HƯỚNG DẪN GIẢI.

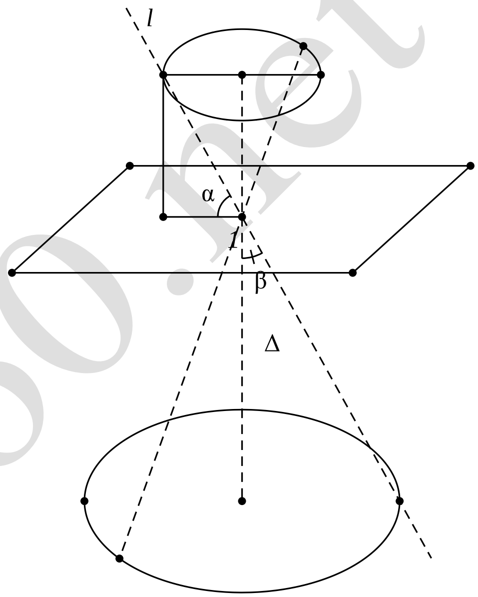
Vấn đề 1. CHỨNG MINH HỆ ĐIỂM THUỘC MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU.

Bài 1

1.

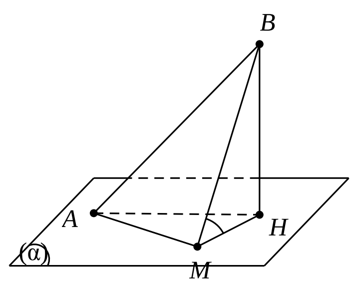
Qua O kẻ đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) thì Δ cố định. Gọi β là góc giữa Δ và l.

Ta có $\beta = 90^0 - \alpha$ không đổi nên đường thẳng l thuộc mặt nón cố định có trục là Δ, đỉnh là I và góc ở đỉnh là $2\beta = 180^0 - 2\alpha$.



2.

Gọi K là hình chiếu của M lên AB, ta có hai tam giác vuông MKB và MHB bằng nhau suy ra $MK = MH$ không đổi. Vậy điểm M luôn nằm trên mặt trụ có trục là AB và bán kính $r = BH$.



3. Gọi O, R là tâm và bán kính mặt cầu và AM là một đường thẳng bất kỳ qua A và tiếp xúc với mặt cầu tại M. Đặt $OAM = \alpha, OA = a$

Ta có : $\tan\alpha = \dfrac{OM}{OA} = \dfrac{R}{a}$ không đổi nên α không đổi.

Vậy AM luôn nằm trên một mặt nón có trục là OA, đỉnh A và góc ở đỉnh là 2α.

4. Gọi H là chân đường cao hạ từ M xuống đường thẳng AB. Ta có diện tích tam giác MAB là $S = \dfrac{1}{2}MH.AB \Rightarrow MH = \dfrac{2S}{AB}$ không đổi.

Vậy M thuộc mặt trụ cố định có trục là đường thẳng AB, bán kính $r = MH = \dfrac{2S}{AB}$.

Bài 2

1. (*Bạn đọc tự vẽ hình*)

Ta chứng minh được $AD \perp BC$. Gọi M, N, P, Q, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, AD, BC, BD, AC.

Ta có $\begin{cases} NP // MQ // AC \\ MP // NQ // BD \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow MPNQ$ là hình chữ nhật nên giao điểm O của MN và PQ cách đều bốn điểm M, N, P, Q.

Tương tự ta cũng có O cách đều bốn điểm M, N, E, F

Vậy O cách đều sáu điểm M, N, P, Q, E, F nên sáu điểm này nằm trên mặt cầu tâm O.

2. Ta có $AN \perp SC.$ Từ $AM \perp BC, AM \perp SC$ ta có $AM \perp MC.$

Tương tự $AP \perp PC.$

Do đó các điểm B, D, M, N, P cùng nhìn đoạn AC dưới một góc vuông.

Vậy A, B, C, D, M, N, P thuộc mặt cầu tâm O có bán kính là $r = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

3. Gọi $F = KL \cap MN, E$ là giao điểm của PF với mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $PABC$. Khi đó các điểm P, Q, R, E nằm trên đường tròn là thiết diện của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $PABC$ với mặt phẳng (PKL).

Mặt khác $F = KL \cap MN \Rightarrow P, S, T, E$ nằm trên đường tròn thiết diện cảu mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $PACD$ với mặt phẳng (PMN).

Do đó các điểm P, Q, R, S, T nằm trên hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm P, E nên hai đường tròn này nằm trên một mặt cầu.

Bài 3

1. (*Bạn đọc tự vẽ hình*)

Ta có: $(Q) \perp SC \Rightarrow AC' \perp SC \;\; \Rightarrow AC'C = 90^0$ (1)

$$SA \perp (P) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp BC \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow AB' \perp BC.$$

$SC \perp (Q) \Rightarrow SC \perp AB' \Rightarrow AB' \perp (SBC)$

$\Rightarrow AB' \perp B'C \Rightarrow AB'C = 90^0$ (2).

Chứng minh tương tự ta có : $AD'C = 90^0$ (3).

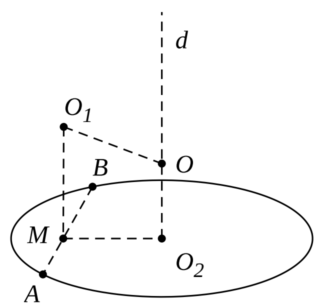
Ta lại có $ABC = ADC = 90^0$ (4).

Từ (1), (2), (3) và (4) ta suy ra bảy điểm A, B, C, D, B', C', D' cùng nhìn đoạn AC dưới một góc vuông nên chúng thuộc mặt cầu cố định có đường kính là AC. Bán kính hình cầu: $R = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

2. Gọi M là trung điểm của $AB \Rightarrow \begin{cases} O_1M \perp AB \\ O_2M \perp AB \end{cases} \Rightarrow AB \perp (O_1O_2M)$

Gọi d_1 là đường thẳng đi qua O_1 và vuông góc với mặt phẳng chứa (O_1), d_2 là đường thẳng đi qua O_2 và vuông góc với mặt phẳng chứa (O_2).

Vì $d_1, d_2 \subset (O_1O_2M)$ nên $d_1 \cap d_2 = \{O\}$.



Khi đó mọi điểm N nằm trên (O_1) hoặc (O_2) ta luôn có $ON = OA = OB$. Do đó tất cả các điểm nằm trên hai đường tròn (O_1) và (O_2) đều thuộc mặt cầu (O, OA).

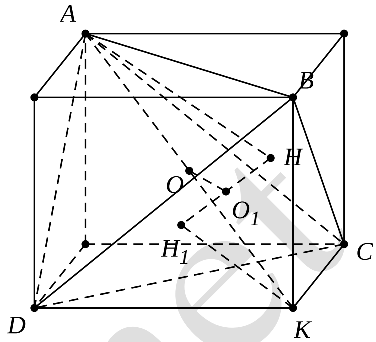
Bài 4

1. Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện, AH là đường cao của hình chóp, H_1, O_1 là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Trước hết ta chứng minh O_1 là trung điểm đoạn HH_1

Ta lấy hình hộp chữ nhật ngoại tiếp tứ diện $ABCD$

Ta có O là trung điểm của AK, $KBCD$ là tứ diện vuông và H_1 là trực tâm tam giác BCD nên $KH_1 \perp (BCD)$, do đó hình chiếu O_1



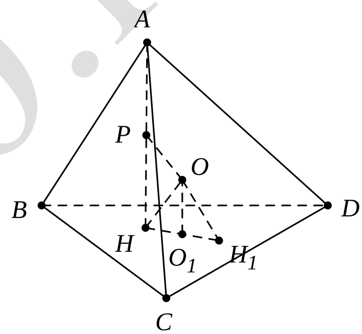
của O xuống mặt phẳng (BCD) là trung điểm đoạn HH_1.

Từ đó suy ra $OH = OH_1$.

Gọi P là trung điểm AH, ta có $AH = 4OO_1$ nên $OP = OH$

Đặt $r = OO_1, a = O_1H_1$, ta có:

$OH = OP = OH_1 = \sqrt{r^2 + a^2}$.



Tương tự ta chứng minh được 12 điểm nói trong bài toán nằm trên mặt cầu tâm O, bán kính $R = \sqrt{r^2 + a^2}$.

Vấn đề 2. CÁC BÀI TOÁN VỀ DIỆN TÍCH XUNG QUANH, THỂ TÍCH VÀ THIẾT DIỆN CỦA KHỐI NÓN, KHỐI TRỤ.

Bài 1

1. a) Gọi S, O là đỉnh và tâm đường tròn đáy của hình nón, thiết diện qua đỉnh là tam giác SAB. Theo bài ra ta có ΔSAB là tam giác vuông cân tại S.

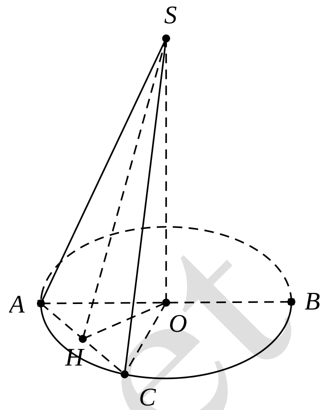
Ta có $l = SA = a$; $AB = 2r = \sqrt{2}SB = \sqrt{2}a \Rightarrow r = \dfrac{\sqrt{2}a}{2}$.

Diện tích toàn phần của hình nón là:

$$S_{tp} = \pi r(r+l) = \frac{(1+\sqrt{2})\pi a^2}{2}.$$

Thể tích khối nón là: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\sqrt{2}\pi a^3}{12}$.

b).Xét thiết diện qua đỉnh S tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0 là ΔSAC. Gọi H là trung điểm của AC.



Ta có: $AC \perp OH, AC \perp SO \Rightarrow AC \perp (SOH) \Rightarrow \widehat{SHO} = 60^0$.

$$SH = \frac{SO}{\sin 60^0} = \frac{\sqrt{6}a}{3}, AC = 2AI = 2\sqrt{SA^2 - SH^2} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}.$$

Diện tích thiết diện là: $S_{SAC} = \frac{1}{2}SH.AC = \frac{\sqrt{2}a^2}{3}$.

2. *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

Gọi I là điểm tiếp xúc của đường tròn nội tiếp của tam giác ABC với cạnh BC;

$$\widehat{SIO} = \beta; h = SO = r\tan\beta, l = SI = \frac{r}{\cos\beta}.$$

a) Diện tích xung quanh hình nón $S_{hn} = \pi r l = \frac{\pi r^2}{\cos\beta}$.

Thể tích hình nón $V_{kn} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi r^3 \tan\beta}{3}$.

b) Ta có $AC = \sqrt{3}AB, BC = 2AB; S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{\sqrt{3}AB^2}{2}$

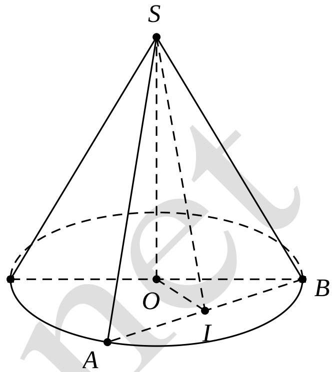
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(AB + AC + BC)r = \frac{3+\sqrt{3}}{2}AB.r \Rightarrow AB = (\sqrt{3}+1)r.$$

Diện tích xung quanh hình chóp

$$S_{hc} = \frac{1}{2}(AB + AC + BC).SI = \frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})r^2}{\cos\beta}.$$

Thể tích khối chóp $V_{kc} = \frac{1}{3}SO.S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})r^3\tan\beta}{3}$.

3. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng AB thì $OI \perp AB, SI \perp AB$, $OI = a$



Ta có $AO = SA.\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.SA$;

$AI = SA\cos 60^0 = \frac{1}{2}SA$.

Từ đó suy ra $\frac{AI}{AO} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ta lại có $\frac{AI}{AO} = \cos IAO$

$\Rightarrow \sin IAO = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{a}{OA} \Rightarrow AO = \frac{\sqrt{6}a}{2}$

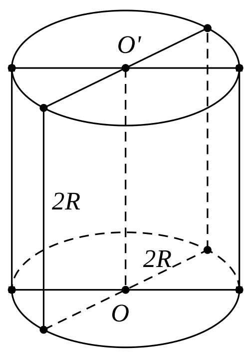
Xét tam giác SAO, ta có $SA = \frac{AO}{\cos 30^0} = \sqrt{2}a$.

Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq} = \pi rl = \sqrt{3}\pi a^2$.

Thể tích khối nón là: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi.OA^2.SO = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi a^3$.

Bài 2

1. Do thiết diện đi qua trục hình trụ nên ta có $h = 2R$.



Diện tích xung quanh là $S_{xq} = 2\pi Rh = 4\pi R^2$ (đvdt).

Diện tích toàn phần là : $S_{tp} = 2\pi R(R+h) = 6\pi R^2$ (đvdt)

2. Thể tích khối trụ $V = \pi R^2 h = 2\pi R^3$ (đvtt).

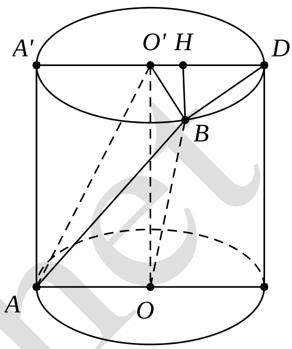
3. Do khối lăng trụ nội tiếp là tứ giác đều nên đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{2}R$.

Thể tích của khối lăng trụ là $V = Bh = 4R^3$ (đvtt).

Bài 4

Kẻ đường sinh AA', gọi D là điểm đối xứng với A' qua tâm O' và H là hình chiếu của B trên $A'D$.

Ta có $BH \perp (AOO'A')$ nên $V = \frac{1}{3} BH.S_{AOO'}$.



Ta có $A'B = \sqrt{3}a, BD = a$, tam giác $BO'D$ đều

suy ra $BH = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.

Mặt khác $S_{AOO'} = \frac{1}{2}a^2$ nên suy ra

Thể tích tứ diện $OO'AB$ là $V_{OO'AB} = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

Bài 5 *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

1. Ta có $SM = \frac{OM}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin\alpha}, SO = R\cot\alpha$.

Diện tích xung quanh khối nón $S_{xq} = \frac{\pi R^2}{\sin\alpha}$.

Thể tích khối nón $V = \frac{\pi R^3 \cot\alpha}{3}$.

2. Giả sử (P) cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SMN.

Ta có $SM \perp SN \Rightarrow S_{td} = \frac{1}{2} SM.SN = \frac{R^2}{2\sin^2\alpha}$.

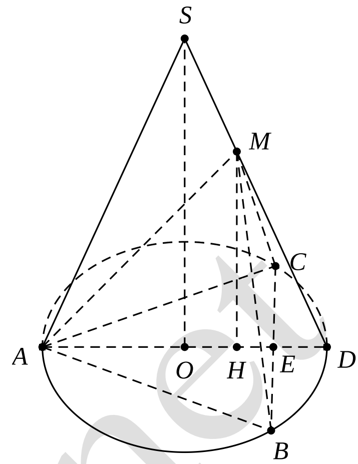
3. Gọi I là trung điểm của MN, ta có $SIO = \beta$.

Ta có $OI = SO\cot\beta = R\cot\alpha.\cot\beta$ không đổi.

Vậy SI thuộc một mặt nón cố định có đỉnh S, trục SO và đường tròn đáy $(O;OI)$.

Bài 6

Gọi E là trung điểm của BC, D đối xứng của A qua O.



Tam giác ABC cân tại A nên tâm đường tròn nội tiếp H nằm trên đoạn AE.

Vì $CBD = CAD = BAD$ và HB là phân giác nên $HBC = HBA$, nên $HBD = BHD$, do đó $HD = BD = AD.\sin 15^0 < \frac{AD}{2}$, hay $HD < OD \Rightarrow H$ nằm trong đoạn OE, vì thế M nằm trên đường sinh SD.

Gọi V_c, V_n lần lượt là thể tích khối chóp, khối nón.

Ta có: $V_c = \frac{1}{3}MH.\frac{1}{2}AC.AB.\sin 30^0 = \frac{1}{12}MH.AB^2, V_n = \frac{1}{3}\pi.OA^2.SO$

Do đó $\frac{V_c}{V_n} = \frac{1}{4\pi}.\frac{AB^2}{OA^2}.\frac{MH}{SO} = \frac{1}{4\pi}.\frac{AD^2.\cos^2 15^0}{OA^2}.\frac{DH}{DO}$.

Mà $DO = \frac{1}{2}AD, HD = BD$ nên $\frac{DH}{DO} = \frac{2DB}{AD} = 2\sin 15^0$, do đó

$$\frac{V_c}{V_n} = \frac{1}{4\pi}.\frac{AB^2}{OA^2}.\frac{MH}{SO} = \frac{1}{4\pi}.4\cos^2 15^0.2\sin 15^0 = \frac{1}{2\pi}\cos 15^0.$$

$$\cos 15^0 = \cos(45^0 - 30^0) = \cos 45^0.\sin 30^0 - \sin 45^0.\cos 30^0 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

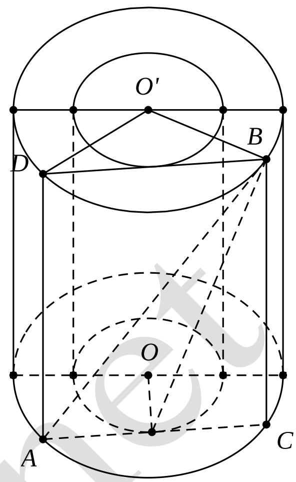
Vậy $\frac{V_c}{V_n} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8\pi}$.

Bài 7

1. Từ A, B ta dựng các đường sinh AD, BC

Ta có $\begin{cases} OA \perp O'B \\ OA \perp OO' \end{cases} \Rightarrow OA \perp OB$, chứng minh tương tự ta có các mặt của tứ diện $OAO'B$ là các tam giác vuông.

Thể tích tứ diện: $V_{OAO'B} = \frac{1}{3}OA.S_{OO'B} = \frac{\sqrt{2}r^3}{6}$.



2. $mp(\alpha)$ chứa AB và song song với OO' chính là $mp(ACBD)$.

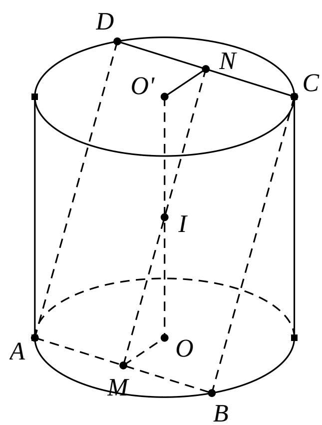
Kẻ $OI \perp AC \Rightarrow d(OO',(\alpha)) = OI = \frac{\sqrt{2}r}{2}$.

3. Xét hình trụ T có hai đường tròn đáy tâm là O, O' và bán kính là $\frac{\sqrt{2}r}{2}$.

Ta có khoảng cách giữa trục OO' và $mp(\alpha)$ là $OI = \frac{\sqrt{2}r}{2}$ nên $mp(\alpha)$ tiếp xúc với hình trụ T.

Bài 8

1. Kẻ $OM \perp AB, O'N \perp CD$ thì $MA = MB, NC = ND$, MN cắt OO' tại trung điểm I của mỗi đường và $MN \perp AB$.



Do đó $NMO = 45^0, IM = \frac{a}{2}$. Đặt

$OA = R, OO' = h$

Xét các tam giác vuông OIM, AMO:

$OM = OI = MI.\sin 45^0 = \frac{a}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow OO' = h = \frac{a}{\sqrt{2}}$

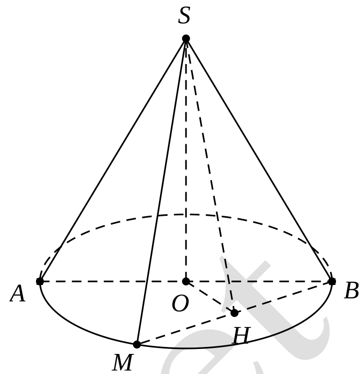
$R^2 = OA^2 = OM^2 + AM^2 = \frac{3a^2}{8} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

Diện tích xung quanh hình trụ: $S_{xq} = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối trụ: $V = \pi R^2 h = \frac{3\pi a^3\sqrt{2}}{16}$.

Bài 9

1. Giả sử SM là một đường sinh bất kỳ của hình nón .



$ASM = \beta, AM \le AB = 2R$. Ta cần chứng minh $\beta \le \alpha$.

Áp dụng định cosin trong tam giác ta có:

$$AM^2 = SA^2 + SM^2 - 2SA.SM\cos\beta = 2l^2(1-\cos\beta)$$

$$AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2SA^2.SB^2\cos\alpha = 2l^2(1-\cos\alpha)$$

$$AM \le AB \Rightarrow 1-\cos\beta \le 1-\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha \le \cos\beta$$

Do $0 < \alpha < 180^0 \Rightarrow \beta \le \alpha$.

2. Diện tích thiết diện $S_0 = \dfrac{1}{2}SA.AB.\sin 120^0 = \dfrac{\sqrt{3}l^2}{4.}$

Giả sử S_x là một thiết diện qua đỉnh cắt mặt nón theo hai đường sinh SA, SM .

Đặt $ASM = x$. Diện tích thiết diện $S_x = \dfrac{1}{2}SA.SM.\sin x = \dfrac{l^2\sin x}{2}$.

Ta có $S_x = S_0 \Rightarrow \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 60^0; x = 120^0$.

Vậy khi $x = 60^0$ thì $S_x = S_0$.

Bài 11

1. Chiều cao của hình trụ $AA' = h = 2R$. Do đó

$S_{xq\ \text{truï}} = 2\pi Rh = 4\pi R^2$

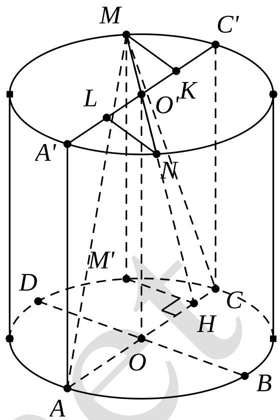
$S_{tp\ \text{truï}} = S_{xq\ \text{truï}} + 2S_{\text{ñaùy}} = 6\pi R^2$

2. $V_{\text{truï}} = \pi R^2 h = 2\pi R^3$

3. Ta có $AB = R\sqrt{2}, AA' = 2R$ nên thể tích khối lăng trụ là:

$$V = AA'.S_{ABCD} = 4R^3.$$

4. Dựng đường sinh MM' và



$HM' \perp AC\ (H \in AC)$

Khi đó $MH^2 = MM'^2 + M'H^2 = 4R^2 + M'H^2$

Vì $0 \le M'H \le R \Rightarrow 2R \le MH \le R\sqrt{5}$.

Lại có $S_{\Delta MAC} = \dfrac{1}{2}AC.MH \Rightarrow 2R^2 \le S_{\Delta MAC} \le R^2\sqrt{5}$

Vậy $\min S_{\Delta MAC} = 2R^2$ đạt được khi $M' \equiv A$ hoaë $M' \equiv C$

$\max S_{\Delta MAC} = \sqrt{5}R^2$ đạt được khi $M' \equiv B$ hoaë $M \equiv D$.

Bài 10

1. Dựng các đường sinh MH, AA', BB'. Kẻ $HK \perp AB$ thì $MK \perp AB$.

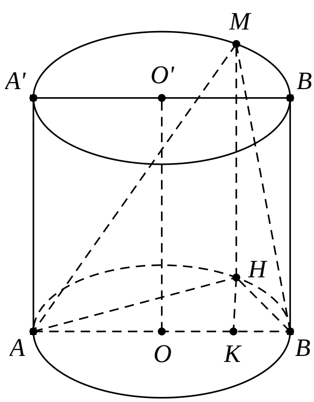
Ta có $MK^2 = MH^2 + HK^2 = h^2 + HK^2$

Nên $S_{MAB} = \dfrac{1}{2}AB.MK$ hay

$S_{MAB} = R.\sqrt{h^2 + HK^2}$.

Vì $0 \le HK \le R$ nên

$Rh \le S_{MAB} \le R.\sqrt{h^2 + R^2}$.



• Diện tích tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất là Rh khi M trùng A', hoặc M trùng B'.

• Diện tích tam giác MAB đạt giá trị lớn nhất là $\sqrt{h^2 + R^2}$ khi điểm M thỏa mãn $OM \perp A'B'$.

2. Chiều cao của khối lăng trụ nội, ngoại tiếp hình trụ bằng chiều cao của hình trụ. Xét đáy của lăng trụ thuộc mặt phẳng chứa đường tròn $(O;R)$ là đa giác đều $A_1A_2...A_n$.

• Đa giác đều $A_1A_2...A_n$ nội tiếp đường tròn $(O;R)$ thì diện tích đa giác $A_1A_2...A_n$ là

$$S_{A_1A_2...A_n} = nS_{A_1OA_2} = \frac{n}{2}.OA_1.OA_2.\sin A_1OA_2 = \frac{n}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Thể tích lăng trụ nội tiếp hình trụ là $V_{lt.nt} = h.S_{A_1A_2...A_n} = \frac{n}{2}hR^2\sin\frac{2\pi}{n}$.

• Đa giác đều $A_1A_2...A_n$ ngoại tiếp đường tròn $(O;R)$ thì cạnh của đa giác là $2R\tan\frac{\pi}{n}$, nên diện tích đáy là $S_{A_1A_2...A_n} = nS_{A_1OA_2} = nR^2\tan\frac{\pi}{n}$.

Thể tích lăng trụ nội tiếp hình trụ là $V_{lt.ngt} = h.S_{A_1A_2...A_n} = nhR^2\tan\frac{\pi}{n}$.

Bài 11

1. Dựng các đường sinh MH, AA', BB'.

Kẻ $HK \perp AB$ thì $MK \perp AB$.

Ta có: $MK^2 = MH^2 + HK^2 = h^2 + HK^2$

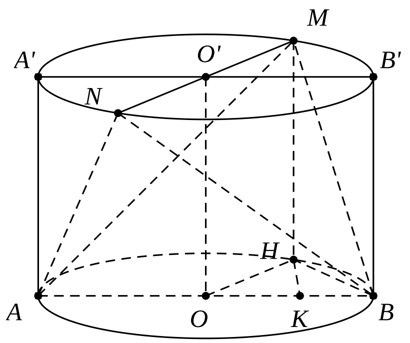
Nên $S_{MAB} = \frac{1}{2}AB.MK$ hay

$S_{MAB} = R.\sqrt{h^2 + HK^2}$.

Vì $0 \le HK \le R$ nên

$Rh \le S_{MAB} \le R.\sqrt{h^2 + R^2}$.

• Diện tích tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất là Rh khi M trùng A' hoặc M trùng B'.



• Diện tích tam giác MAB đạt giá trị lớn nhất là $\sqrt{h^2 + R^2}$ khi điểm M thỏa mãn $OM \perp A'B'$.

2. Ta có $HK \perp AB, HK \perp O'O$ nên $HK \perp (ABO')$. Do đó khoảng cách từ M đến mặt phẳng (ABO') là HK.

Vì M, N đối xứng với nhau qua O' nên khoảng cách từ M, N đến $A'B'$ bằng nhau. Do đó $V_{ABMN} = V_{ABMO'} + V_{ABNO'} = 2V_{ABMO'}$.

Ta có $V_{ABMO'} = \frac{1}{3}HK.S_{ABO'} = \frac{1}{3}h.R.HK$ và $HK \le R$ nên

$V_{ABMN} = \frac{2}{3}hR.HK \le \frac{2}{3}hR^2$.

Do đó V_{ABMN} đạt giá trị lớn nhất là $\frac{2}{3}hR^2$ khi $MN \perp A'B'$.

3. Chiều cao của khối lăng trụ nội, ngoại tiếp hình trụ bằng chiều cao của hình trụ. Xét đáy của lăng trụ thuộc mặt phẳng chứa đường tròn $(O; R)$ là đa giác đều $A_1A_2...A_n$.

• Đa giác đều $A_1A_2...A_n$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$ thì diện tích đa giác $A_1A_2...A_n$ là

$S_{A_1A_2...A_n} = nS_{A_1OA_2} = \frac{n}{2}.OA_1.OA_2.\sin A_1OA_2 = \frac{n}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}$.

Thể tích lăng trụ nội tiếp hình trụ là $V_{lt.nt} = h.S_{A_1A_2...A_n} = \frac{n}{2}hR^2\sin\frac{2\pi}{n}$.

• Đa giác đều $A_1A_2...A_n$ ngoại tiếp đường tròn $(O; R)$ thì cạnh của đa giác là $2R\tan\frac{\pi}{n}$, nên diện tích đáy là $S_{A_1A_2...A_n} = nS_{A_1OA_2} = nR^2\tan\frac{\pi}{n}$.

Thể tích lăng trụ nội tiếp hình trụ là $V_{lt.ngt} = h.S_{A_1A_2...A_n} = nhR^2\tan\frac{\pi}{n}$.

Vấn đề 3. MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHÓP V LĂNG TRỤ.

Bài 1

1. (*Bạn đọc tự vẽ hình*)

Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC), ta có H là tâm của ΔABC.

Nên SH là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Trong ΔSAH dựng đường trung trực Ix của cạnh SA. Gọi $O = Ix \cap SH$.

$\begin{cases} O \in SH \\ O \in Ix \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA = OB = OC \\ OS = OA \end{cases} \Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Bán kính $R = SO$. Để tính bán kính R ta có thể thực hiện theo hai cách sau.

Cách 1.

Ta có $\widehat{SAH} = \left(SA, (ABC)\right) = 60^0$; $AH = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{3}$ (M là trung điểm cạnh BC).

$\Rightarrow SH = AH\tan 60^0 = \frac{\sqrt{3}a}{3}.\sqrt{3} = a, SA = \frac{AH}{\cos 60^0} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

Do $\Delta SIO \sim \Delta SHA \Rightarrow \frac{SI}{SH} = \frac{SO}{SA} \Rightarrow SO = \frac{SA.SI}{SH} = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{2a}{3}$.

Vậy bán kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp là $R = \frac{2a}{3}$.

Cách 2. Gọi D là giao điểm của AH với mặt cầu, tâm O thuộc mp (SAD) nên đường tròn ngoại tiếp ΔSAD là đường tròn lớn.

Dễ thấy ΔSAD là tam giác đều nên bán kính

$R = \frac{\sqrt{3}SA}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{2\sqrt{3}a}{3} = \frac{2a}{3}$.

2. (Bạn đọc tự vẽ hình)

Gọi I là trung điểm cạnh AC. Trong $mp(SAC)$ kẻ $Ix // SA$.

Ta có Ix là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC, Ix cắt SC tại O. Ta có O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Bán kính $R = OA$.

$\widehat{SAB} = \left(SB, (ABC)\right) = 60^0; SA = AB\tan 60^0 = 3a, AC = \frac{AB}{\sin 30^0} = 2\sqrt{3}a$.

Gọi J là trung điểm $SC \Rightarrow AIOJ$ là hình chữ nhật

$\Rightarrow R = AO = \sqrt{AJ^2 + AI^2} = \frac{\sqrt{21}a}{2}$.

3. . (Bạn đọc tự vẽ hình)

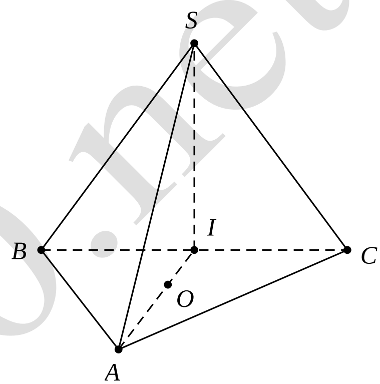
Vì tam giác AMB vuông tại M nên tâm mặt cầu đi qua ba điểm A, M, B nằm trên Δ_1 là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác AMB, tức là trung trực của AB (xét trong mặt phẳng (ABC)).

Tương tự tâm mặt cầu đi qua A, C, N nằm trên Δ_2 là trung trực của AC trong mặt phẳng (ABC). Gọi $I = \Delta_1 \cap \Delta_2$ thì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và I cách đều tất cả các điểm A, B, C, M, N nên các điểm đó nằm trên mặt cầu (S) tâm I, bán kính R. Với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Rightarrow R = \dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{a}{\sin\alpha}$.

Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2 = \dfrac{4\pi}{\sin^2\alpha}a^2$.

Thể tích khối cầu $V = \dfrac{4\pi}{3}R^3 = \dfrac{4\pi}{3\sin^3\alpha}a^3$.

4. Gọi I là trung điểm của BC, ta có $AI \perp BC$.
Mặt khác $(SBC) \perp (ABC)$ nên $AI \perp (SBC) \Rightarrow AI \perp SI \Rightarrow SI$ là đường cao của tam giác SBC.
Ta có $\Delta ABI = \Delta ASI \Rightarrow IS = IB = IC \Rightarrow I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSBC
Gọi O là tâm hình cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ ta có $OS = OB = OC$ nên O thuộc thẳng



d qua I vuông góc với (SBC).

Ta có $(SBC) \perp (ABC) \Rightarrow d \subset (ABC) \Rightarrow O \in (ABC) \Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.
Gọi K là giao của AI với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có : $AB^2 = AI.AK = AI.2R \Rightarrow R = \dfrac{AB^2}{2AI}$.

Ta có: $AI^2 = AB^2 - BI^2 = a^2 - \dfrac{BC^2}{4} = a^2 - \dfrac{SB^2 + SC^2}{4}$

$$= a^2 - \frac{a^2 + x^2}{4} = \frac{3a^2 - x^2}{4} \Rightarrow AI = \frac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2} \quad (0 < x < \sqrt{3}a)$$

Vậy $R = \dfrac{a^2}{\sqrt{3a^2 - x^2}}$.

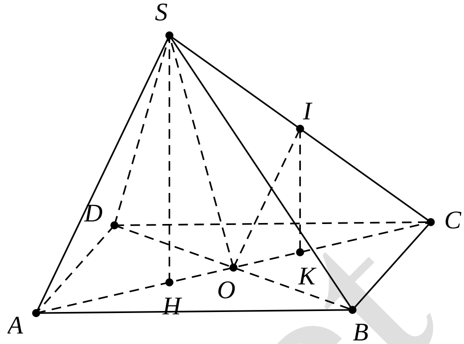
Bài 2

1. Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình thoi $ABCD$.

Theo bài ra ta có $BD = a$. Mà tam giác ΔSBD vuông tại S nên

$$SB = SD = \frac{\sqrt{2}}{2}a, SO = \frac{a}{2}.$$

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng đáy thì H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD (do các cạnh bên $SA = SB = SC$).



Ta có $SH = \sqrt{SO^2 - OH^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}a,\ SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a.$

Gọi K là tâm của tam giác đều BCD thì K là trung điểm của HC, trục đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD đi qua K và song song với SH nên là trung trực của HC cắt SC tại điểm I. Ta có I là trung điểm của SC nên $IS = IC,$ do đó I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện $SBCD.$

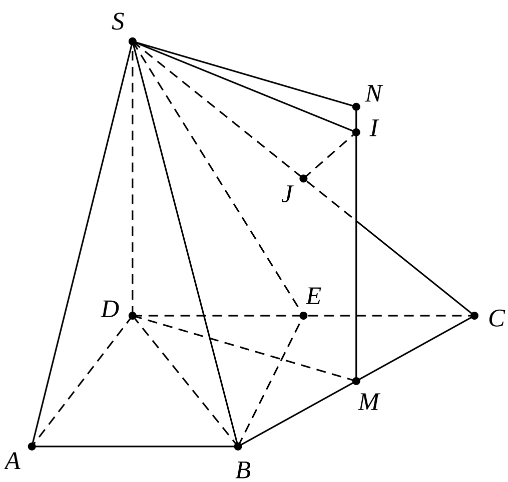
Bán kính của mặt cầu là $R = \frac{1}{2}SC = \frac{\sqrt{6}}{4}a.$

Bài 3

1. Vì $AB = DE = AD = a$ và $DAB = 1v$ nên $ABED$ là hình vuông.

Tam giác BCD có $EB = ED = EC = a$ nên vuông tại $B, BE \perp CD$ nên trung điểm M của BC là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $EBC.$ Dựng Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác EBC thì Δ song song với SD.

Dựng mặt phẳng trung trực cạnh $SC,$ mặt phẳng đó cắt Δ tại I.



Điểm I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCE.$

Kẻ $SN // DM$ cắt MI tại N, ta có $SDMN$ là hình chữ nhật với $SD = a$ và

$$DM^2 = \frac{DB^2 + DC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{AB^2 + AD^2 + DC^2}{2} - \frac{EC^2 + EB^2}{4} = \frac{5a^2}{2}.$$

Ta có $SI^2 = SN^2 + NI^2 = SN^2 + (NM - IM)^2 = \frac{5}{2}a^2 + (a - IM)^2$

Mà $IC^2 = IM^2 + MC^2 = IM^2 + \frac{a^2}{2}$ và

$R = IC = IS \Rightarrow \frac{5}{2}a^2 + (a - IM)^2 = IM^2 + \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow IM = \frac{3}{2}a$

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCE$ là

$R = \sqrt{IM^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{\sqrt{11}}{2}a.$

2. *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

Gọi O là trung điểm đoạn thẳng AD, ta có O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

Kẻ Ox song song với SA, ta có Ox là trục đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$. Trong tam giác SAC từ trung điểm J của cạnh SA kẻ Jy song song với AC, ta có Jy là đường trung trực cạnh SA.

Gọi I là giao điểm của Ox và Jy.

Ta có I thuộc Ox nên $IA = IB = IC = ID$ và I thuộc Jy nên $IS = IA$.

Vậy I là tâm mặt cầu đi qua năm điểm S, A, B, C, D và bán kính mặt cầu này là $r = IA$.

Theo giải thiết ta có: $SCA = \left((SCD),(P)\right) = 60^0$.

Suy ra $AC = AD\sin 60^0 = \sqrt{3}R, SA = AC\tan 60^0 = 3R$.

Tứ giác $AOIJ$ là hình chữ nhật nên $AI = \sqrt{AJ^2 + AO^2} = \frac{\sqrt{13}R}{2}$.

Vậy bán kính mặt cầu là $r = \frac{\sqrt{13}R}{2}$.

Bài 4

1. *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Do O cách đều AB nên O thuộc mặt phẳng trung trực cạnh AB. Đó chính là mp(MCD). Với M là trung điểm AB. Tương tự O cách đều CD nên O thuộc mp trung trực cạnh CD là mp (NAB), với N là trung điểm CD. Vậy O nằm trên giao tuyến MN của mp(MCD) và (NAB). Do $MN \perp AB$ và $MN \perp CD$.

$OA = OD = R; OM = \sqrt{R^2 - AM^2} = \sqrt{R^2 - 9}, ON = \sqrt{R^2 - ND^2} = \sqrt{R^2 - 16}$

$DM^2 = AD^2 - AM^2 = 65 \Rightarrow MN^2 = DM^2 - DN^2 = 49 \Rightarrow MN = 7$.

- Nếu O nằm trong hình chóp thì $MN = OM + ON$.

Suy ra $7 = \sqrt{R^2 - 9} + \sqrt{R^2 - 16} \Rightarrow R^2 = 25 \Rightarrow R = 5$.

- Nếu O nằm ngoài hình chóp thì $MN = OM - ON$.

Suy ra $7 = \sqrt{R^2 - 9} - \sqrt{R^2 - 16}$ phương trình vô nghiệm. Vậy bán kính $R = 5$.

2. Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ và gọi Q là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{QP} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{QG} + \overrightarrow{QP} = \vec{0}$ (điểm Q chia đoạn PG theo tỉ số -4).

Vì G_a là trọng tâm của tứ diện $PBCD$ nên

$$\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{QP} = 4\overrightarrow{QG_a} \Rightarrow \overrightarrow{QA} + 4\overrightarrow{QG_a} = \vec{0}$$

Hay điểm Q nằm trên đường thẳng AG_a.

Tương tự, điểm Q cũng thuộc các đường thẳng BG_b, CG_c, DG_d.

Vậy các đường thẳng AG_a, BG_b, CG_c, DG_d đồng quy tại Q.

Ta có $4\overrightarrow{QG} + \overrightarrow{QP} = \vec{0}$ nên $\overrightarrow{GQ} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{GP}$, hay Q là ảnh của P qua phép vị tự tâm G, tỉ số $-\frac{1}{5}$.

Vậy Q nằm trên mặt cầu là ảnh của mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$ qua phép vị tự tâm G, tỉ số $-\frac{1}{5}$.

Bài 5

1. Gọi I, I' lần lượt là trung điểm của BC, $B'C'$.

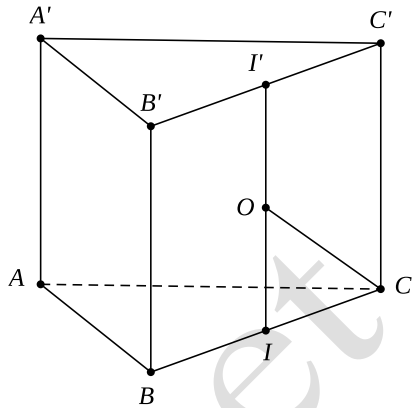
Ta có I, I' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác $ABC,\ A'B'C'$.

Gọi O là trung điểm của II' ta có O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

Bán kính $R = OC$.

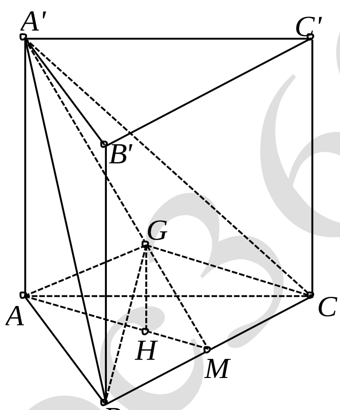
Do $IC = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{AB}{2\cos 60^0} = a;$

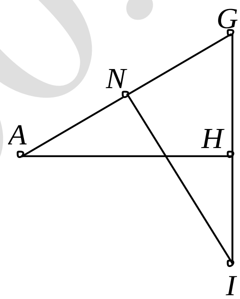
$\Rightarrow R = \sqrt{OI^2 + IC^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$



2. Gọi M là trung điểm của BC. Do tam giác ABC đều nên $BC \perp AM$

Suy ra $A'M \perp BC$ (định lí ba đường vuông góc). Vậy $\widehat{A'MA} = 60^0$.





Ta có $AM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ nên $A'A = AM.\tan \widehat{A'MA} = \dfrac{3}{2}a.$

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$V = AA'.S_{ABC} = \dfrac{3}{2}a.\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}a^3.$

Gọi H là trọng tâm của tam giác ABC, ta có $\dfrac{MG}{MA'} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{MH}{MA}$ nên

$GH // AA' \Rightarrow GH \perp (ABC)$. Do H cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên GH là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi I là giao điểm của GH với trung trực của GA (qua trung điểm N của GA) thì đó là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$.

Ta có $\Delta IGN \sim \Delta AGH$ nên $\dfrac{IG}{AG} = \dfrac{GN}{GH}$, suy ra bán kính mặt cầu

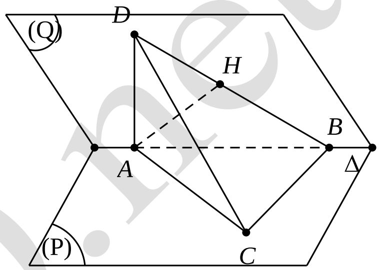
$R = \dfrac{GA.GN}{GH} = \dfrac{GA^2}{2GH}$.

Vì $GH = \dfrac{AA'}{3} = \dfrac{a}{2}$ nên $GA^2 = GH^2 + HA^2 = \dfrac{7}{12}a^2$. Vậy $R = \dfrac{7}{12}a$.

Bài 6

Vì $(P) \perp (Q)$ và $CA \perp \Delta$ nên $CA \perp (Q) \Rightarrow CA \perp AD$.

Tương tự $BD \perp BC$, nên các điểm B, A cùng nhìn đoạn CD dưới một góc vuông, do đó mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có tâm là trung điểm CD và có bán kính $R = \dfrac{CD}{2}$. Áp dụng Pitago cho các tam giác



ABD, ACD ta có: $R = \dfrac{1}{2}\sqrt{AC^2 + AD^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{AC^2 + AB^2 + BD^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

Kẻ $AH \perp BC$ thì H là trung điểm của BC (do tam giác ABC vuông cân A).

Ta có: $AH = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}\sqrt{AC^2 + AB^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

Vì $BD \perp (ABC) \Rightarrow BD \perp AH$ nên $AH \perp (CBD)$.

Vậy $d(A,(BCD)) = AH = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

Bài 7 *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

1. Gọi G là trọng tâm tứ diên, H là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$, khi đó ta có:

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

$\overrightarrow{A_1A_0} = \overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OA_0} = \overrightarrow{OA} + \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \dfrac{2}{3}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OG})$

$\overrightarrow{A_0H} = \overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{A_0A_1} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{A_0A_1} + (\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OG}) = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_0}$

Suy ra A_0, A_1, H thẳng hằng hay A_0A_1 đi qua H

Chứng minh tương tự ta cũng có B_0B_1, C_0C_1, D_0D_1 cũng đi qua H.

Vậy $A_1A_0, B_1B_0, C_1C_0, D_1D_0$ đồng quy tại điểm H

2. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD ta có

$$\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OH} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{ON}$$

Mà $ON \perp CD \Rightarrow MH \perp CD$

Chứng minh hoàn toàn tương tự ta có được các đường thẳng đi qua H và trung điểm của một cạnh thì vuông góc với cạnh đối diện.

Bài 8 *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

1. Gọi I, I' lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC, A'B'C'$ và O là trung điểm của II'. Ta có O là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ. Bán kính $R = OC$. Gọi r là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có :

$$IC = r = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{k}{2\sin\alpha} \Rightarrow R = \sqrt{IC^2 + IO^2} = \frac{\sqrt{k^2 + h^2\sin^2\alpha}}{2\sin\alpha}$$

2. Ta có :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\alpha \ge \frac{(AB + AC)^2}{2} - (AB + AC)^2\cos^2\alpha$$

$$\Rightarrow k^2 \ge \frac{a^2}{2} - a^2\cos^2 60^0 = \frac{a^2}{4}.$$

Vậy R nhỏ nhất khi k nhỏ nhất hay tam giác ABC đều cạnh $\frac{a}{2}$.

Bài 9

(Bạn đọc tự vẽ hình)

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABCD), M là trung điểm của CD.

Phân giác trong góc SHM cắt SH tại J là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp.

Đặt $SMH = 2\varphi\,(0 < \varphi < 45^0)$ ta có $HM = HJ.\cot\varphi \Rightarrow a = 2r.\cot\varphi$ và

$$SH = HM.\tan 2\varphi = r.\cot\varphi.\tan 2\varphi$$

nên thể tích khối chóp $S.ABCD$

$$V=\frac{1}{3}.SH.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.r.\cot\varphi.\tan 2\varphi.(2r.\cot\varphi)^2=\frac{4}{3}r^3.\cot^3\varphi.\tan 2\varphi.$$

Mặt khác $V=\frac{1}{3}r.S_{tp}$ nên $S_{tp}=\frac{3V}{r}=4r^2.\cot^3\varphi.\tan 2\varphi=4r^2.f(\varphi).$

Vì r không đổi nên S_{tp} nhỏ nhất khi $f(\varphi)=\cot^3\varphi.\tan 2\varphi$ nhỏ nhất.

Mà $f(\varphi)=\frac{1}{\tan^3\varphi}.\frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi}=\frac{2}{(1-\tan^2\varphi)\tan^2\varphi}$ và $0<\varphi<45^0$ nên $0<\tan\varphi<1,$

Do đó theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$(1-\tan^2\varphi)\tan^2\varphi\le\left(\frac{1-\tan^2\varphi+\tan^2\varphi}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

Nên $f(\varphi)=\frac{2}{(1-\tan^2\varphi)\tan^2\varphi}\ge 8\Rightarrow S_{tp}\ge 32r^2.$

Vậy $\max S_{tp}=32r^2$. Đạt được khi

$$1-\tan^2\varphi=\tan^2\varphi\Rightarrow\tan\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow a=2\sqrt{2}.r,h=4r.$$

Bài 10

1. Gọi V là thể tích tứ diện $ABMN$. Ta tính được $V=\frac{AB^3}{12}$ là giá trị không đổi, mà $r=\frac{3V}{S_{tp}}$ nên r lớn nhất khi S_{tp} đạt giá trị nhỏ nhất.

Đặt $AB=2a, AM=x, BN=y.$

Từ $AM+BN=MN$ suy ra $xy=2a^2$. Diện tích toàn phần của tứ diện là

$$S_{tp}=a(x+y)+\frac{1}{2}(y\sqrt{x^2+4a^2}+x\sqrt{y^2+4a^2}).$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, ta tìm được giá trị nhỏ nhất của S_{tp} đạt được khi

$x=y=a\sqrt{2},$ hay $AM=BN=\frac{\sqrt{2}}{2}AB.$

2. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện là $R=\sqrt{x^2+y^2+4a^2}$ nên

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + 4a^2} \geq \sqrt{2xy + 4a^2} = \sqrt{8a^2} = 2\sqrt{2}a.$$

$\min R = 2\sqrt{2}a$ khi $x = y = a\sqrt{2},$ hay đạt được tương ứng với bán kính mặt cầu nội tiếp đạt giá trị lớn nhất.

Bài 11

a) Gọi H là hình chiếu của O lên (P).

$OAH = \left(AO,(P)\right) = 30^0.$

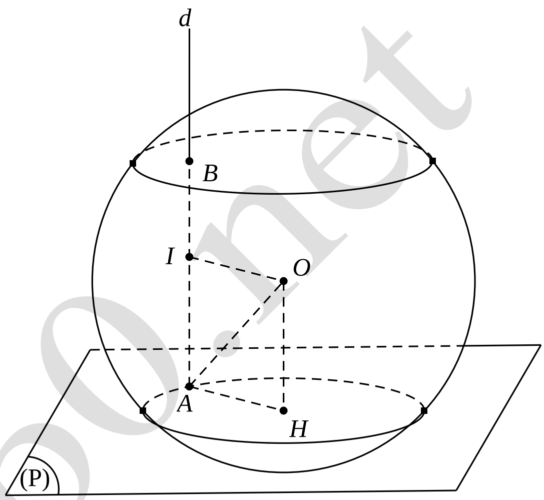
Ta có bán kính của đường tròn thiết diện là:

$r = AH = R.\cos 30^0 \frac{R\sqrt{3}}{2}$

Diện tích thiết diện là

$S = \pi r^2 = \frac{3\pi R^2}{4}.$

b) Mặt phẳng (ABO) đi qua O nên cắt mặt cầu theo đường tròn lớn.

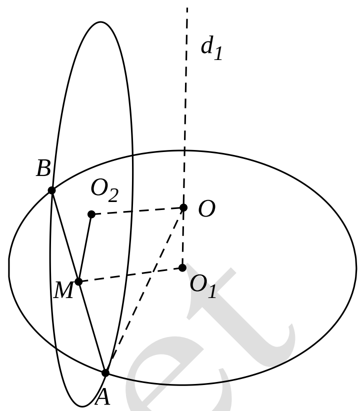


Gọi I là trung điểm của AB ta có $OI \perp AB$ nên tứ giác $OIAH$ là hình chữ nhật do đó $IA = OH = R\sin 30^0 = \frac{R}{2}.$

Vậy $AB = 2AI = R.$

Bài 12

Gọi d_1, d_2 lần lượt là hai đường thẳng đi qua O_1, O_2 và vuông góc với (P) và (P').



Gọi M là trung điểm AB ta có
$(MO_1O_2) \perp AB \Rightarrow d_1, d_2 \subset (MO_1O_2)$.
Gọi O là giao điểm của d_1 và d_2. Ta có O là tâm mặt cầu chứa (O_1) và (O_2). Bán kính $R = OA$.

$MO_1 = \sqrt{r_1^2 - MA^2} = 4; MO_2 = \sqrt{r_2^2 - MA^2} = 1$

Ta có tứ giác MO_1OO_2 là tứ giác nội tiếp.

$$\cos M = \frac{MO_1^2 + MO_2^2 - O_1O_2^2}{2MO_1.MO_2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow O_1MO_2 = 120^0 \Rightarrow O_1OO_2 = 60^0$$

Đặt $x = OO_2$, $y = OO_1, z = OM$. Áp dụng định lý cosin cho ΔO_1OO_2 ta có: $O_1O_2^2 = OO_1^2 + OO_2^2 - 2OO_1.OO_2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - xy = 21$ (1).

Do tứ giác MO_1OO_2 nội tiếp nên

$MO_1.OO_2 + MO_2.OO_1 = MO.O_1O_2 \Leftrightarrow 4x + y = \sqrt{21}.z$ (2)

$OM^2 = MO_1^2 + O_1O^2 = MO_2^2 + O_2O^2 \Leftrightarrow z^2 = 16 + y^2 = 1 + x^2$ (3)

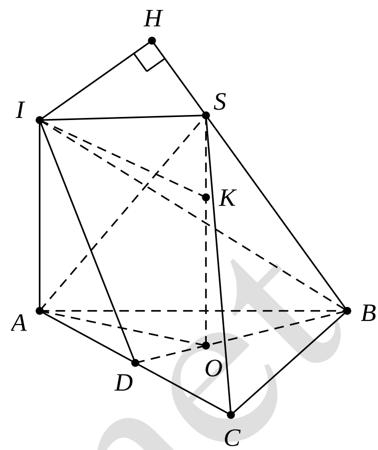
Giải hệ gồm ba phương trình (1),(2) và (3) ta tìm được

$x = 3\sqrt{3}; y = 2\sqrt{3}; z = 2\sqrt{7} \Rightarrow OA^2 = AO_1^2 + O_1O^2 = 37 \Rightarrow R = OA = \sqrt{37}$

Bài 13

1. Gọi R là bán kính của mặt cầu.

$IA \perp (ABC), BS \perp IH, IA = IH = R$. Gọi O là tâm của đáy, hạ $IK \perp SO$.



$SBO = 45^0 \Rightarrow SO = OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}, SB = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Tứ giác $IAOK$ là hình chữ nhật nên

$IA = OK = R; IK = OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$;

$SK = SO - IA = \frac{a\sqrt{3}}{3} - R;$

$HS = BH - BS = BA - BS = a - \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Vì $IH^2 + HS^2 = IK^2 + SK^2$ nên suy ra

$$R^2 + \left(a - \frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} - R\right)^2.$$

Ta tìm được $R = \frac{a(2\sqrt{2} - \sqrt{3})}{2}$.

Bài 14

1. (*Bạn đọc tự vẽ hình*)

Áp dụng định lý cosin cho tam giác ABC ta có :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos 120^0 = 3a^2 \Rightarrow BC = \sqrt{3}a$$

Tam giác ACD đều nên $CD = a$. Vì ΔABD vuông cân tại A nên $BC = \sqrt{2}a$.

Ta có $BC^2 + CD^2 = 3a^2 = BC^2 \Rightarrow \Delta BCD$ vuông tại D.

Gọi H là trung điểm của BC ta có $AH \perp BC \quad (1)$.

$AH = AB\sin 30^0 = \frac{a}{2}$;

$DH = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{2} \Rightarrow AH^2 + DH^2 = a^2 = AD^2 \Rightarrow AH \perp DH \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (BCD)$ nên AH là đường cao của tứ diện ABCD.

Thể tích tứ diện: $V = \frac{1}{3}AH.S_{\Delta BCD} = \frac{\sqrt{2}a^3}{12}$.

Diện tích toàn phần của tứ diện :

$$\sum S = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ACD} + S_{\Delta BCD} = \frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})a^2}{2}$$

Gọi r là bán kính mặt cầu nội tiếp, ta có $r = \frac{3V}{\sum S} = \frac{\sqrt{2}a}{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}$.

2. (*Bạn đọc tự vẽ hình*)

a) Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp.

Gọi H là tâm của hình vuông ABCD. Ta có SH là trục đường tròn ngoại tiếp đáy. Trong mặt phẳng (SHA) kẻ đường trung trực cạnh SA cắt SH tại O. Ta có O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD, bán kính $R = SO$.

Gọi N là trung điểm SA, ta có:

$$\Delta SNO \sim \Delta SHA \Rightarrow \frac{SN}{SO} = \frac{SH}{SA} \Rightarrow SO = \frac{SN.SA}{SH} = \frac{SA^2}{2SH}.$$

Áp dụng định lý sin cho tam giác cân SAB ta có :

$$\frac{SA}{\sin(\frac{180^0-\alpha}{2})} = \frac{AB}{\sin\alpha} \Rightarrow SA = \frac{AB}{2\sin\frac{\alpha}{2}}; SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Vậy $R = SO = \frac{a}{4\sqrt{\cos\alpha}.\sin\frac{\alpha}{2}}$.

b) Tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp.

Ta có tâm I của mặt cầu nội tiếp thuộc đường thẳng SH. Gọi M là trung điểm của

AB, ta có $AB \perp (SHM)$ tại M. Gọi I là chân đường phân giác trong của góc SMH $(I \in SH)$. Ta có I là tâm của mặt cầu nội tiếp hình chóp . Bán kính $r = IH$.

Để tính bán kính r ta có thể tính theo hai cách sau:

Cách 1. Dựa vào tính chất của đường phân giác ta có

$$\frac{IS}{IH} = \frac{MS}{MH} \Rightarrow \frac{SH}{IH} = \frac{MS+MH}{MH} \Rightarrow IH = \frac{SH.MH}{MS+MH};$$

$$SM = \frac{a}{2}\cot\frac{\alpha}{2}, MH = \frac{a}{2}.$$

Vậy bán kính mặt cầu nội tiếp là: $r = IH = \dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2})}$.

Cách 2. Dựa vào công thức $r = \dfrac{3V}{\sum S}$.

Thể tích khối chóp: $V = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{\cos\alpha}}{3.2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

$$\sum S = 4S_{\Delta SAB} + S_{ABCD} = 4.\frac{1}{2}SM.AB + a^2 = \frac{a^2(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Bán kính $r = \dfrac{3V}{\sum S} = \dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2})}$.

c) Tâm của hai hình cầu trùng nhau $\Leftrightarrow R + r = SH$.

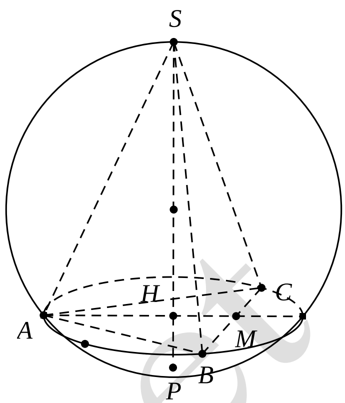
Hay: $\dfrac{a}{4\sqrt{\cos\alpha}.\sin\frac{\alpha}{2}} + \dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2})} = \dfrac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} + \cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin\alpha - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^0.$$

Vậy khi $\alpha = 45^0$ thì tâm mặt cầu ngoại tiếp và tâm mặt cầu nội tiếp của hình chóp trùng nhau.

3. Vì $SA = SB = SC$ và $ASB = BSC = CSA = \alpha$ nên $AB = BC = CA$



Kẻ $SH \perp (ABC) \Rightarrow HA = HB = HC$ hay $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều

Gọi P là giao của SH với mặt cầu , M là giao của AH và BC thì $MB = MC$ và $SP = 2R, SAP = 90^0$

Đặt $SA = SB = SC = x$, ta có:

$x^2 = SA^2 = SH.SP \Rightarrow SH = \dfrac{x^2}{2R}$

Ta có $MC = x\sin\dfrac{\alpha}{2}$ nên

$BC = 2x\sin\dfrac{\alpha}{2}; AM = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2} = x\sqrt{3}\sin\dfrac{\alpha}{2}$

Mà $SC^2 = SH^2 + HC^2 = SH^2 + \left(\dfrac{2}{3}AM\right)^2$

Suy ra $x^2 = \dfrac{x^2}{4R^2} + \dfrac{4}{3}x^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow x^2 = \dfrac{4}{3}R^2\left(3 - 4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)$

Do vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \dfrac{8\sqrt{3}}{27}R^3\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\left(3 - 4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)^2$

Ap dụng BĐT Cô si cho ba số dương ta có:

$$8\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\le \left(\frac{8\sin^2\frac{\alpha}{2} + 3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} + 3 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}\right)^3 = 8$$

Do đó $V_{S.ABC} \le \dfrac{8\sqrt{3}}{27}R^3$, đẳng thức xảy ra khi $\alpha = 60^0$.

Vậy $\max S_{S.ABC} = \dfrac{8\sqrt{3}}{27}R^3$, đạt được khi $\alpha = 60^0$.

Bài 15

1. (*Bạn đọc tự vẽ hình*)

Theo tính chất phương tích của một điểm đối với một đường tròn, ta có

$$GA.GA' = GB.GB' = GC.GC' = GD.GD' = R^2 - OG^2.$$

Với mọi điểm M ta có:

$$MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 = MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA} + GA^2$$

và $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ nên suy ra

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2.$$

Cho $M \equiv O$ thì $GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 = 4(R^2 - OG^2)$.

Vì thế $4 = \dfrac{4(R^2 - OG^2)}{R^2 - OG^2} = \dfrac{GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2}{R^2 - OG^2}$

$$= \frac{GA^2}{GA.GA'} + \frac{GB^2}{GB.GB'} + \frac{GC^2}{GC.GC'} + \frac{GD^2}{GD.GD'} \geq 4\sqrt[4]{\frac{GA}{GA'}.\frac{GB}{GB'}.\frac{GC}{GC'}.\frac{GD}{GD'}}$$

Hay $\dfrac{GA'}{GA}.\dfrac{GB'}{GB}.\dfrac{GC'}{GC}.\dfrac{GD'}{GD} \geq 1$ (1).

Mặt khác, do G là trọng tâm của tứ diện nên

$$\frac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{V_{GB'C'D'}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{GC'D'A'}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{GD'A'B'}}{V_{ABCD}} + \frac{V_{GA'B'C'}}{V_{ABCD}}$$

$$= \frac{V_{GB'C'D'}}{4V_{GBCD}} + \frac{V_{GC'D'A'}}{4V_{GCDA}} + \frac{V_{GD'A'B'}}{4V_{GDAB}} + \frac{V_{GA'B'C'}}{4V_{GABC}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{GB'.GC'.GD'}{GB.GC.GD} + \frac{GC'.GD'.GA'}{GC.GD.GA} + \frac{GD'.GA'.GB'}{GD.GA.GB} + \frac{GA'.GB'.GC'}{GA.GB.GC}\right)$$

$$\geq 4\sqrt[4]{\frac{GA'}{GA}.\frac{GB'}{GB}.\frac{GC'}{GC}.\frac{GD'}{GD}} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $G \equiv O$, hay $ABCD$ là tứ diện gần đều.

2. (*Bạn đọc tự vẽ hình*)

a) Bán kính mặt cầu ngoại tiếp $R = \dfrac{2h^2 + a^2}{4h}$.

Bán kính mặt cầu nội tiếp $r=\dfrac{ah}{a+\sqrt{4h^2+a^2}}$.

b)

b1) Thể tích khối chóp $V=\dfrac{1}{3}a^2h.$

Thể tích hình cầu ngoại tiếp $V_1=\dfrac{4\pi R^3}{3}$.

Thể tích hình cầu nội tiếp $V_2=\dfrac{4\pi r^3}{3}$.

Suy ra $\dfrac{V_2}{V}=\dfrac{4\pi r^3}{a^2h}=\dfrac{4\pi\left(\dfrac{ah}{a+\sqrt{4h^2+a^2}}\right)^3}{a^2h}=\dfrac{4\pi ah^2}{\left(a+\sqrt{4h^2+a^2}\right)^3}$.

Đặt $\tan\alpha=\dfrac{2h}{a},\quad (0^0<\alpha<90^0)$

Khi đó $\dfrac{V_2}{V}=\dfrac{4\pi(1-\cos\alpha)\cos\alpha}{4(1+\cos\alpha)^2}=\dfrac{4\pi(1-t)t}{(1+t)^2}=f(t),\ t=\cos\alpha,(0<t<1).$

Ta có $f'(t)=\dfrac{4\pi(1-3t)}{(1+t)^3}, f'(t)=0\Rightarrow t=\dfrac{1}{3}$.

Vậy $\max\dfrac{V_2}{V}=\dfrac{\pi}{2}$, khi $h=\sqrt{2}a.$

b2) Ta có $\dfrac{V_2}{V_1}=\dfrac{r}{R}=\dfrac{4ah^2}{(2h^2+a^2)(a+\sqrt{4h^2+a^2})}$.

Tương tự ta tìm được $\dfrac{V_2}{V_1}$ lớn nhất khi $h=a\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+2}{2}}$.

3. Gọi M,N,P,Q lần lượt là các tiếp điểm của mặt cầu tâm I với các cạnh $AD,BD,AC,BC.$

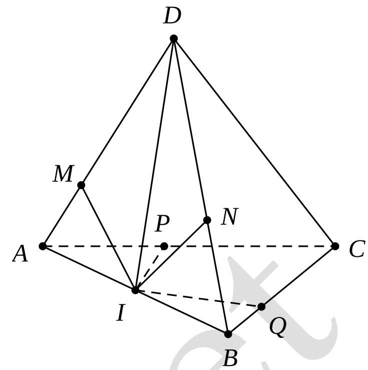
Ta có $BN = BQ, IN = IQ = r_I$ nên

$\Delta IBN = \Delta IBQ$ suy ra $IBN = IBQ$

Tương tự $IAP = IAM$ nên $\Delta CAB = \Delta DAB$. Do đó $AC = AD, BC = BD$ (1).

Tương tự cho mặt cầu tâm J ta có $DA = DB, CA = CB$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $CA = CB = DA = DB = a.$



Vì DI là phân giác góc ADB và tam tam giác ADB cân tại D nên I là trung điểm của AB. Cũng như thế, J là trung điểm của CD. Đặt $AB = 2x, CD = 2y.$

Ta có $ID = \sqrt{a^2 - x^2}$ và $S_{DAB} = 2S_{DIB}$ nên

$$AB.ID = 2IN.DB \Leftrightarrow x.\sqrt{a^2 - x^2} = r_I.a \Leftrightarrow r_I = \frac{x.\sqrt{a^2 - x^2}}{a}.$$

Tương tự $r_J = \dfrac{y.\sqrt{a^2 - y^2}}{a}.$

Vậy $CD^2 - 4r_J^2 = 4y^2 - 4\dfrac{y^2.(a^2 - y^2)}{a^2} = 4\dfrac{y^4}{a^2} \Rightarrow a^2(CD^2 - 4r_J^2) = 4CD^4$

$AB^2 - 4r_I^2 = 4x^2 - 4\dfrac{x^2.(a^2 - x^2)}{a^2} = 4\dfrac{x^4}{a^2} \Rightarrow a^2(AB^2 - 4r_I^2) = 4AB^4$

Do đó $\dfrac{4AB^4}{4CD^4} = \dfrac{a^2(AB^2 - 4r_I^2)}{a^2(CD^2 - 4r_J^2)}$, hay $\dfrac{AB^4}{CD^4} = \dfrac{AB^2 - 4r_I^2}{CD^2 - 4r_J^2}.$

4. (*Bạn đọc tự vẽ hình*)

Ta có MN là đường trung bình của tam giác đều nên

$$S_{AMN} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Thể tích hình chóp $S.AMN$: $V = \dfrac{1}{3}SO.S_{AMN} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Bán kính r mặt cầu nội tiếp hình chóp $S.AMN$

Ta có: $\sum S = S_{SAM} + S_{SAN} + S_{SMN} + S_{AMN} = \dfrac{14\sqrt{3}+9\sqrt{2}}{4}$

Mà $V = \dfrac{1}{3}r.\sum S \Rightarrow r = \dfrac{3V}{\sum S} = \dfrac{3}{2(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$.

5. (*Bạn đọc tự vẽ hình*)

Ta có O là hình thoi nên O cách đều bốn cạnh của hình thoi.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của O lên CD và CB thì H, K cũng là hình chiếu của S lên CD, CB.

Gọi I thuộc SO, Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của I lên SH, SK , ta có IE, IF lần lượt là khoảng cách từ I đến mp(SCD) và mp(SCB).

Ta có $IE = \dfrac{SI.HO}{SH}, IF = \dfrac{SI.KO}{SK}$, do HO=KO và SH=SK nên IE=IF.

Vậy khoảng cách từ I đền các mp(SCD) và (SCB). Chứng minh tương tự ta có I cách đều các mặt bên của hình chóp. Từ đó suy ra tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình chóp nằm trên đường cao SO. Gọi I là tâm mặt cầu thì I là chân đường phân giác góc SHO.

Ta có $OH = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}, SH = \dfrac{\sqrt{3a^2+4b^2}}{2}$,

$$\frac{IS}{IO} = \frac{HS}{HO} \Rightarrow \frac{IS+IO}{IO} = \frac{HS+HO}{HO} \Rightarrow IO = \frac{HO.SO}{HO+HS} = \frac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{3}a+\sqrt{3a^2+4b^2}}$$

Vậy bán kính $r = \dfrac{\sqrt{3}ab}{\sqrt{3}a+\sqrt{3a^2+4b^2}}$.

6. a) Ta có $AB \perp (CDM) \Rightarrow DM \perp AB$. Khi $DM \perp CM$ thì $DM \perp (ABC)$ nên DM là đường cao của tứ diện. Khi đó tam giác CDM vuông cân tai D nên suy ra $DM = \dfrac{CD}{\sqrt{2}}$.

Ta có $x = AB = 2MB = 2\sqrt{BD^2 - DM^2} = 2\sqrt{CD^2 - \dfrac{CD^2}{2}} = \sqrt{2}CD$.

b) Thể tích tứ diện $V = \dfrac{\sqrt{2}}{12}CD^3$.

Diện tích toàn phần của tứ diện: $\sum S = 2S_{ACD} + 2S_{ABD} = \dfrac{\sqrt{3}+2}{2}CD^2$

Gọi r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện ta có: $r=\frac{3V}{\sum S}=\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$.