HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 1

1. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2;4;-16)$, $\overrightarrow{n_P} = (2;-1;1)$ là VTPT của (P).

a) Gọi (Q) là mặt phẳng chứa A,B và $(Q) \perp (P)$

Mà $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_P}\right] = (-12;-30;-6)$ nên $\overrightarrow{n_Q} = (2;5;1)$ là một VTPT của (Q)

Vậy phương trình của $(Q): 2x+5y+z-11=0$.

b) Ta thấy hai điểm A,B nằm về hai phía so với mặt phẳng (P).

Gọi $H(a;b;c)$ là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) ta có $\overrightarrow{AH} = t.\overrightarrow{n_P}$

Suy ra $\begin{cases} a+1=2t \\ b-3=-t \\ c+2=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2t-1 \\ b=-t+3 \\ c=t-2 \end{cases}$.

Mặt khác $H \in (P)$ nên

$2a-b+c+1=0 \Leftrightarrow 2(2t-1)-(-t+3)+t-2+1=0$

Từ đó ta tìm được $H(1;2;-1)$.

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (P), suy ra $A'(3;1;0)$ đồng thời A' với B nằm về hai phía so với mặt phẳng (P).

Khi đó với mọi điểm $M \in (P)$ ta có : $MA+MB = MA'+MB \geq A'B$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M = A'B \cap (P)$. Từ đó ta tìm được $M(2;2;-3)$.

2. Ta có $\overrightarrow{AB} = \left(4;-4;-4\right)$; $\overrightarrow{CD} = \left(2;10;-8\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow AB \perp CD \Rightarrow \left(AB,CD\right) = 90^0$

Do AB không đổi $\Rightarrow \Delta AMB$ có chu vi nhỏ nhất $\Leftrightarrow AM+BM$ nhỏ nhất

Gọi $M\left(x;y;z\right) \in CD \Rightarrow \overrightarrow{CM} = k.\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+2k \\ y=-4+10k \\ z=3-8k \end{cases}$

$\Rightarrow M\left(-1+2k;-4+10k;3-8k\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \left(2k-3;10k-7;1-8k\right), \overrightarrow{BM} = \left(2k-7;10k-3;5-8k\right)$

Suy ra $AM+BM = \sqrt{168k^2-168k+59} + \sqrt{168-168k+83}$

$$= \sqrt{168\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+17} + \sqrt{168\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+41} \geq \sqrt{17}+\sqrt{41}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow k=\frac{1}{2} \Leftrightarrow M\left(0;1;-1\right)$.

3. Gọi Δ là đường thẳng cần tìm; Δ nằm trong mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với (P).

Phương trình $(Q): x-2y+2z+1=0$.

Gọi K, H là hình chiếu của B trên Δ, (Q). Ta có $BK \geq BH \Rightarrow AH$ là đường thẳng cần tìm. Tọa độ của H là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-3}{2} \\ x-2y+2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow H\left(-\frac{1}{9};\frac{11}{9};\frac{7}{9}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AH}=\left(\frac{26}{9};\frac{11}{9};-\frac{2}{9}\right).$$

Vậy phương trình $\Delta: \dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{-2}$.

4. Giả sử mặt phẳng (α) cắt các tia Ox, Oy, Oz tại các điểm khác gốc tọa độ là $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$.

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;9;4)$ nên $\dfrac{1}{a}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{9}{c}=1$ (1).

a) Khối tứ diện $OABC$ có góc tam diện đỉnh O vuông, nên thể tích là

$$V=\frac{1}{6}OA.OB.OC=\frac{1}{6}|a||b||c|=\frac{1}{6}abc.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$1=\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{36}{abc}} \Rightarrow abc \geq 972 \Rightarrow V \geq 162$$

Dấu đẳng thức có khi $\dfrac{1}{a}=\dfrac{4}{b}=\dfrac{9}{c}=\dfrac{1}{3} \Rightarrow a=3, b=12, c=27$.

Vậy thể tích khối tứ diện $OABC$ nhỏ nhất là 162 (đvtt), khi mặt phẳng (α) có phương trình $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{12}+\dfrac{z}{27}=1 \Leftrightarrow 36x+9y+4z-108=0$.

b) Đặt $T=OA+OB+OC=a+b+c$. Ta có

$$T.1=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\right)=14+\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{9b}{c}+\frac{4c}{b}+\frac{9c}{a}+\frac{c}{a}$$

$$\geq 14+2\sqrt{\frac{4ab}{ba}}+2\sqrt{\frac{36bc}{cb}}+2\sqrt{\frac{9ca}{ac}}=36 \Rightarrow T \geq 36.$$

Dấu đẳng thức có khi $\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=1 \\ \frac{4a}{b}=\frac{b}{a};\frac{9b}{c}=\frac{4c}{b};\frac{9c}{a}=\frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=12. \\ c=18 \end{cases}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $OA+OB+OC$ là $36,$ khi mặt phẳng (α) có phương trình $\frac{x}{6}+\frac{y}{12}+\frac{z}{18}=1 \Leftrightarrow 6x+3y+2z-36=0.$

5. a) Phương trình đường thẳng $AB:\begin{cases} x=-3+2t \\ y=4+t \\ z=1-t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}).$

Tọa độ giao điểm của AB và Δ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} -3+2t=1+2v \\ 4+t=8+3v \\ 1-t=1+v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ v=-1 \end{cases} \Rightarrow I(-1;5;0).$$

Vậy hai đường thẳng cắt nhau tại điểm $I(-1;5;0).$

Ta có $\overrightarrow{AI}(2;1;-1), \overrightarrow{AB}(4;2;-2)$ nên $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI},$ hay I thuộc đoạn thẳng $AB.$

Vì $MA+MB\ge AB$ và dấu đẳng thức có khi $M\equiv I$ nên giá trị nhỏ nhất của $MA+MB$ là $AB,$ xảy ra khi $M(-1;5;0).$

b) Do $\overrightarrow{AC}(4;6;2)=2\vec{u}_\Delta$ và $A\notin\Delta$ nên $AC//\Delta,$ tức là AC và Δ nằm trong mặt phẳng (P) và A,C cùng phía so với $\Delta.$

Gọi hình chiếu của A trên Δ là $H(1+2t;8+3t;1+t),$ ta có

$$\overrightarrow{AH}(4+2t;4+3t;t),\ \vec{u}_\Delta(2;3;1).$$

Vì $AH\perp\Delta$ nên $\overrightarrow{AH}.\vec{u}_\Delta=0 \Leftrightarrow 2(4+2t)+3(4+3t)+t=0 \Leftrightarrow t=-\frac{10}{7}$

Do đó $H\left(-\frac{13}{7};\frac{26}{7};-\frac{3}{7}\right).$

Gọi A' đối xứng với A qua Δ thì H là trung điểm của AA' nên tọa độ điểm A' là $A'\left(-\frac{5}{7};\frac{24}{7};-\frac{13}{7}\right).$

Ta có A' và C nằm khác phía so với Δ trong mặt phẳng (P) đồng thời $MA+MC=MA'+MC\ge A'C,$ nên giá trị nhỏ nhất của $MA+MC$ bằng $A'C$ khi $M=A'C\cap\Delta.$

Do $\overrightarrow{A'C}=\frac{2}{7}(6;23;17)$ nên phương trình $A'C:\begin{cases} x=1+6u \\ y=10+23u \\ z=3+17u \end{cases} (u\in\mathbb{R}).$

Vậy điểm M cần tìm là $M\left(\frac{1}{7};\frac{47}{7};\frac{4}{7}\right)$.

Bài 2

1. a) Ta có: $C(a;a;0),\ B'(a;0;b),\ C'(a;a;b),\ D'(0;a;b) \Rightarrow M(a;a;\frac{b}{2})$

Suy ra $\overrightarrow{A'B}=(a;0;-b),\ \overrightarrow{A'D}=(0;a;-b),\ \overrightarrow{A'M}=(a;a;-\frac{b}{2})$ nên

$\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'D}\right]=(ab;ab;a^2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{A'M}.\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'D}\right]=\frac{3a^2b}{2}$. Vậy $V_{A'MBD}=\frac{a^2b}{4}$.

b) Do $a,b>0$ nên áp dụng BĐT Cô si ta có:

$$4=a+b=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a+b\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}a^2b}\Rightarrow a^2b\le\frac{256}{27}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{a}{2}=b\\ a+b=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\frac{8}{3}\\ b=\frac{4}{3}\end{cases}$

Vậy $\max V_{A'BDM}=\frac{64}{27}$.

2. a) Vì điểm $D\in(Oyz)$ nên $D(0;y;z)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}(-1;2;-1),\overrightarrow{CD}(-3;y-2;z-6),\overrightarrow{AC}(0;3;6),\overrightarrow{BD}(-2;y-1;z+1)$

Tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối vuông góc khi và chỉ khi

$\begin{cases}AB\perp CD\\ AC\perp BD\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0\\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y-z=-5\\ y+2z=-1\end{cases}\Leftrightarrow y=-\frac{11}{5},z=\frac{3}{5}$.

Vậy tọa độ điểm D là $D\left(0;-\frac{11}{5};\frac{3}{5}\right)$.

b) Ta có $M(t;0;0)$ nên $\overrightarrow{AM}(t-3;1;0),\overrightarrow{AB}(-1;2;-1)$.

Do đó $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right]=(-1;t-3;2t-5)$. Diện tích tam giác ABM là

$S_{MAB}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{1+(t-3)^2+(2t-5)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{f(t)}$.

Với $f(t)=1+(t-3)^2+(2t-5)^2=5t^2-26t+35$ là tam thức bậc hai có hệ số t^2 là $5>0$, nên $\min f(t)=f\left(\frac{13}{5}\right)=\frac{6}{5}$, khi $t=\frac{13}{5}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác ABM là $\frac{\sqrt{30}}{10}$, đạt được khi điểm $M\left(\frac{13}{5};0;0\right)$.

3. a)Vì $M\in(Oxz)$ nên $M(x;0;z)$.

Ta có $\overrightarrow{MA}(5-x;2;3-z),\overrightarrow{MB}(-1-x;-2;-1-z)$.

Các điểm A,M,B thẳng hàng nên tồn tại k sao cho

$$\overrightarrow{MA}=k.\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\begin{cases}5-x=k(-1-x)\\2=-2k\\3-z=k(-1-z)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\k=-1\\z=1\end{cases}$$

Vậy $M(2;0;1)$ và chia đoạn AB theo tỉ số -1 (M là trung điểm AB).

b) Theo bất đẳng thức tam giác, ta có $NA+NB\geq AB.$ Vì tung độ hai điểm A,B trái dấu, nên hai điểm A,B nằm về hai phía của mặt phẳng (Oxz). Do đó $NA+NB=AB$ khi và chỉ khi N là giao điểm của AB với mặt phẳng (Oxz), hay $N\equiv M(2;0;1)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $NA+NB$ là $2\sqrt{17}$ khi $N(2;0;1)$.

c) Ta có $K(t;t;t)$ nên $\overrightarrow{AK}(t-5;t-2;t-3),\overrightarrow{BK}(t+1;t+2;t+1)$.

Vì thế $f(t)=2KA^2-3KB^2=-3t^2-64t+58=-3\left(t+\frac{32}{3}\right)^2+\frac{1198}{3}$ nên $f(t)\leq\frac{1198}{3}\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Đẳng thức xảy ra khi $t=-\frac{32}{3}$, hay $K\left(-\frac{32}{3};-\frac{32}{3};-\frac{32}{3}\right)$.

4. $(P): x+y-z+1=0, A(1;-1;2), \Delta: \frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{-3}$.

a) Gọi $\vec{u}_d(a;b;c)$, $a^2+b^2+c^2>0$.

Có $d//(P)\Rightarrow\vec{u}_d.\vec{n}_{(P)}=0$ nên $c=a+b$.

Δ qua $M(-1;0;4)$ và có $\vec{u}_\Delta(2;1;-3)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}(-2;1;2)$, $\left[\vec{u}_\Delta,\vec{u}_d\right]=(a+4b;-5a-2b;2b-a)$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng

$$d(d;\Delta)=\frac{\left|\left[\vec{u}_\Delta,\vec{u}_d\right].\overrightarrow{AM}\right|}{\left|\left[\vec{u}_\Delta,\vec{u}_d\right]\right|}=\frac{|9a+6b|}{\sqrt{(a+4b)^2+(5a+2b)^2+(2b-a)^2}}$$

Hay $d(d;\ \Delta)=\sqrt{\dfrac{(9a+6b)^2}{27a^2+24ab+24b^2}}\le\dfrac{\sqrt{70}}{14}$.

Khi đó đường thẳng cần tìm là $d:\begin{cases}x=1\\ y=-1+t\\ z=2+t\end{cases}$.

b) Gọi góc giữa Δ và d là φ.

Giá trị lớn nhất của φ là 90^0 khi $\vec{u}_d=\left[\vec{u}_\Delta,\ \vec{n}_{(P)}\right]=(2;\ -5;\ -1)$.

Đường thẳng cần tìm $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-2}{-1}$.

Giá trị nhỏ nhất của φ đạt được khi $\vec{u}_d=\left[\vec{n}_{(P)},\left[\vec{u}_\Delta,\ \vec{n}_{(P)}\right]\right]=(-6;\ -1;\ -7)$.

Đường thẳng cần tìm $d:\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{7}$.

c) $\vec{u}_{d'}(1;\ 1;\ 1)$, $\overrightarrow{AB}(-2;\ 2;\ -3)$.

Khoảng cách từ B đến d lớn nhất khi $\vec{u}_d=\left[\vec{u}_{d'},\ \overrightarrow{AB}\right]=(-5;\ 1;\ 4)$ nên phương trình đường thẳng cần tìm $d:\dfrac{x-1}{-5}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{4}$.

Khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất khi

$$\vec{u}_d=\left[\vec{u}_{d'},\left[\vec{u}_{d'},\ \overrightarrow{AB}\right]\right]=3(1;\ -3;\ 2).$$

Phương trình đường thẳng cần tìm $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-2}{2}$.

Bài 3

V ì

$M\in\Delta\Rightarrow M\left(t;2t;1-t\right)$, $\overrightarrow{AM}=\left(t-3;2t-2;-t+2\right)$, $\overrightarrow{BM}=(t-1;2t+2;-t)$

$\overrightarrow{CM}=(t-2;2t-1;-t-2)$

1. Ta có: $MA+MB=\sqrt{6t^2-18t+17}+\sqrt{6t^2+6t+5}$

$$=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}-\sqrt{6}t\right)^2+\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{6}t+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2}$$

Ap dụng bất đẳng thức: $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geq\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$, đẳng thức xảy ra khi $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ta có:

$$MA+MB\geq\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}-\sqrt{6}t+\sqrt{6}t+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(2\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2}=\sqrt{38}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\frac{3\sqrt{6}}{2}-\sqrt{6}t=\sqrt{6}t+\frac{\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$.

Vậy $M\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$ là điểm cần tìm.

2. Ta có: $AM+CM=\sqrt{6t^2-18t+17}+\sqrt{6t^2-4t+9}$

$$=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}-\sqrt{6}t\right)^2+\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{6}t+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$\geq\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{14}}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{96+5\sqrt{42}}{3}}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}-t\right)\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{14}}{2}\left(\frac{1}{3}+t\right)\Leftrightarrow t=\frac{45-\sqrt{42}}{10+3\sqrt{42}}$.

Vậy $M\left(\frac{45-\sqrt{42}}{10+3\sqrt{42}};\frac{2\left(45-\sqrt{42}\right)}{10+3\sqrt{42}};\frac{4\sqrt{42}-35}{10+3\sqrt{42}}\right)$.

Bài 4 Giả sử $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$. Khi đó phương trình của (α) có dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Vì (α) đi qua M nên ta có: $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=1$ (1)

1. Ta có: M là trọng tâm tam giác $\Leftrightarrow a=3, b=12, c=27$

Nên phương trình của $(\alpha): \frac{x}{3}+\frac{y}{12}+\frac{z}{27}=1 \Leftrightarrow 36x+9y+4z-108=0$

2. Thể tích khối tứ diện $OABC$ là: $V=\frac{1}{6}abc$

Từ (1), áp dụng BĐT Cô si ta có: $1=\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{36}{abc}} \Rightarrow abc\geq 27.36$

Suy ra $V\geq 6.27=162$. Đẳng thức xảy ra

$\Leftrightarrow \frac{1}{a}=\frac{4}{b}=\frac{9}{c}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow a=3, b=12, c=27$.

Vậy phương trình $(\alpha): 36x+9y+4z-108=0$.

3. Gọi H là hình chiếu của O lên mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow d\left(O,(ABC)\right)=OH\leq OM$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow H\equiv M$ hay mặt phẳng (α) đi qua M và nhận $\overrightarrow{OM}$ làm VTPT nên phương trình $(\alpha): x+4y+9z-98=0$.

4. Ta có: $\begin{cases} OA+OC=4OB \\ OA=OB+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=4b \\ a=b+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=3b-9 \\ a=b+9 \end{cases}$ thay vào (1) ta có được:

$\frac{1}{b+9}+\frac{4}{b}+\frac{3}{b-3}=1 \Leftrightarrow (b-9)(b^2+7b-12)=0 \Leftrightarrow b=9, b=\frac{-7+\sqrt{97}}{2}$

- $b=9$ ta có phương trình $(\alpha): x+2y+z-18=0$
- $b=\frac{-7+\sqrt{97}}{2}$ ta có phương trình

$(\alpha): \frac{-39-3\sqrt{97}}{36}x+\frac{7+\sqrt{97}}{24}y+\frac{11-\sqrt{97}}{12}-1=0$.

Bài 5

1. Giả sử mặt cầu (S) ngoại tiếp hình chóp $OABC$ có phương trình:

$$x^2+y^2+z^2-2mx-2ny-2pz+q=0.$$

Thay tọa độ các điểm O, A, B, C vào ta có:

$$\begin{cases} a^2 - 2ma + q = 0 \\ b^2 - 2nb + q = 0 \\ c^2 - 2cp + q = 0 \\ p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{a}{2};\quad n = \dfrac{b}{2} \\ p = \dfrac{c}{2};\quad q = 0 \end{cases}$$

Suy ra tâm của mặt cầu (S) là $I(\frac{a}{2};\frac{b}{2};\frac{c}{2})$ và bán kính

$R = IO = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Áp dụng BĐT Côsi ta có: $a^2 + \frac{27}{8a} + \frac{27}{8a} \geq \frac{27}{4} \Leftrightarrow a^2 + \frac{27}{4a} \geq \frac{27}{4}$.

Ta cũng có hai BĐT tương tự : $b^2 + \frac{27}{4b} \geq \frac{27}{4}$; $c^2 + \frac{27}{4c} \geq \frac{27}{4}$.

Cộng ba BĐT này lại với nhau ta được:

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{27}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \frac{81}{4} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{27}{4} \Rightarrow R \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{3}{2}$. Vậy $\min R = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

2. Ta có thể tích của tứ diện $OABC$ là: $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc$.

Diện tích toàn phần của tứ diện :

$$S_{tp} = \frac{1}{2}(ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2})$$

Suy ra $r = \dfrac{3V}{S_{tp}} = \dfrac{abc}{ab + bc + ca + \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$

Từ giả thiết bài toán ta suy ra $ab + bc + ca = 2abc$.

Mặt khác: $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq \frac{1}{3}(ab + bc + ca)^2$

Nên $r \le \dfrac{abc}{2abc + \dfrac{2}{\sqrt{3}}abc} = \dfrac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}$.

Mặt khác: $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 < (ab+bc+ca)^2 = (2abc)^2 \Rightarrow r > \dfrac{abc}{4abc} = \dfrac{1}{4}$.

Bài 6

1. Gọi trọng tâm của tam giác ABC là $G(1;\ -1;\ 0)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ nên $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = 3\left|\overrightarrow{MG}\right|$, nên $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất. Mà $\mathrm{M} \in (\mathrm{P})$ nên điểm M cần tìm là hình chiếu của G trên (P).

Giả sử $M(x;\ y;\ z)$ thì $\overrightarrow{IM} = (x-1;\ y+1;\ z)$

Nên từ $\begin{cases} \overrightarrow{IM} = t.\overrightarrow{n_P} \\ M \in (P) \end{cases}$ ta có $\begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{2} \\ x - 2y + 2z + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(0;\ 1;\ -2)$.

Vậy điểm $M(0;\ 1;\ -2)$ là điểm cần tìm.

2. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$

Gọi $J(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{JA} - 4\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$.

Ta có: $\overrightarrow{JA} = (1-a;\ -b;\ -1-c), \overrightarrow{JB} = (2-a;\ -2-b;\ 1-c), \overrightarrow{JC} = (-a;\ -1-b;\ -c)$

Nên $2\overrightarrow{JA} - 4\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = (-6-a;\ 5-b;\ -6-c)$, suy ra $J(-6;\ 5;\ -6)$.

Vì $2\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MJ} + 2\overrightarrow{JA} - 4\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{MJ}$ nên biểu thức $\left|2\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MJ lớn nhất.

Ta có $\overrightarrow{IJ} = \left(-7;4;-7\right) \Rightarrow JI : \begin{cases} x = 1 - 7t \\ y = 1 + 4t \\ z = 1 - 7t \end{cases}$ thay vào phương trình (S) ta có

$$49t^2+16t^2+49t^2=\frac{57}{2}\Leftrightarrow t=\pm\frac{1}{2}$$

Suy ra IJ cắt (S) tại hai điểm $E\left(-\frac{5}{2};3;-\frac{5}{2}\right)$, $F\left(\frac{9}{2};-1;\frac{9}{2}\right)$

Do $JE<JF$ nên JM lớn nhất $\Leftrightarrow M\equiv F$

Vậy $M\left(\frac{9}{2};-1;\frac{9}{2}\right)$ là điểm cần tìm.

Bài 7

1. Mặt cầu (S_1) có tâm $I_1(3;\ 6;\ -6)$, $R_1=3$. (S_2) có tâm $I_2(0;\ 0;\ 0)$ và bán kính $R_2=3$.

Ta có $\overrightarrow{I_2I_1}(3;\ 6;\ -6)\Rightarrow I_2I_1=9>R_1+R_2$.
Hai mặt cầu có bán kính bằng nhau, nên mặt cầu cần tìm có tâm I là trung điểm của $I_2I_1\Rightarrow I\left(\frac{3}{2};\ 3;\ -3\right)$, bán kính $R=\frac{I_2I_1}{2}+R_1=\frac{15}{2}$ (mặt cầu (S) tiếp xúc trong với (S_1) và (S_2)).

Phương trình $(S):\ x^2+y^2+z^2-3x-6y+6z-36=0$.

2. $A(3;\ -2;\ 1)$, $d:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$.

a) Ta có $\overrightarrow{AB}(-1;\ 3;\ -2)$. Giả sử Δ cắt d tại $M(1+t;\ 2t-1;\ 1-t)$.
Đường thẳng Δ có véc tơ chỉ phương là $\overrightarrow{AM}(t-2;\ 2t+1;\ -t)$.

Khoảng cách giữa B và Δ là $d(B,\ \Delta)=\sqrt{\frac{35t^2-70t+45}{6t^2+5}}$.

Giá trị lớn nhất là $\sqrt{14}$ khi $t=-\frac{5}{7}$ nên đường thẳng cần tìm

$$\Delta:\ \frac{x-3}{19}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-5}.$$

Giá trị nhỏ nhất là $\frac{\sqrt{30}}{6}$ khi $t=\frac{7}{6}$ nên đường thẳng cần tìm

$$\Delta:\ \frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{-20}=\frac{z-1}{7}.$$

b) Δ' qua $N(1;\ 2;\ -1)$ và véc tơ chỉ phương $\vec{u}_{\Delta'}(2;\ -1;\ 2)$.

Ta có $\overrightarrow{AN}(-2;\ 4;\ -2)$, $\overrightarrow{AM}(t-2;\ 2t+1;\ -t)$ nên

$$\left[\vec{u}_{\Delta'},\ \overrightarrow{AM}\right] = (-3t-2;\ 4t-4;\ 5t).$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng là

$$d(\Delta;\Delta') = \frac{\left|\left[\vec{u}_{\Delta'},\ \overrightarrow{AM}\right].\overrightarrow{AN}\right|}{\left|\left[\vec{u}_{\Delta'},\ \overrightarrow{AM}\right]\right|} = \frac{12}{\sqrt{10}}.\sqrt{\frac{(t-1)^2}{5t^2-2t+2}}.$$

Giá trị lớn nhất của $d(\Delta;\Delta')$ là $2\sqrt{2}$ khi $t = -\frac{1}{4}$, hay đường thẳng cần tìm có phương trình $\Delta: \frac{x-3}{-9} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$.

c) $\overrightarrow{AM}(t-2;\ 2t+1;\ -t)$, $\vec{n}_{(P)}(5;\ 2;\ -3)$. Ta có

$$\sin(\Delta,(P)) = \left|\cos(\overrightarrow{AM},\ \vec{n}_{(P)})\right| = \frac{4|3t-2|}{\sqrt{38}.\sqrt{6t^2+5}}.$$

Giá trị lớn nhất của góc giữa Δ và mặt phẳng (P) là $\arcsin\frac{46}{\sqrt{95}}$

khi $t = -\frac{5}{4}$, hay đường thẳng cần tìm có phương trình là

$\Delta: \frac{x-3}{13} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-1}{-5}$.

Bài 8.

1. Phương trình mặt phẳng (P) qua M có dạng

$$(P):\ A(x-1) + B(y+2) + Cz = 0,\ A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Vì (P) qua N nên $C = A + 2B$.

Ta có $\overrightarrow{n_P} = (A;\ B;\ A+2B)$, $\overrightarrow{n_Q} = (1;\ 2;\ 2)$ là VTPT của (P) và (Q) nên góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) là φ thỏa mãn

- Nếu $B = 0$ thì $A \neq 0$ nên $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

• Nếu $B \neq 0$ thì đặt $t = \frac{A}{B}$, $t \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{(t+2)^2}{2t^2+4t+5}} = \sqrt{f(t)},\ f(t) = \frac{(t+2)^2}{2t^2+4t+5}.$$

Ta tìm được $\max f(t) = \frac{5}{6}$ khi $t = \frac{1}{2}$, hay $A = \frac{1}{2}B$. Chọn $B = 2$ thì $A = 1$ và $C = 5$.

Hay phương trình $(P): x + 2y + 5z + 3 = 0$.

2. Tương tự câu 1) ta có phương trình mặt phẳng (P) là

$$A(x-1) + B(y+2) + (A+2B)z = 0, A^2 + B^2 + (A+2B)^2 > 0.$$

Ta có $\overrightarrow{u_{d'}} = (2;\ -1;\ 2)$ là VTCP của d' nên góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d' là α thỏa mãn

$$\sin\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{u_{d'}}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{u_{d'}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{u_{d'}}\right|} = \frac{|4A+3B|}{3.\sqrt{A^2+B^2+(A+2B)^2}} = \frac{1}{3}.\sqrt{\frac{(4A+3B)^2}{2A^2+4AB+5B}}$$

• Nếu $B = 0$ thì $A \neq 0$ nên $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

• Nếu $B \neq 0$ thì đặt $t = \frac{A}{B}$, $t \in \mathbb{R}$ ta có:

$$\sin\alpha = \frac{1}{3}.\sqrt{\frac{(4t+3)^2}{2t^2+4t+5}} = \sqrt{f(t)},\ f(t) = \frac{(4t+3)^2}{2t^2+4t+5}.$$

Ta tìm được $\max f(t) = \frac{25}{3}$ khi và chỉ khi $t = -7$, hay $A = -7B$.

Tức là $(P): 7x - y + 5z - 9 = 0$.

Bài 9.

1. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên d và (P). Ta có $d(A,(P)) = AH \leq AK$

Mà AK không đổi nên $d(A,(P))$ lớn nhất khi và chỉ khi $H \equiv K$

Do đó (P) là mặt phẳng đi qua K và nhận $\overrightarrow{AK}$ làm VTPT

Ta tìm được $K\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3};\frac{10}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AK}=\left(-\frac{5}{3};-\frac{13}{3};\frac{4}{3}\right)$

Vậy phương trình $(P): 5x+13y-4z+21=0$.

2. Vì (Q) chứa d nên phương trình của (Q) có dạng:

$$ax+(a-2c)y+cz+a-4c=0$$

Gọi $\alpha=\left((P),(Oxy)\right)$, ta có: $\cos\alpha=\frac{|c|}{\sqrt{2a^2-4ac+5c^2}}$

Nếu $c=0 \Rightarrow \cos\alpha=0$. Với $c\neq 0$ ta có: $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{a}{c}-1\right)^2+3}}\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$

Nên α nhỏ nhất $\Leftrightarrow \frac{a}{c}=1 \Leftrightarrow a=c$ ta chọn $c=1 \Rightarrow a=1$

Vậy phương trình $(Q): x-y+z-3=0$.

3. Phương trình $(R): ax+(a-2c)y+cz+a-4c=0$. Gọi $\beta=\left(Oy,(R)\right)$

Ta có: $\sin\beta=\frac{|a-2c|}{\sqrt{2a^2-4ac+5c^2}}=\sqrt{\frac{a^2-4ac+4c^2}{2a^2-4ac+5c^2}}$

Nếu $c=0 \Rightarrow \sin\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Nếu $c\neq 0$, đặt $t=\frac{a}{c}$ và khảo sát hàm số $f(t)=\frac{t^2-4t+4}{2t^2-4t+5}$ ta tìm được

$\max f(t)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{6}$, suy ra β lớn nhất $\Leftrightarrow \frac{a}{c}=-\frac{1}{2}$

Chọn $c=-1 \Rightarrow a=1$. Phương trình $(R): x+5y-2z+9=0$.

Bài 10.

Ta thấy các điểm A, C nằm cùng phía và A, B nằm khác phía so với (P).

1. Ta có $MA + MB \geq AB$ và A, B nằm khác phía so với (P) nên

$\min(MA + MB) = AB$ khi và chỉ khi $M = AB \cap (P)$.

Phương trình đường thẳng AB : $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad (t \in R)$.

Ta có $M \in AB \Rightarrow M(1-3t;\ -1+2t;\ 2-2t)$, mà $M \in (P)$ nên

$$2(1-3t) - (-1+2t) - (2-2t) + 3 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$$

Vậy $M\left(-1;\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right)$ là điểm cần tìm.

2. Ta có $|MA - MC| \leq AB$ và A, C nằm cùng phía so với (P) nên

$\max\left(|MA - MB|\right) = AC$ khi và chỉ khi $M = AC \cap (P)$.

Tọa độ điểm M thỏa mãn hệ phương

trình: $\begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{-1} \\ 2x - y - z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(-1;\ -3;\ 4)$.

Vậy $M(-1;\ -3;\ 4)$ là điểm cần tìm.

3. Gọi $H(x;\ y;\ z)$ là hình chiếu của điểm A trên mặt phẳng (P).

Ta tìm được $H\left(-\frac{1}{3};\ -\frac{1}{3};\ \frac{8}{3}\right)$.

Gọi A' đối xứng với A qua mặt phẳng (P), suy ra $A'\left(-\frac{5}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{10}{3}\right)$.

Vì A, C ở cùng phía so với (P) nên A', C ở khác phía so với (P).

Ta có $MA + MC = MA' + MC \geq A'C$ nên $\min(MA + MC) = A'C$ khi và chỉ khi

$M = A'C \cap (P)$.

Do $\overrightarrow{A'C} = \frac{1}{3}(11;\ -1;\ -7)$ nên $A'C:\ \frac{x-2}{11} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-7}$.

Từ đó ta tìm được tọa độ điểm $M\left(-\frac{1}{5};\ \frac{1}{5};\ \frac{12}{5}\right)$.

4. Gọi A' đối xứng với A qua (P) thì $A'\left(-\frac{5}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{10}{3}\right)$.

Vì A, B ở khác phía so với (P) nên A', B ở cùng phía so với (P).

Ta có $|MA - MB| = |MA' - MB| \le A'B$ nên $\max\left(|MA - MB|\right) = A'B$ khi và chỉ khi $M = A'B \cap (P)$.

Do $\overrightarrow{A'B} = -\frac{1}{3}(1;\ -2;\ 10)$ nên $A'B:\ \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{10}$.

Suy ra tọa độ điểm M cần tìm là $M\left(-\frac{7}{3};\ \frac{5}{3};\ -\frac{10}{3}\right)$.

Bài 11.

1. Gọi $\overrightarrow{u_d} = (a;\ b;\ c)$ là VTCP của d, trong đó $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

Vì $d \perp \Delta$ nên $\vec{u}_d.\vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow a - 2b + c = 0 \Leftrightarrow c = -a + 2b$.

Vì d' qua $M(0;\ -1;\ 1)$ và có $\overrightarrow{u_{d'}} = (2;\ -2;\ -1)$.

Ta có: $\left[\overrightarrow{u_{d'}}, \overrightarrow{u_d}\right] = (2a - 3b;\ a - 4b;\ 2a + 2b)$.

Do đó khoảng cách giữa hai đường thẳng là

$$d(d',\ d) = \frac{\left|\left[\vec{u}_{d'}, \vec{u}_d\right].\overrightarrow{OM}\right|}{\left|\left[\vec{u}_{d'}, \vec{u}_d\right]\right|} = \frac{|a + 6b|}{\sqrt{(2a - 3b)^2 + (a - 4b)^2 + (2a + 2b)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a + 6b)^2}{9a^2 - 12ab + 29b^2}}$$

- Nếu $b = 0$ thì $a \ne 0$ nên $d(d'; d) = \frac{1}{3}$.
- Nếu $b \ne 0$ thì đặt $t = \frac{a}{b}, t \in \mathbb{R}$, khi đó:

$$d(d',\, d)=\sqrt{\frac{(t+6)^2}{9t^2-12t+29}}=\sqrt{f(t)},\ f(t)=\frac{(t+6)^2}{9t^2-12t+29}.$$

Ta có $f'(t)=\dfrac{2(t+6)(65-60t)}{(9t^2-124t+29)^2}$; $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=-6;\ t=\dfrac{13}{12}$.

Vì $f(-6)=0;\ f\left(\dfrac{13}{12}\right)=\dfrac{17}{9};\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(t)=\dfrac{1}{9}$ nên $\max f(t)=\dfrac{17}{9}$ khi và chỉ khi $t=\dfrac{13}{12}$.

So sánh các trường hợp ta có $\max(d(d',\, d))=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$ khi $b=12; a=13; c=11,$ hay phương trình đường thẳng cần tìm là

$d:\ \dfrac{x}{13}=\dfrac{y}{12}=\dfrac{z}{11}$.

2. Ta có $\overrightarrow{AB}(-3;\ 3;\ 0),\ \overrightarrow{BC}(0;\ -3;\ 3),\ \overrightarrow{CA}(3;\ 0;\ -3)$ nên $AB=BC=CA=3\sqrt{2}$.

Tam giác ABC là tam giác đều. Các điểm A, B, C thuộc đường tròn (C).

Đường tròn (C) là giao của mặt cầu (S) có tâm $I(1;\ 1;\ 2)$, bán kính $R=3$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-7=0$.

Tâm J của đường tròn (C) là trọng tâm tam giác ABC nên $J(2;\ 2;\ 3)$.

Bán kính của đường tròn (C) là $r=\sqrt{R^2-IJ^2}=\sqrt{6}$.

Bài toán trở thành bài toán hình phẳng: Xét tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn $(J, \sqrt{6})$. Tìm điểm $M\in(C)$ sao cho $MA+MB+MC$ đạt giá trị lớn nhất.

Giả sử M thuộc cung BC, khi đó $MA=MB+MC$.

Vì vậy $MA+MB+MC=2MA\le 2.2r=4\sqrt{6}$.

Dấu đẳng thức có khi M đối xứng với A qua J, nên $M(0;\ 3;\ 4)$.

Tương tự cho trường hợp M thuộc cung $CA,\ AB$ ta tìm được các điểm tương ứng là $M(3;\ 0; 1),\ M(3;\ 3;\ 1)$.

Vậy giá trị lớn nhất của $MA+MB+MC$ là $4\sqrt{6}$, đạt được khi điểm M là một trong ba điểm $M(0;\ 3;\ 4),\ M(3;\ 0; 1),\ M(3;\ 3;\ 1)$.

Bài 12. Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ thì (ABC) có phương trình là

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$

1. Mặt phẳng cần tìm $\frac{x}{-6}+\frac{y}{9}+\frac{z}{3}=1.$

2. Mặt phẳng cần tìm $5x-3y-2z-38=0.$

3. $d(O,(ABC))\le OM$. Mặt phẳng (ABC) có phương trình

$$x-2y+3z-14=0.$$

4. Có ba mặt phẳng thỏa mãn

$$x+y+z-6=0,\ x-y+z-2=0,\ x-y-z+4=0.$$

5. Mặt phẳng (ABC) có dạng $\frac{x}{-2}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$

Vì $P(2;3;1)\in(ABC)$ nên $\frac{2}{-2}+\frac{3}{b}+\frac{1}{c}=1 \Leftrightarrow \frac{3}{b}+\frac{1}{c}=2$ (1).

Vì $OB=1+2OC$ nên $|b|=1+2|c|$ (2).

Giải hệ phương trình (1) và (2) ta có các mặt phẳng thỏa mãn là

$\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{1}=1,\ \frac{x}{-2}-\frac{2y}{3}+4z=1.$

Bài 13. $(P): x-y+z+1=0$ và $A(1;1;1),\ B(0;1;2), C(-2;0;1).$

1. Vì $M(x;\ 1;\ z)\in(P)$ nên $x=-z.$ Từ $MA=MB$ suy ra $x-z+1=0.$

Vậy tọa độ điểm M cần tìm là $M\left(-\frac{1}{2};\ 1;\ \frac{1}{2}\right).$

2. Gọi $N(a;\ b;\ c)$ thì $a-b+c+1=0.$ Ta có

$$T=2NA^2+NB^2+NC^2=3(2a^2+b^2+c^2)-6b-10c+16$$

$$=6\left(a+\frac{1}{3}\right)^2+3\left(b-\frac{5}{3}\right)^2+3(c-1)^2+8\ge 8.$$

Khi đó điểm N có tọa độ $N\left(-\frac{1}{3};\frac{5}{3};1\right).$

Bài 14.

1. Cách 1: Phương pháp hình học.

Theo chứng minh trong phần phương pháp ta có

Đường thẳng d đi qua A và cách B khoảng lớn nhất là đường thẳng có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_d=\left[\vec{n}_{(P)},\overrightarrow{AB}\right].$

Vì $\vec{n}_{(P)}(1;\ 2;\ -1)$, $\overrightarrow{AB}(-1;\ 2;\ -3)$ nên $\vec{u}_d = 4(-1;\ 1;\ 1)$.

Phương trình đường thẳng cần tìm là $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$.

Đường thẳng d đi qua A và cách B khoảng nhỏ nhất là đường thẳng có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_d = \left[\vec{n}_{(P)}, \left[\vec{n}_{(P)}, \overrightarrow{AB}\right]\right]$.

Vì $\vec{n}_{(P)}(1;\ 2;\ -1)$, $\overrightarrow{AB}(-1;\ 2;\ -3)$ nên $\left[\vec{n}_{(P)}, \overrightarrow{AB}\right] = 4(-1;\ 1;\ 1)$, do đó $\vec{u}_d = 12(1;\ 0;\ 1)$.

Phương trình đường thẳng cần tìm là $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Cách 2: Phương pháp hàm số.

Gọi véc tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_d = (a;\ b;\ c)$, trong đó $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

Vì $d \subset (P)$ nên $\vec{u}_d.\vec{n}_{(P)} = 0 \Leftrightarrow a + 2b - c = 0 \Leftrightarrow c = a + 2b$.

Vì $\overrightarrow{AB}(-1;\ 2;\ -3)$ nên $\left[\vec{u}_d, \overrightarrow{AB}\right] = (-2a - 7b;\ 2a - 2b;\ 2a + b)$, do đó khoảng cách từ B đến đường thẳng d là

$$d(B,\ d) = \frac{\left|\left[\vec{u}_d, \overrightarrow{AB}\right]\right|}{\left|\vec{u}_d\right|} = \sqrt{\frac{(2a+7b)^2 + (2a-2b)^2 + (2a+b)^2}{a^2 + b^2 + (a+2b)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{12a^2 + 24ab + 54b^2}{2a^2 + 4ab + 5b^2}}$$

Nếu $b = 0$ thì $a \neq 0$ nên $d(B; d) = \sqrt{6}$.

Nếu $b \neq 0$ thì đặt $t = \dfrac{a}{b}, t \in \mathbb{R}$, khi đó

$$d(B,\ d) = \sqrt{\frac{12t^2 + 24t + 54}{2t^2 + 4t + 5}} = \sqrt{f(t)},\ f(t) = \frac{12t^2 + 24t + 54}{2t^2 + 4t + 5}.$$

Ta có: $f(t) = 6 + \dfrac{24}{2t^2 + 4t + 5} = 6 + \dfrac{24}{2(t+1)^2 + 3} \Rightarrow 6 < f(t) \le 14$

Hay $\sqrt{6} < d(B;\ d) \le \sqrt{14}$.

Kết hợp các trường hợp, ta được $\sqrt{6} \le d(B;\ d) \le \sqrt{14}$.

Giá trị nhỏ nhất của $d(B;\, d)$ là $\sqrt{6}$, đạt được khi $b=0$, chọn $a=1$ thì có $c=1$ nên phương trình đường thẳng cần tìm là $d:\begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R}).$

Giá trị lớn nhất của $d(B;\, d)$ là $\sqrt{14}$, đạt được khi $a=-b$, chọn $b=-1$ thì $a=1;\ c=-1$ nên phương trình đường thẳng cần tìm là:

$d:\ \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}.$

2. Đường thẳng d qua A và song song với (Q) tức là d nằm trong mặt phẳng $(P): 2x-y-z-1=0.$

Cách 1: Phương pháp hình học tổng hợp.

Góc giữa d và d' lớn nhất bằng 90^0, khi đó d có một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_d=\left[\vec{u}_{d'},\, \vec{n}_{(Q)}\right]=(4;\,5;\,3).$

Phương trình đường thẳng $d:\ \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-2}{3}.$

Góc giữa d và d' nhỏ nhất khi d đi qua A và song song với hình chiếu của d' trên mặt phẳng (P).

Một véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_d=\left[\vec{n}_{(Q)},\left[\vec{u}_{d'},\, \vec{n}_{(Q)}\right]\right]=2(1;\,-5;\,7).$

Phương trình đường thẳng $d:\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-2}{7}.$

Cách 2: Phương pháp hàm số.

Gọi véc tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}_d=(a;\,b;\,c)$, trong đó $a^2+b^2+c^2>0.$

Vì $d\,//(Q)$ nên $\vec{u}_d.\vec{n}_{(Q)}=0 \Leftrightarrow 2a-b-c=0 \Leftrightarrow c=2a-b.$

Ta có $\vec{u}_{d'}=(1;\,-2;\,2)$ nên góc φ của hai đường thẳng thỏa mãn

$$\cos\varphi=\left|\cos(\vec{u}_d;\,\vec{u}_{d'})\right|=\frac{|5a-4b|}{3\sqrt{5a^2-4ab+2b^2}}$$

Nếu $b=0$ thì $a\neq 0$ nên $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{5}}{3}.$

Nếu $b\neq 0$ thì đặt $t=\dfrac{a}{b}, t\in\mathbb{R}$, khi đó

$$\cos\varphi=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{(5t-4)^2}{5t^2-4t+2}}=\frac{1}{3}\sqrt{f(t)},\ f(t)=\frac{(5t-4)^2}{5t^2-4t+2}.$$

Ta có $f'(t)=\dfrac{2(5t-4)(10t+2)}{(5t^2-4t+2)^2}$ nên ta tìm được

$$\max f(t)=f\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{25}{3},\ \min f(t)=f\left(\frac{4}{5}\right)=0.$$

Giá trị nhỏ nhất của φ là $\arccos\dfrac{5}{3\sqrt{3}}$, khi $t=-\dfrac{1}{5}$, hay $b=-5;\ a=1;\ \ c=7.$

Phương trình đường thẳng cần tìm $d:\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-5}=\dfrac{z-2}{7}.$

Giá trị lớn nhất của φ là 90^0, khi $t=\dfrac{4}{5}$, hay $b=5;\ a=4;\ c=3.$ Phương trình đường thẳng cần tìm $d:\ \dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z-2}{3}.$

3. Giả sử d cắt d' tại điểm M thì $M(1+2t;\ 2+t;\ -2-t),\ t\in\mathbb{R}.$

Véc tơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{AM}(2t+2;\ t+2;\ -1-t).$

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}_{\Delta}(-1;\ 2;\ 2).$

Gọi góc giữa đường thẳng Δ và đường thẳng d là φ. Ta có

$$\cos\varphi=\left|\cos(\vec{u}_{\Delta},\overrightarrow{AM})\right|=\frac{\left|-1.(1+2t)+2.(2+t)+2.(-2-t)\right|}{3.\sqrt{(2t+2)^2+(t+2)^2+(-1-t)^2}}$$

$$=\frac{|2t|}{3.\sqrt{6t^2+14t+9}}=\frac{2}{3}.\sqrt{\frac{t^2}{6t^2+14t+9}}=\frac{2}{3}.\sqrt{f(t)}$$

Trong đó $f(t)=\dfrac{t^2}{6t^2+14t+9}.$

Ta có $f'(t)=\dfrac{2t(7t+9)}{(6t^2+14t+9)^2}$, do đó dễ dàng tìm được

$$\min f(t)=f(0)=0,\max f(t)=f\left(-\frac{9}{7}\right)=\frac{9}{5}.$$

Vì với $\varphi\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ thì hàm số $y=\cos\varphi$ nghịch biến, nên

Giá trị lớn nhất của φ là $\dfrac{\pi}{2}$ đạt được khi $t=0\Rightarrow\overrightarrow{AM}(2;\ 2;\ -1),$

hay đường thẳng d là $d:\ \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{-1}.$

Giá trị nhỏ nhất của φ là $\arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ đạt được khi $t=-\dfrac{9}{7}$, suy ra

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{7}(-4;\ 5;\ 2)$, hay đường thẳng d là $d: \frac{x+1}{-4} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{2}$.

Bài 15. $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$, $A(1;\ 4;\ 2), B(-1;\ 2;\ 4)$.

1. Hình chiếu của A trên d là $H\left(-\frac{2}{3};\ -\frac{1}{3};\ \frac{10}{3}\right)$.

Phương trình mặt phẳng cần tìm $(P):\ 5x+13y-4z+21=0$.

2. Gọi véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)}(a;\ b;\ c)$.

$$\cos((P),\ (Oxy)) = \frac{|c|}{\sqrt{a^2+(a-2c)^2+c^2}} \le \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Đẳng thức có khi $(P):\ x-y+z-3=0$.

3. Gọi véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)}(a;\ b;\ c)$.

$$\sin((P),\ Oy) = \frac{|a-2c|}{\sqrt{a^2+(a-2c)^2+c^2}} \le \frac{\sqrt{30}}{6}.$$

Đẳng thức có khi $(P):\ x+5y-2z+9=0$.

Vấn đề 2.

Bài 1

1. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3;-5;-1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1;-1;-3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (14;-8;-2)$

Suy ra phương trình mặt phẳng (ABC) là: $7x-4y-z-1=0$.

2. Ta có

$$(\alpha)//(ABC) \Leftrightarrow \frac{2a+b}{7} = \frac{3a+2b}{-4} = \frac{-1}{-1} \ne \frac{1}{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=7 \\ 3a+2b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=18 \\ b=-29 \end{cases}$$

3. Gọi $E(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{AE}+4\overrightarrow{BE}-3\overrightarrow{CE}=\vec{0}$ (*)

Vì $2\overrightarrow{AE} = (2x-4;2y-6;2z-2)$; $4\overrightarrow{BE} = (4x+4;4y+8;4z)$;

$-3\overrightarrow{CE} = (-3x+3;-3y+6;-3z-6)$

Suy ra $2\overrightarrow{AE}+4\overrightarrow{BE}-3\overrightarrow{CE} = (3x+3;3y+8;3z-8)$

Do đó (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+3=0 \\ 3y+8=0 \\ 3z-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-\dfrac{8}{3} \\ z=\dfrac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow E\left(-1;-\dfrac{8}{3};\dfrac{8}{3}\right)$.

Khi đó: $S=2\left(\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{EM}\right)^2+4\left(\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{EM}\right)^2-3\left(\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{EM}\right)^2$

$=3EM^2+2EA^2+4EB^2-3EC^2+2\overrightarrow{EM}\left(2\overrightarrow{AE}+4\overrightarrow{BE}-3\overrightarrow{CE}\right)$

$=3EM^2+2EA^2+4EB^2-3EC^2$

Vì $2EA^2+4EB^2-3EC^2$ không đổi nên S nhỏ nhất $\Leftrightarrow EM$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của E lên mặt phẳng (β).

Gọi $M(x;y;z)$, ta có: $\overrightarrow{EM}=\left(x+1;y+\dfrac{8}{3};z-\dfrac{8}{3}\right)$

Do $EM\perp(P)\Rightarrow\overrightarrow{EM}=k.\vec{n}$ (Trong đó $\vec{n}=(3;1;-1)$ là VTPT của (β))

Suy ra $\begin{cases} x=3k-1 \\ y=k-\dfrac{8}{3} \\ z=-k+\dfrac{8}{3} \end{cases}$.

Mặt khác

$M\in(\beta)\Rightarrow 3(3k-1)+\left(k-\dfrac{8}{3}\right)-\left(-k+\dfrac{8}{3}\right)+1=0\Leftrightarrow 11k-\dfrac{22}{3}=0\Leftrightarrow k=\dfrac{2}{3}$

Vậy $M(1;-2;2)$ là điểm cần tìm.

4. Gọi $K(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{AK}-5\overrightarrow{BK}+7\overrightarrow{CK}=\vec{0}$ (**)

Mà $3\overrightarrow{AE}=(3x-6;3y-9;3z-3)$; $-5\overrightarrow{BK}=(-5x-5;-5y-10;-5z)$;

$7\overrightarrow{CK}=(7x-7;7y-14;7z+14)$

Suy ra $(**) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-18=0 \\ 5y-33=0 \\ 5z+11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{18}{5} \\ y=\dfrac{33}{5} \\ z=-\dfrac{11}{5} \end{cases} \Rightarrow K\left(\dfrac{18}{5};\dfrac{33}{5};-\dfrac{11}{5}\right)$.

Khi đó $P=5\left|\overrightarrow{NK}\right|=5NK$, suy ra P nhỏ nhất $\Leftrightarrow N$ là hình chiếu của K lên (γ)

Từ đó ta tìm được $N\left(3;6;-2\right)$.

Bài 2

1. Gọi tọa độ điểm M là $M(x;\ y;\ z)$, ta có $\overrightarrow{AM}(x+2;\ y-3;\ z-1)$ và $\overrightarrow{BM}=(x-5;\ y+2;\ z-7)$, $\overrightarrow{CM}=(x-1;\ y-8;\ z+1)$ nên

$$MA^2=(x+2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2$$
$$MB^2=(x-5)^2+(y+2)^2+(z-7)^2$$
$$MC^2=(x-1)^2+(y-8)^2+(z+1)^2$$

Do đó đẳng thức $MA^2+MB^2=MC^2$ tương đương với

$$(x+2)^2+(y-3)^2+(z-1)^2+(x-5)^2+(y+2)^2+(z-7)^2$$
$$=(x-1)^2+(y-8)^2+(z+1)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x+14y-18z+26=0$$

Vậy tập hợp điểm M là mặt cầu tâm $I(2;\ -7;\ 9)$, bán kính $R=6\sqrt{3}$.

2. Tương tự câu 1, ta có $\overrightarrow{AB}=(7;\ -5;6)$ nên

$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=(x+9;\ y-8;\ z+5)$, $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=(2x-6;\ 2y-6;\ 2z-6)$

Nên $\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}\right|$

$$\Leftrightarrow (x+9)^2+(y-8)^2+(z+5)^2=(2x-6)^2+(2y-6)^2+(2z-6)^2$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+3y^2+3z^2-42x-8y-34z-62=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-14x-\frac{8}{3}y-\frac{34}{3}z-\frac{62}{3}=0$$

Vậy tập hợp điểm M là mặt cầu tâm $I\left(7;\ \frac{4}{3};\ \frac{17}{3}\right)$, bán kính $R=\frac{\sqrt{935}}{3}$.

Bài 3

1. Gọi trọng tâm của tam giác ABC là $G(1;\ 2;\ 2)$.

Khi đó $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ nên

$$MA^2+MB^2+MC^2=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$$

$$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$$

Do đó $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất, hay M là hình chiếu của G trên (P).

Ta tìm được điểm $M(4;\ -1;\ 0)$ là điểm cần tìm.

2. Gọi $E(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{EB}-4\overrightarrow{EC}=\vec{0},$ ta tìm được tọa độ điểm

$E(7;-16;-7)$.

Ta có: $MA^2+2MB^2-4MC^2=-MG^2+GA^2+2GB^2-4GC^2$

Nên $MA^2+2MB^2-4MC^2$ lớn nhất khi M là hình chiếu của điểm E trên mặt phẳng (P).

Tọa độ điểm M thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{x-7}{3}=\frac{y+16}{-3}=\frac{z+7}{-2}\\ 3x-3y-2z-15=0\end{cases}\Rightarrow M\left(-\frac{25}{11};\ -\frac{74}{11};\ -\frac{9}{11}\right).$$

Bài 4 Vì điểm $M\in\Delta$ nên $M(1-t;\ -2+t;\ 2t), t\in\mathbb{R}$.

1. Ta có $\overrightarrow{MA}(t;\ 6-t;\ 2-2t),\ \overrightarrow{MB}(t-2;\ 4-t;\ 4-2t)$. Nên

$$T=MA^2+MB^2=t^2+(6-t)^2+(2-2t)^2+(t-2)^2+(4-t)^2+(4-2t)^2$$

$$=12t^2-48t+76=12(t-2)^2+28\geq 28\quad\forall t\in\mathbb{R}.$$

Hay giá trị nhỏ nhất của $T=28$ khi $t=2$, hay $M(-1;\ 0;\ 4)$.

Vậy $M(-1;\ 0;\ 4)$ là điểm cần tìm

2. Ta có $\overrightarrow{OM}=(1-t;\ -2+t;\ 2t), \overrightarrow{AM}=(-t;\ t-6;\ 2t-2),\ \overrightarrow{BM}=(2-t;\ t-4;\ 2t-4).$

Do đó $\vec{w}=3\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{AM}-4\overrightarrow{BM}=(-5-t;\ t-2;\ 2t+12).$

Nên ta có $\left|\vec{w}\right|=\sqrt{(-5-t)^2+(t-2)^2+(2t+12)^2}=\sqrt{6t^2+54t+173}$

$$=\sqrt{6\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{319}{2}}\geq\frac{\sqrt{638}}{2}\quad\forall t\in\mathbb{R}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\left|3\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{AM}-4\overrightarrow{BM}\right|$ là $\frac{\sqrt{638}}{2}$, đạt được khi $M\left(\frac{5}{2};-\frac{7}{2};-3\right)$.

3. Ta có $\overrightarrow{AM}(-t;\ t-6;\ 2t-2),\ \overrightarrow{AB}(-2;\ -2;\ 2)$ nên

$\left[\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AB}\right]=(6t-16;\ 4-2t;\ 4t-12).$

Vì thế diện tích tam giác MAB là

$$S_{MAB}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AB}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(6t-16)^2+(4-2t)^2+(4t-12)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{56\left(t-\frac{19}{7}\right)^2+\frac{24}{7}}\geq\frac{\sqrt{42}}{7}$$

Vậy $S_{\Delta MAB}$ lớn nhất $\Leftrightarrow t=\frac{19}{7}\Rightarrow M\left(-\frac{12}{7};\ \frac{5}{7};\frac{38}{7}\right)$.

Bài 5 $\overrightarrow{AB}(-5;3;-8),\overrightarrow{BC}(7;0;2),\overrightarrow{CA}(-2;-3;6).$

1. Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=47,\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}=51,\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=2$ đều dương, nên tam tam giác ABC là tam giác nhọn.

2. Từ $M(t;t;t)\Rightarrow\overrightarrow{MA}(3-t;-2-t;5-t)$ nên

$$\vec{u}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{BC}=\left(24-t;\ -2-t;\ 11-t\right)$$

$$\left|\vec{u}\right|=\sqrt{(24-t)^2+(2+t)^2+(11-t)^2}=\sqrt{3(t-11)^2+338}$$

Giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{BC}\right|$ là $13\sqrt{2}$ khi $M(11;11;11)$.

3. Ta có $f(t)=2MA^2+MB^2-4MC^2=-3t^2+24t-18$.

Hay $f(t)=30-3(t-4)^2\le 30\quad \forall t\in\mathbb{R}$.

Nên giá trị lớn nhất của $f(t)$ là 30, khi $M(4;\,4;\,4)$.

Bài 6.

1. Tọa độ của trọng tâm tam giác ABC là $G(2;4;3)$.

Gọi H là hình chiếu của G trên mặt phẳng (P), khi đó $\overrightarrow{GH}=t.\vec{n}_{(P)}$,

hay $\overrightarrow{GH}=(t;t;t)\Rightarrow H(2+t;\,4+t;\,3+t)$.

Mặt khác, điểm H thuộc mặt phẳng (P) nên

$$(2+t)+(4+t)+(3+t)-3=0\Leftrightarrow 3t+6=0\Leftrightarrow t=-2.$$

Vậy tọa độ hình chiếu của G trên mặt phẳng (P) là $H(0;2;1)$.

2. Điểm G' đối xứng với G qua mặt phẳng (P) khi và chỉ khi H là trung điểm của GG', nên

$$\begin{cases}x_G+x_{G'}=2x_H\\ y_G+y_{G'}=2y_H\\ z_G+z_{G'}=2z_H\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{G'}=2x_H-x_G\\ y_{G'}=2y_H-y_G\\ z_{G'}=2z_H-z_G\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_{G'}=-2\\ y_{G'}=0\\ z_{G'}=-1\end{cases}\Rightarrow G'(-2;0;-1).$$

Vậy tọa độ điểm G' là $G'(-2;0;-1)$.

3. Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Ta có $MA^2=\overrightarrow{MA}^2=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2=MG^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}+GA^2$.

Tương tự $MB^2=MG^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}+GB^2$, $MC^2=MG^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}+GC^2$.

Do đó $T=3MG^2+2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+GA^2+GB^2+GC^2$

$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$.

Vì thế, biểu thức T đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất, hay M là hình chiếu của điểm G trên mặt phẳng ABC.

Tọa độ điểm M cần tìm là $M\equiv H(0;2;1)$.

Bài 7. Vì điểm $M\in\Delta$ nên $M(-1+t;\,1-2t;\,2t),t\in\mathbb{R}$.

1. Ta có $\overrightarrow{MA}(2-t;\,2t-1;-1-2t)$ và

$\overrightarrow{MB}(1-t;\,1+2t;\,3-2t)$, $\overrightarrow{MC}(-t;\,-2t;\,1-2t)$

$\Rightarrow T=MA^2+2MB^2-4MC^2$

$$=-9t^2-8t+24=-\left(3t+\frac{4}{3}\right)^2+\frac{232}{9}\ge\frac{232}{9}\quad\forall t\in\mathbb{R}.$$

Giá trị nhỏ nhất của $T=\frac{232}{9}$ khi $t=-\frac{4}{3}$, hay $M\left(-\frac{13}{9};\ \frac{17}{9};\ -\frac{8}{9}\right)$.

Vậy điểm M cần tìm là $M\left(-\frac{13}{9};\ \frac{17}{9};\ -\frac{8}{9}\right)$.

2. Ta có $\overrightarrow{BC}(-1;\ -1;\ -2)$ nên $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BC}=(t-3;\ -2t;\ 2t-1)$.

Vì vậy $\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(t-3)^2+(-2t)^2+(2t-1)^2}$

$$=\sqrt{9t^2-10t+10}=\sqrt{\left(3t-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{65}{9}}\geq\frac{\sqrt{65}}{3}\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Do đó giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BC}\right|$ là $\frac{\sqrt{65}}{3}$, đạt được khi điểm

M có tọa độ $M\left(-\frac{4}{9};\ -\frac{1}{9};\ \frac{10}{9}\right)$.

Bài 8.

1. Δ_m qua $A(1;\ 0;\ -2)$ và véc tơ chỉ phương $\vec{u}_{\Delta_m}(2;\ 1-m;\ m)$.

Ta có $\overrightarrow{OA}(1;\ 0;\ -2)$ nên $\left[\overrightarrow{OA},\ \vec{u}_{\Delta_m}\right]=(2-2m;\ -4-m;\ 1-m)$.

Khoảng cách từ gốc tọa độ đến Δ_m là

$$d(O,\ \Delta_m)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{OA},\ \vec{u}_{\Delta_m}\right]\right|}{\left|\vec{u}_{\Delta_m}\right|}=\sqrt{\frac{6m^2-2m+21}{2m^2-2m+5}}.$$

Giá trị lớn nhất của $d(O,\ \Delta_m)$ bằng $\sqrt{5}$ khi $m=1$.

Giá trị nhỏ nhất của $d(O,\ \Delta_m)$ bằng $\frac{5}{3}$ khi $m=-4$.

2. Góc giữa đường thẳng Δ_m và mặt phẳng (yOz) là

$$\sin(\Delta_m,(xOy))=\left|\cos(\vec{u}_{\Delta_m},\ \vec{n}_{(xOy)})\right|=\frac{|m|}{\sqrt{2m^2-2m+5}}.$$

Giá trị lớn nhất cần tìm là $\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}$ khi $m=5$.

3. Oy qua O và có $\vec{u}_{Oy}(0;1;0)$.

Ta có $\left[\vec{u}_{Oy},\ \vec{u}_{\Delta_m}\right]=(m;\ 0;\ -2)$. Vì thế $d(Oy,\Delta_m)=\frac{|m+4|}{\sqrt{m^2+4}}\leq\sqrt{5}$.

Khoảng cách giữa Δ_m và trục Oy lớn nhất bằng $\sqrt{5}$ khi $m=1$.