các điểm B,C thỏa mãn hệ $\begin{cases}x-y+z-4=0\\3x-y+z-1=0\end{cases}$.

Chọn $y=0$ thì $x=-\frac{3}{2},z=\frac{11}{2}\Rightarrow B\left(-\frac{3}{2};0;\frac{11}{2}\right)$.

Chọn $z=0$ thì $x=-\frac{3}{2}, y=-\frac{11}{2} \Rightarrow C\left(-\frac{3}{2};-\frac{11}{2};0\right)$.

Mặt phẳng (P) qua giao tuyến của (α), (β) khi và chỉ khi (P) qua hai điểm B,C.

Chú ý: Nếu chọn giá trị của x (hoặc y,z) mà hệ vô nghiệm thì hai mặt phẳng không cùng đi qua điểm có hoành độ (hoặc tung độ, cao độ) đó. Chẳng hạn, trong bài này, không thể chọn $x\neq-\frac{3}{2}$ vì nếu trừ vế với vế hai phương trình trên, ta luôn có $x=-\frac{3}{2}$.

1. Mặt phẳng (P) là mặt phẳng qua ba điểm A,B,C. Ta có

$\overrightarrow{AB}\left(-\frac{5}{2};-8;-\frac{7}{2}\right)$, $\overrightarrow{BC}\left(0;-\frac{11}{2};-\frac{11}{2}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=-\frac{11}{4}(23;-5;5)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là

$$23(x-1)-5(y-8)+5(z-2)=0 \Leftrightarrow 23x-5y+5z+7=0.$$

2. Mặt phẳng (P) vuông góc với (Q) nên $\vec{n}_{(P)}\perp\vec{n}_{(Q)}$, $\vec{n}_{(P)}\perp\overrightarrow{BC}$ do đó ta có véc tơ pháp tuyến của nó là $\vec{n}_{(P)}=\left[\vec{n}_{(Q)},\overrightarrow{BC}\right]=-\frac{11}{2}(7;\,-1;\,1)$.

Mặt phẳng (P) cần tìm là $7x-y+z+5=0$.

3. Giả sử véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)}(A;B;C)$. Vì (P) qua B,C nên $\vec{n}_{(P)}.\overrightarrow{BC}=0 \Leftrightarrow C=-B$. Vậy $\vec{n}_{(P)}(A;B;-B)$.

Ta có $\frac{1}{\sqrt{33}}=\cos\varphi=\frac{|A.1+B.2+(-B).(-2)|}{\sqrt{A^2+B^2+(-B)^2}.3}$, do đó

$$3(A^2+2B^2)=11(A+4B)^2 \Leftrightarrow 4A^2+44AB+85B^2=0$$

$$\Leftrightarrow (2A+5B)(2A+17B)=0 \Rightarrow A=-\frac{5}{2}B,\ A=-\frac{17}{2}B.$$

Nếu $A=-\frac{5}{2}B$ thì chọn $B=-2\Rightarrow A=5, C=2$ nên

$$(P):\ 10x-4y+4z-7=0.$$

Nếu $A=-\frac{17}{2}B$ thì chọn $B=-2\Rightarrow A=17, C=2$ nên

$$(P):\ 34x-4y+4z+29=0.$$

Bài 3

1. Ta có $\vec{n}=(1;-2;3)$ là VTPT của (P)

Vì $(\alpha)//(P)$ nên $\vec{n}=(1;-2;3)$ cũng là VTPT của (α).

Vậy phương trình (α) là: $x-2y+3z+1=0$.

2. Ta có $\vec{a}=(1;1;1)$ là VTPT của (β), $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;-4)$.

Suy ra $\left[\vec{a},\overrightarrow{AB}\right]=(-1;1;0)$

Vì (α) đi qua A,B và $(\alpha)\perp(\beta)$ nên (α) nhận $\vec{n}=\left[\vec{a},\overrightarrow{AB}\right]=(-1;1;0)$ làm VTPT

Vậy phương trình (α) là: $x-y-1=0$.

3. Vì (α) chứa trục Ox và vuông góc với (Q) nên (α) nhận $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{i}\right]$ làm VTPT

Trong đó $\vec{i}=(1;0;0)$, $\vec{a}=(2;3;-1)$ là VTPT của (Q) nên $\vec{n}=(0;1;3)$

Vậy phương trình (α) là: $y+3z=0$.

4. Cách 1: Ta có $\overrightarrow{AB}(16;6;-5),\overrightarrow{AC}(10;0;-2)$ nên

$$\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right]=(-12;-18;-60)=-6(2;\ 3;\ 10)$$

Do đó (α) là mặt phẳng đi qua $A(2;8;5)$ và có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}(2;3;10)$ nên có phương trình

$$2(x-2)+3(y-8)+10(z-5)=0\Leftrightarrow 2x+3y+10z-78=0.$$

Vậy (α): $2x+3y+10z-78=0$.

Cách 2: Gọi mặt phẳng (α) cần tìm có phương trình là

$$Ax+By+Cz+D=0,\ A^2+B^2+C^2>0.$$

Mặt phẳng (α) qua ba điểm $A(2;8;5),B(18;14;0),C(12;8;3)$ nên

$$\begin{cases}2A+8B+5C+D=0\\18A+14B+D=0\\12A+8B+3C+D=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}18A+14B+D=0\\16A+6B-5C=0\\6A+6B-3C=0\end{cases}$$

Từ đó ta tính được $C=5A,2B=3A,D=-39A$.

Do $A^2+B^2+C^2>0$ nên chọn $A=2$ thì $B=3;C=10,D=-78$, hay phương trình mặt phẳng cần tìm là (α): $2x+3y+10z-78=0$.

5. Gọi I là trung điểm của EF, ta có $I(3;\ 5;\ 4),\overrightarrow{EF}(-4;\ 6;\ -6)$.

Mặt phẳng trung trực của EF là mặt phẳng đi qua I và có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{EF}(-4;\ 6;\ -6)$, phương trình của (α)

$$-4(x-3)+6(y-5)-6(z-4)=0\Leftrightarrow 2x-3y+3z-3=0.$$

Vậy (α): $2x-3y+3z-3=0$.

6. Phương trình mặt phẳng (Oyz) là $x=0\Rightarrow \vec{n}_{(Oyz)}(1;0;0)$.

Mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (Oyz) nên cũng có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(Oyz)}(1;0;0)$, nên phương trình của mặt phẳng (α) là

$$1.(x-2)+0.(y-3)+0.(z-5)=0\Leftrightarrow x-2=0.$$

Vậy (α): $x-2=0$.

7. Ta có $\vec{n}_{(\beta)}(1;2;-5),\vec{n}_{(\gamma)}(2;-3;-1)$.

Mặt phẳng (α) vuông góc với hai mặt phẳng $(\beta),(\gamma)$ nên

$$\vec{n}_{(\alpha)}=\left[\vec{n}_{(\beta)},\vec{n}_{(\gamma)}\right]=(-17;-9;-7).$$

Phương trình mặt phẳng (α) cần tìm là

$$-17(x-1)-9(y+3)-7(z-2)=0\Leftrightarrow 17x+9y+7z-4=0.$$

Vậy (α): $17x+9y+7z-4=0$.

8. Hình chiếu của điểm $H(-2;1;5)$ lên các trục Ox,Oy,Oz lần lượt là $M(-2;0;0),N(0;1;0),P(0;0;5)$. Phương trình mặt phẳng (MNP) là

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{5}=1\Leftrightarrow 5x-10y-2z+10=0.$$

Vậy (α): $5x-10y-2z+10=0$.

Bài 4 .

1. Ta có $\overrightarrow{n_Q}=(1;1;3)$ là một VTPT của (Q). Vì $(P)//(Q)$ nên (P) có một VTPT

$\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{n_Q}=(1;1;3)$. Vậy (P) có phương trình là :

$$1(x-1)+1(y-2)+3(z-1)=0\Leftrightarrow x+y+3z-6=0.$$

2. Vì (P) đi qua M,N,E nên $\vec{n}=[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{NP}]=(-1;-2;0)$ là một VTPT của (P).

Vậy phương trình của (P) : $x+2y=0$.

3. Gọi I là trung điểm của $MN\Rightarrow I(0;1;\frac{3}{2})$. Vì (P) là mp trung trực của đoạn MN nên (P) đi qua I và nhận $\overrightarrow{MN}=(0;0;-1)$ làm VTPT.

Vậy phương trình (P) : $2z-3=0$.

4. Tọa độ hình chiếu của A lên các trục tọa độ là

$A_1(1;0;0),A_2(0;2;0),A_3(0;0;3)$.

Áp dụng phương trình đoạn chắn ta có phương trình của mp(P) là:

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1 \Leftrightarrow 6x+3y+2z-6=0.$$

5. Vì (P) đi qua B,C và vuông góc với (R) ((R) có $\overrightarrow{n_R}=(1;1;1)$ là một VTPT)

Nên (P) nhận $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{n_R}\right]=(0;1;-1)$ làm VTPT.

Vậy phương trình $(P): y-z-2=0$.

6. Ta có $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;0;0)$, $\overrightarrow{n_\beta}=(0;1;-1)$ lần lượt là VTPT của $(\alpha),(\beta)$.

Vì (P) vuông góc với hai (α) và (β) nên $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta}\right]=(0;1;1)$ là VTPT của (P)

Vậy phương trình $(P): y+z-5=0$.

Bài 5

1. Giả sử (α) cắt trục Oz tại điểm $M(0;0;t)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-2;2;1)$, $\overrightarrow{AM}(-3;0;t)$ nên $\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AM}\right]=(2t;2t-3;6)$.

Vì thế $S_{ABM}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AM}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(2t)^2+(2t-3)^2+6^2}=\frac{1}{2}\sqrt{8t^2-12t+45}$.

Theo bài ra $S_{ABM}=\frac{9}{2}$, nên $\sqrt{8t^2-12t+45}=9 \Leftrightarrow 8t^2-12t-36=0$, hay $t=3;\ t=-\frac{3}{2}$.

- Với $t=3$ thì $\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AM}\right]=(6;3;6)$ nên phương trình $(\alpha): 2x+y+2z-6=0$.
- Với $t=-\frac{3}{2}$ thì $\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AM}\right]=(-3;-6;6)$ nên phương trình $(\alpha): x+2y-2z-3=0$.

2. Giả sử (α) cắt trục Oy tại điểm $N(0;t;0)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-2;2;1)$, $\overrightarrow{AC}(-1;-1;2)$, $\overrightarrow{AN}(-3;t;0)$ nên

$$\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right]=(5;3;4) \Rightarrow V_{ABCN}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AN}\right|=\frac{1}{2}\left|t-5\right|.$$

Vì thế $\frac{1}{2}\left|t-5\right|=12 \Leftrightarrow \left|t-5\right|=24 \Rightarrow t=29;\ t=-19.$

• Nếu $t = 29 \Rightarrow -\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AN}\right] = (29; 3; 16)$ nên phương trình $(\alpha): 29x + 3y + 16z - 87 = 0$

• Nếu $t = -19 \Rightarrow \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AN}\right] = (19; -3; 8)$ nên phương trình $(\alpha): 19x - 3y + 8z - 57 = 0.$

3. Phương trình mặt phẳng $(OBC):\ x - y = 0$ và phương trình mặt phẳng $(ABC):\ 5x + 3y + 4z - 15 = 0.$

Vì (α) đi qua B, C và tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$ nên (α) cắt cạnh OA và $M \in (\alpha)$ thì $d(M, (OBC)) = d(M, (ABC)).$

Gọi $M(x; y; z)$ thì từ điều kiện $d(M, (OBC)) = d(M, (ABC))$ suy ra hai mặt phẳng chứa M thỏa mãn là $x + 3y - 5 = 0, 10x + 3y - z - 15 = 0.$

Mặt phẳng $10x + 3y - z - 15 = 0$ cắt OA tại điểm $N\left(\frac{3}{2}; 0; 0\right)$ nằm trong đoạn thẳng OA nên mặt phẳng cần tìm là $(\alpha):\ 10x + 3y - z - 15 = 0.$

Bài 6

1. Vì mặt phẳng (α) chứa Ox nên phương trình (α) có dạng: $ay + bz = 0$ với $a^2 + b^2 \neq 0$.

Do $A \in (\alpha)$ nên: $2a + 3b = 0$, chọn $b = -2 \Rightarrow a = 3$.

Vậy phương trình của $(\alpha): 3y - 2z = 0$.

2. Cách 1: Vì (α) cách đều C, D nên ta có hai trường hợp:

TH1: $CD // (\alpha)$, khi đó $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right] = \vec{n}$ là VTPT của (α)

Mà $\overrightarrow{AB} = (-3; 1; -4)$, $\overrightarrow{CD} = (-4; -4; 4) \Rightarrow \vec{n} = (-12; 28; 16)$

Trường hợp này ta có phương trình của (α) là: $3x - 7y - 4z + 23 = 0$

TH 2: $CD \cap (\alpha) = \{I\}$, khi đó ta có được I là trung điểm của CD, suy ra $I(-2; -1; 3)$

Mặt phẳng (α) đi qua A, B, I.

Ta có $\overrightarrow{AI} = (-3; -3; 0), \overrightarrow{BI} = (0; -4; 4) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{BI}\right] = (-12; 12; 12)$

Trường hợp này ta có phương trình của (α) là: $x - y - z + 4 = 0$.

Cách 2: Vì (α) đi qua A nên phương trình của (α) có dạng:

$$a(x-1) + b(y-2) + c(z-3) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz - a - 2b - 3c = 0 \quad (*)$$

Do $B \in (\alpha)$ nên $-3a + b - 4c = 0 \Rightarrow b = 3a + 4c$ (1)

Mặt khác: $d\left(C,(\alpha)\right) = d\left(D,(\alpha)\right)$ nên ta có: $\dfrac{|-a-b-2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \dfrac{|-5a-5b+2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+2c = 5a+5b-2c \\ a+b+2c = -5a-5b+2c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4a+3c=0 \\ a+c=0 \end{array}\right.$

- $4a+3c=0$ ta chọn $c=-4 \Rightarrow a=3, b=-7$, suy ra phương trình (α) là: $3x-7y-4z+23=0$.
- $a+c=0$ ta chọn $c=-1 \Rightarrow a=1, b=-1$, suy ra phương trình của (α) là: $x-y-z+4=0$.

Bài 7

1. Vì (α) đi qua A nên phương trình của (α) có dạng:

$$a(x+1)+b(y-1)+c(z-1)=0 \quad (1)$$

Do $B \in (\alpha)$ nên ta có: $4a-b+c=0 \Rightarrow b=4a+c$

Mặt khác $d\left(C,(\alpha)\right)=2 \Leftrightarrow \dfrac{|2a-b-3c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{|2a+4c|}{\sqrt{a^2+(4a+c)^2+c^2}} = 2$

$\Leftrightarrow (a+2c)^2 = 17a^2+8ac+2c^2 \Leftrightarrow 8a^2+2ac-c^2=0 \Leftrightarrow c=-2a, c=4a$

- $c=-2a$ ta chọn $a=1 \Rightarrow c=-2, b=2$ nên phương trình $(\alpha): x+2y-2z+1=0$
- $c=4a$ ta chọn $a=1 \Rightarrow c=4, b=8$ nên phương trình $(\alpha): x+8y+4z-11=0$.

2. Ta có $M(x;y;z)$ là một điểm bất kì thuộc (α) khi và chỉ khi

$d\left(M,(P)\right) = d\left(M,(Q)\right) \Leftrightarrow \dfrac{|2x+y+2z-1|}{3} = \dfrac{|x-2y+2z-4|}{3}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+y+2z-1 = x-2y+2z-4 \\ 2x+y+2z-1 = -x+2y-2z+4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3y+3=0 \\ 3x-y+4z-5=0 \end{array}\right.$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán:

$$(\alpha_1): x+3y+3=0 \text{ và } (\alpha_2): 3x-y+4z-5=0.$$

3. Gọi E, F là hai điểm nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

Khi đó tọa độ của E, F là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 2x+y+2z-1=0 \\ x-2y+2z-4=0 \end{cases}$ (*)

Cho $x=0$, từ (*) ta có $y=-1, z=1 \Rightarrow E\left(0;-1;1\right)$

Cho $x = 6$, từ (*) ta có $y = -3, z = -4 \Rightarrow F\left(6;-3;-4\right)$

Suy ra $\overrightarrow{EF} = \left(6;-2;-5\right)$.

Vì (α) đi qua E, F và vuông góc với (β) nên (α) nhận $\vec{n} = \left[\overrightarrow{EF}, \vec{a}\right]$ làm

VTPT

Trong đó $\vec{a} = \left(3;2;-1\right)$ là VTPT của (β) nên $\vec{n} = \left(12;-9;18\right)$

Vậy phương trình của (α) : $4x - 3y + 6z - 9 = 0$.

Bài 8

1. Vì $(P)//(Q) \Rightarrow (P): 2x - 3y - 6z + D = 0$.

Mà $d(O,(P)) = 5 \Rightarrow \dfrac{|D|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = 5 \Leftrightarrow D = \pm 35$.

Vậy phương trình $(P): 2x - 3y - 6z \pm 35 = 0$.

2. Giả sử $(P): ax + by + cz + d = 0$.

Ta có $A(2;-1;0), B(5;1;1)$ là điểm chung của (α) và (β)

Vì (P) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) nên $A, B \in (P)$ nên ta có:

$$\begin{cases} 2a - b + d = 0 \\ 5a + b + c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a + d \\ c = -7a - 2d \end{cases}$$

Mặt khác: $d\left(M,(P)\right) = \dfrac{7}{6\sqrt{3}} \Rightarrow \dfrac{\left|\dfrac{1}{2}c + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \dfrac{7}{6\sqrt{3}}$

$$\Leftrightarrow \left|c + 2d\right| = \frac{7}{3\sqrt{3}}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Leftrightarrow 27(c + 2d)^2 = 49(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow 27.49a^2 = 49\left[a^2 + (2a + d)^2 + (7a + 2d)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow 27a^2 + 32ad + 5d^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -d \\ a = -\dfrac{5}{27}d \end{array}\right..$$

- $d = -a \Rightarrow b = a; c = -5a$

Suy ra phương trình $(P): ax + ay - 5az - a = 0 \Leftrightarrow x + y - 5z - 1 = 0$.

- $d = -\dfrac{27}{5}a \Rightarrow b = -\dfrac{17}{5}a; c = -\dfrac{36}{5}a$. Suy ra phương trình

$(P): 5x - 17y - 36z - 27 = 0$.

Bài 9

1. Mặt phẳng (α) qua $A(1;0;2)$ nên có phương trình dạng:

$$A(x-1)+By+C(z-2)=0,\ A^2+B^2+C^2>0.$$

Vì (α) qua $B(2;-3;3)$ nên $A-3B+C=0 \Leftrightarrow A=3B-C.$

Véc tơ pháp tuyến của (α) là $\overrightarrow{n_\alpha}=(3B-C,B,C)$, của (β) là $\overrightarrow{n_\beta}=(4,1,1)$, nên

$$\cos 60^0=\cos(\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta})=\frac{|4(3B-C)+B+C|}{\sqrt{(3B-C)^2+B^2+C^2}.\sqrt{18}}.$$

Suy ra $\dfrac{1}{2}=\dfrac{|4(3B-C)+B+C|}{6\sqrt{5B^2-3BC+C^2}} \Leftrightarrow 9\left(5B^2-3BC+C^2\right)=(13B-3C)^2$

$\Leftrightarrow 124B^2-51BC=0 \Leftrightarrow B=0;\ B=\dfrac{51}{124}C.$

- Nếu $B=0$ thì chọn $C=-1 \Rightarrow A=1$ nên $(ga): x-z+1=0$.
- Nếu $B=\dfrac{51}{124}C$ thì chọn $C=124 \Rightarrow A=29$ nên mặt phẳng cần tìm là :

$$(\alpha): 29x+51y+124z-277=0.$$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn là:
$(\alpha): 29x+51y+124z-277=0;\ (\alpha):\ x-z+1=0.$

2. Mặt phẳng (α) qua $C(2;-3;5)$ nên có phương trình dạng

$$A(x-2)+B(y+3)+C(z-5)=0,\ A^2+B^2+C^2>0.$$

Vì $(\alpha)\perp(P)$ nên $A-5B-C=0 \Leftrightarrow A=5B+C$ (1).

Vì góc giữa (α) và (Q) là 45^0 nên $\dfrac{|2A+2B+C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.3}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (2).

Thế (1) vào (2) ta có $\dfrac{|4B+C|}{\sqrt{(5B+C)^2+B^2+C^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, hay

$$2(4B+C)^2=(5B+C)^2+B^2+C^2 \Leftrightarrow B^2+BC=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}B=0\\ B=-C\end{array}\right.$$

Nếu $B=0$ thì có phương trình $(\alpha): x+z-7=0.$

Nếu $B=-C$ thì có phương trình $(\alpha): 4x+y-z=0.$

Bài 10 $(P): 2x+y-2z-3=0$ và $A(1;2;-1),\ B(0;1;2), C(-1;-1;0).$

1. $M \in Ox \Rightarrow M(x;0;0)$, $d(M,(P)) = \dfrac{|2x-3|}{3} = 3.$

Các điểm cần tìm $M(6;0;0)$ hoặc $M(-3;0;0)$.

2. $N \in Oy \Rightarrow N(0;y;0)$. Vì $d(N,(P)) = NA$ nên

$$\frac{|y-3|}{3} = \sqrt{1^2+(2-y)^2+(-1)^2} \Leftrightarrow 8y^2-30y+45=0.$$

Không tồn tại điểm N thỏa mãn.

3. Gọi $K(x;y;z)$ ta có hệ $\begin{cases} K \in (P) \\ KB = KC \\ KA = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-2z-3=0 \\ 2x+4y+4z=3 \\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$

Giải hệ ta tìm được $K\left(-\dfrac{1}{2};2;-1\right)$, $K\left(\dfrac{5}{6};\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$.

4. Từ $HA = HB = HC$ với $H(x;y;z)$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x+y-2z-3=0 \\ 2x+4y+4z=3 \\ 2x+2y-6z=1 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{13}{6};-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right).$$

Bài 11

1. Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x+y-3z+1=0 \\ 2x+3y+z-1=0 \end{cases}$

* Cho $z=1 \Rightarrow x=6, y=-4 \Rightarrow A(6;-4;1) \in (Q)\cap(R)$.

* Cho $z=0 \Rightarrow x=-4, y=3 \Rightarrow B(-4;3;0) \in (Q)\cap(R)$.

Ba mặt phẳng đã cho cùng đi qua một đường thẳng $\Leftrightarrow A, B \in (P)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -4m+n=-4 \\ 3m=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=4 \end{cases}$ là giá trị cần tìm.

Ta có: $\vec{n} = (1;2;4)$ là VTPT của (P)

Vì (α) đi qua A nên phương trình của (α) có dạng:

$$a(x-6)+b(y+4)+c(z-1)=0$$

Do $B \in (\alpha)$ nên ta có: $c=-10a+7b$. Suy ra $\vec{v} = (a;b;-10a+7b)$ là VTPT của (α)

Nên theo giả thiết ta có: $\cos\varphi = \frac{\left|\vec{n}.\vec{v}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{v}\right|} = \frac{\left|-39a+30b\right|}{\sqrt{21}.\sqrt{a^2+b^2+(7b-10a)^2}}$

Suy ra $\cos\varphi = \frac{23}{\sqrt{679}} \Leftrightarrow \frac{\left|-39a+30b\right|}{\sqrt{21}.\sqrt{a^2+b^2+(7b-10a)^2}} = \frac{23}{\sqrt{679}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{97}\left|39a-30b\right| = 23\sqrt{3\left(101a^2+50b^2-140ab\right)}$

$\Leftrightarrow 3.97\left(13a-10b\right)^2 = 23^2\left(101a^2-140ab+50b^2\right)$

$\Leftrightarrow 85a^2+32ab-53b^2=0 \Leftrightarrow a=-b, a=\frac{53}{85}b$

- $a=-b$ ta chọn $b=-1 \Rightarrow a=1, c=-17$. Phương trình $(\alpha): x-y-17z+7=0$
- $a=\frac{53}{85}b$ ta chọn $b=85 \Rightarrow a=53, c=65$. Phương trình $(\alpha): 53x+85y+65z-43=0$.

2. a) Ta có: $\overrightarrow{n_{\alpha_1}}=(1;1;1)$, $\overrightarrow{n_{\alpha_1}}=(2;3;4)$, $\overrightarrow{n_{\alpha_3}}=(1;-2;2)$ lần lượt là VTPT của ba mặt phẳng $(\alpha_1),(\alpha_2),(\alpha_3)$. Vì $\frac{1}{2}\neq\frac{1}{3}\neq\frac{1}{4} \Rightarrow (\alpha_1)$ và (α_2) cắt nhau.

Tương tự ta cũng chứng minh được hai mặt phẳng (α_1) và (α_3) cắt nhau.

b) Xét hệ phương trình : $\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x+3y+4z-1=0 \end{cases}$ (1)

- Cho $z=0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ 2x+3y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=-5 \end{cases} \Rightarrow B(8;-5;0)\in(\alpha_1)\cap(\alpha_2)$
- Cho $z=1 \Rightarrow x=9; y=-7 \Rightarrow C(9;-7;1)\in(\alpha_1)\cap(\alpha_2)$

Vì (P) đi qua A và giao tuyến của hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) nên $(P)\equiv(ABC)$.

Từ đó ta lập được phương trình của $(P): 7x+8y+9z-16=0$.

c) Vì (Q) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) nên (Q) đi qua hai điểm B, C.

Mặt khác: $(Q)\perp(\alpha_3)$ nên $\vec{n}=\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{n_{\alpha_3}}\right]=\left(-2;-1;0\right)$ là VTPT của (Q).

Vậy phương trình $(Q): 2x+y-11=0$.

3.

a)

Hai mặt phẳng (P) và (Q) trùng nhau khi và chỉ khi

$$\frac{4-a}{2}=\frac{-a-5}{3}=\frac{a}{b}=\frac{a}{5}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{4-a}{2}=\frac{-a-5}{3}\\ \frac{-a-5}{3}=\frac{a}{b}=\frac{a}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=22\\ -9=\frac{22}{b}=\frac{22}{5}\end{cases}$$

Vậy không tồn tại a,b để hai mặt phẳng trùng nhau.

Hai mặt phẳng (P) và (Q) song song khi $\frac{4-a}{2}=\frac{-a-5}{3}=\frac{a}{b}\neq\frac{a}{5}$, giải ra ta có

$$a=22,b=-\frac{22}{9}.$$

Hai mặt phẳng cắt nhau khi chúng không song song, không trùng nhau nên (P) và (Q) cắt nhau với mọi giá trị a,b trừ $a=22,b=-\frac{22}{9}$.

b)

Nếu $a=0$ thì $c=0$ nên thay vào thấy không thỏa mãn.

Nếu $c=0$ hoặc $c-a=0$ thì $a=0$ và cũng không thỏa mãn.

Xét $a\neq0,c\neq0,a\neq c$ thì hai mặt phẳng (P) và (Q) song song khi và chỉ khi $\frac{4-a}{3}=\frac{-a-5}{c}=\frac{a}{a(c-a)}\neq\frac{a}{c}$.

Do đó: $\frac{4-a}{3}=\frac{-a-5}{c}=\frac{1}{c-a}\Rightarrow\frac{4-a}{3}=\frac{-a-5-1}{c-c+a}\Rightarrow\frac{4-a}{3}=\frac{-a-6}{a}$

Hay $a^2-7a-18=0\Rightarrow a=9;a=-2.$

Với $a=9$ thì $c=\frac{42}{5}$ và với $a=-2$ thì $c=-\frac{3}{2}$.

Vậy các cặp số cần tìm là $(a;c)=\left(9;\frac{42}{5}\right),\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$.

c) Mặt phẳng (P) qua điểm $A(1;3;2)$ nên

$$4-a-3(a+5)+2a+a=0\Leftrightarrow a=-11.$$

Vì (P) vuông góc với (R) nên $3(4-a)-(a+5).c+a.a(c-a)=0$, hay

$$45+6c+121(c+11)=0\Leftrightarrow c=-\frac{1376}{127}.$$

Vậy giá trị cần tìm của a,c là $(a;c)=\left(-11;-\frac{1376}{127}\right)$.

Bài 12 Ta kí hiệu $\overrightarrow{n_{(\alpha)}}$ để chỉ VTPT của mặt phẳng (α).

1. Ta có $\overrightarrow{AB}(-1;-5;3), \vec{n}_{(P)}(2;-1;-1)$ nên $\left[\overrightarrow{AB}, \vec{n}_{(P)}\right] = (8;5;11)$.

Mặt phẳng (α) qua A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) nên

$$\overrightarrow{n_{(\alpha)}} \perp \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_{(\alpha)}} \perp \overrightarrow{n_{(P)}} \Rightarrow \overrightarrow{n_{(\alpha)}} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_{(P)}}\right] = (8;5;11).$$

Phương trình mặt phẳng (α) cần tìm: $8x+5y+11z-7=0$.

2. Gọi $M(x;y;z)$ là một điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng (α).

Ta có $d(M,(\beta)) = d(M,(\gamma)) \Leftrightarrow \dfrac{|x+2y-2z+2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = \dfrac{|2x+2y+z+3|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}$

$$\Leftrightarrow |x+2y-2z+2| = |2x+2y+z+3| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2y-2z+2 = 2x+2y+z+3 \\ x+2y-2z+2 = -2x-2y-z-3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3z+1=0 \\ 3x+4y-z+5=0 \end{array}\right..$$

Vậy có hai mặt phẳng (α) cần tìm là

$$(\alpha):\ x+3z+1=0 \text{ hoặc } (\alpha):\ 3x+4y-z+5=0.$$

3. Mặt phẳng (α) đi qua điểm $C(-1;0;2)$ nên có phương trình dạng

$$a(x+1)+by+c(z-2)=0,\ a^2+b^2+c^2>0.$$

Vì (α) qua $D(1;-2;3)$ nên $2a-2b+c=0 \Rightarrow c=2b-2a$ (1).

Ta có $d(O,(\alpha))=2$ nên $\dfrac{|a-2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=2$ (2).

Thế (1) vào (2) rồi bình phương, rút gọn ta thu được

$$5a^2-8ab-4b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2b \\ a=-\dfrac{2}{5}b \end{array}\right.$$

Do $a^2+b^2+c^2>0$ nên

- Với $a=2b$ thì chọn $b=1 \Rightarrow a=2, c=-2$, do đó phương trình (α) : $2x+y-2z+6=0$.
- Với $a=-\dfrac{2}{5}b$ thì chọn $b=-5 \Rightarrow a=2, c=-14$, do đó phương trình mặt phẳng (α) là $2x-5y-14z+30=0$.

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn $2x+y-2z+6=0$, $2x-5y-14z+30=0$.

4. Mặt phẳng (α) qua $E(0;\ 1;\ 1)$ có phương trình dạng:

$$Ax+B(y-1)+C(z-1)=0,\ A^2+B^2+C^2>0.$$

Theo bài ra $d(A,(\alpha))=2; d(B,(\alpha))=\dfrac{11}{7}$ nên

$$\begin{cases}\dfrac{|A+B-2C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=2\\ \dfrac{|-4B+C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{11}{7}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|A+B-2C|=2\sqrt{A^2+B^2+C^2} & (1)\\ 11|A+B-2C|=14|-4B+C| & (2)\end{cases}$$

Từ (2) ta có $\left[\begin{array}{l}11(A+B-2C)=14(-4B+C)\\ 11(A+B-2C)=14(4B-C)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A=\dfrac{-67B+36C}{11}\\ A=\dfrac{45B+8C}{11}\end{array}\right.$

- Với $A=\dfrac{-67B+36C}{11}$, thay vào (1) ta có phương trình

$$\left(\frac{-56B+14C}{11}\right)^2=4\left[\left(\frac{-67B+36C}{11}\right)^2+B^2+C^2\right]\Leftrightarrow 3826B^2-4432BC+1368C^2=0\quad(3)$$

Phương trình (3) chỉ có nghiệm $B=C=0$, khi đó $A=0$ (không thỏa mãn điều kiện $A^2+B^2+C^2>0$)

- Với $A=\dfrac{45B+8C}{11}$, thay vào (1) ta có phương trình

$$\left(\frac{56B-14C}{11}\right)^2=4\left[\left(\frac{45B+8C}{11}\right)^2+B^2+C^2\right]\Leftrightarrow 1362B^2+1112BC+136C^2=0$$

$$\Leftrightarrow B=-\frac{2}{3}C, B=-\frac{34}{227}C.$$

- Với $B=-\dfrac{2}{3}C$ thì chọn $C=-3\Rightarrow B=2, A=6$ phương trình

$(\alpha): 6x+2y-3z+1=0.$

- Với $B=-\dfrac{34}{227}C$ thì chọn $C=227\Rightarrow B=-34, A=26$ phương trình (α)

là

$$26x-34y+227z-193=0.$$

Vậy có hai mặt phẳng cần tìm là:

$6x+2y-3z+1=0,\ \ 26x-34y+227z-193=0.$

5. (α) qua $A(1;2;3)$ nên có phương trình dạng

$$A(x-1)+B(y-2)+C(z-3)=0,\ A^2+B^2+C^2>0.$$

(α) qua $B(5;-2;3)$ nên $B=A$.

Vì $((\alpha),(\beta))=45^0$ nên $|5A-C|=3\sqrt{2A^2+C^2}$, suy ra

$$7A^2-10AC-8C^2=0\Rightarrow A=2C,\ A=-\frac{4}{7}C.$$

Từ đó tìm được hai mặt phẳng thỏa mãn

$$(\alpha):\ 2x+2y+z-9=0,\ (\alpha):\ 4x+4y-7z+9=0.$$

6. (α) qua $C(1;\,-1;\,1)$ nên có phương trình dạng

$$A(x-1)+B(y+1)+C(z-1)=0,\ A^2+B^2+C^2>0.$$

Vì $((\alpha),(\gamma))=60^0$ nên $2|A-B|=\sqrt{2(A^2+B^2+C^2)}$.

Vì $d(O,(\alpha))=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ nên $3|-A+B-C|=\sqrt{2(A^2+B^2+C^2)}$.

Suy ra $2|A-B|=3|-A+B-C|$.

Do đó có hai trường hợp

Với $C=\dfrac{5(B-A)}{3}$ thì $2(A-B)^2=A^2+B^2+25\left(\dfrac{B-A}{3}\right)^2$ nên

$$8A^2-7AB+8B^2=0\Rightarrow A=B=0 \text{ (loại)}$$

Với $C=\dfrac{B-A}{3}$ thì $2(A-B)^2=A^2+B^2+\left(\dfrac{B-A}{3}\right)^2$ nên

$$4A^2-17AB+4B^2=0\Rightarrow A=4B,\ A=\frac{1}{4}B$$

Từ đó ta có hai mặt phẳng thỏa mãn

$4x+y-z-2=0;\ \ x+4y+z+2=0.$

Bài 13

1. Gọi $M\in(\alpha), M(x,y,z)$. Từ $d(M,(\alpha_1))=d(M,(\alpha_2))$ suy ra phương trình mặt phẳng cần tìm $(\alpha):\ 5x+2y+7z+34=0$.

2. (α) song song với $(\alpha_3):\ 6x-3y-2z+1=0$ nên

$$(\alpha):\ 6x-3y-2z+D=0\ \ (D\neq 1).$$

$$d(A,(\alpha))=1\Leftrightarrow\frac{|2+D|}{7}=1\Rightarrow D=5;\ D=-9.$$

Có hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán

$$(\alpha):\ 6x-3y-2z+5=0,\ (\alpha):\ 6x-3y-2z-9=0.$$

3. (α) qua $B(-5;0;-3)$ nên có phương trình dạng

$$A(x+5)+By+C(z+3)=0,\ A^2+B^2+C^2>0.$$

(α) qua $C(2;-5;0)$ nên $B=\dfrac{7A+3C}{5}$.

Ta có $d(M,(\alpha))=d(N,(\alpha))\Leftrightarrow |6A-2B-3C|=|4A-4B+5C|$.

Giải ra ta có hai mặt phẳng thỏa mãn

$$(\alpha):\ x+2y+z+8=0,\ (\alpha):\ 17x+31y+12z+121=0.$$

4. (α) qua $D(1;-3;1)$ nên có phương trình dạng

$$A(x-1)+B(y+3)+C(z-1)=0,\ A^2+B^2+C^2>0.$$

(α) vuông góc với mặt phẳng $3x-2y+2z+4=0$ nên $2C=2B-3A$.

Ta có $d(E,(\alpha))=3\Leftrightarrow \dfrac{|4A+5B+2C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=3.$

Suy ra $(A+7B)^2=9\left[A^2+B^2+\left(\dfrac{2B-3A}{2}\right)^2\right]$, tức là

$$113A^2-164AB-124B^2=0\Rightarrow A=2B;\ A=-\frac{62}{113}B.$$

Có hai mặt phẳng thỏa mãn là

$$(\alpha):\ 2x+y-2z+3=0,\ (\alpha):\ 62x-113y-206z-195=0.$$

5. (α) qua $F(4;2;1)$ nên có phương trình dạng

$$A(x-4)+B(y-2)+C(z-1)=0,\ A^2+B^2+C^2>0.$$

Vì $d(I,(\alpha))=\dfrac{7}{3}$, $d(J,(\alpha))=1$ nên ta có hệ

$$\begin{cases}\dfrac{|-3A-3B+C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{7}{3}\\ \dfrac{|-A+2B|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3|-3A-3B+C|=7|-A+2B|\\ |-A+2B|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\end{cases}$$

Có hai trường hợp

Với $C=\dfrac{16A-5B}{3}$ thì $256A^2-124AB-2B^2=0\Rightarrow A=\dfrac{1}{2}B;\ A=-\dfrac{1}{64}B.$

Suy ra các mặt phẳng thỏa mãn

$$(\alpha):x+2y+2z-10=0,\ (\alpha):\ x-64y+112z+12=0.$$

Với $C=\dfrac{2A+23B}{3}$ thì

$$2A^2+64AB+251B^2=0\Rightarrow A=\frac{-32-3\sqrt{58}}{2}B;\ A=\frac{-32+3\sqrt{58}}{2}B.$$

Suy ra các mặt phẳng thỏa mãn

$$(\alpha): (-32-3\sqrt{58})x+2y-(6+2\sqrt{58})z+130+14\sqrt{58}=0$$

$$(\alpha): (-32+3\sqrt{58})x+2y-(6-2\sqrt{58})z+130-14\sqrt{58}=0$$

Vậy có bốn mặt phẳng thỏa mãn.