# HƯỚNG DẪN GIẢI.

**Bài 1**

**1.** Ta có: $A(0;0;0), A'(0;0;a), B(0;a;0), B'(0;a;a), C(a;a;0), C'(a;a;a)$, $D(a;0;0), D'(a;0;a)$

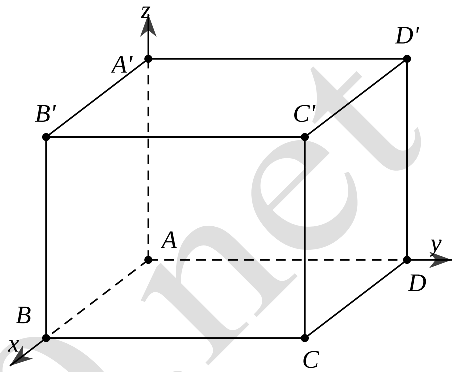
Ta có : $\overrightarrow{B'D'}=(a;-a;0)$,

$\overrightarrow{A'B}=(0;a;-a)$ , $\overrightarrow{BB'}=(0;0;a)$ ,

Suy ra $\left[\overrightarrow{B'D'},\overrightarrow{A'B}\right]=(a^2;a^2;a^2)$

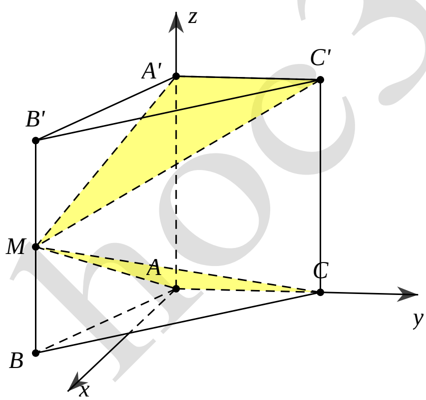
nên $\left[\overrightarrow{B'D'},\overrightarrow{A'B}\right].\overrightarrow{BB'}=a^3\neq 0$

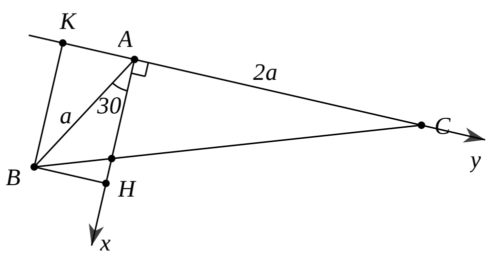
Vậy ba vectơ $\overrightarrow{B'D'};\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{BB'}$ không đồng phẳng hay $B'D'$ và $A'B$ chéo nhau.




$$d\left(B'D',A'B\right)=\frac{\left|[\overrightarrow{B'D'},\overrightarrow{A'B}].\overrightarrow{BB'}\right|}{\left|[\overrightarrow{B'D'},\overrightarrow{A'B}]\right|}=\frac{a^3}{\sqrt{a^4+a^4+a^4}}=\frac{a^3}{a^2\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

**2.** Đặt $AA'=2x, x>0$. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ




Ta có $A(0;0;0), C(0;2a;0), A'(0;0;2x), C'(0;2a;2x)$

Gọi $H,K$ lần lượt là hình chiếu của $B$ lên các trục $Ox,Oy$, suy ra

$$AH=AB.\cos 30^0=\frac{a\sqrt{3}}{2},\ AK=BH=AB.\sin 30^0=\frac{a}{2}$$

Do đó $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};0\right), B'\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};2x\right), M\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};x\right)$

Ta có

$\overrightarrow{AM}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};x\right), \overrightarrow{AC}=(0;2a;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}\right]=\left(-2ax;0;a^2\sqrt{3}\right)$

$\Rightarrow\overrightarrow{n_1}=\left(2x;0;-a\sqrt{3}\right)$ là VTPT của mặt phẳng $(MAC)$

$\overrightarrow{A'M}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};-x\right), \overrightarrow{A'C'}=(0;2a;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{A'M},\overrightarrow{A'C'}\right]=\left(2ax;0;a^2\sqrt{3}\right)$

$\Rightarrow\overrightarrow{n_2}=\left(2x;0;a\sqrt{3}\right)$ là VTPT của mặt phẳng $(MA'C')$

Vì $(MAC)\perp(MA'C')$ nên

$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0\Leftrightarrow 4x^2-3a^2=0\Rightarrow x=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AA'=a\sqrt{3}$

a) Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là:

$$V_{ABC.A'B'C'}=AA'.S_{\Delta ABC}=a\sqrt{3}.\frac{1}{2}a.2a.\sin 120^0=\frac{3a^3}{2}$$

b) Ta có

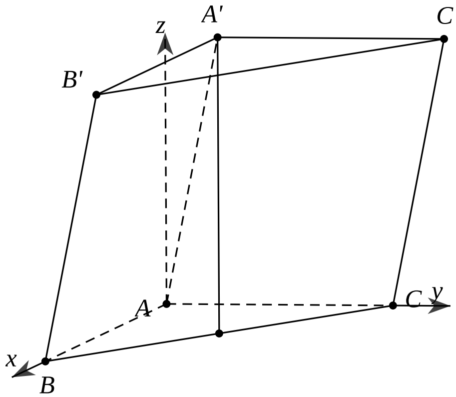
$\overrightarrow{CC'}=\left(0;0;a\sqrt{3}\right), \overrightarrow{BC}=\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{5a}{2};0\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{CC'},\overrightarrow{BC}\right]=\left(-\frac{5a^2\sqrt{3}}{2};-\frac{3a^2}{2};0\right)$

$\Rightarrow\overrightarrow{n_3}=\left(5;\sqrt{3};0\right)$ là VTPT của mặt phẳng $(BCC'B')$

Gọi $\alpha$ là góc giữa hai mặt phẳng $(MAC)$ và $(BCC'B')$, ta có:

$$\cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_3}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_3}\right|}=\frac{5}{\sqrt{2}.\sqrt{28}}=\frac{5\sqrt{14}}{28}.$$

**3.** Chọn hệ trục như hình vẽ. Gọi $M$ là trung điểm đoạn $BC$




Ta có tọa độ các đỉnh là: $A(0;0;0), B(a;0;0), C\left(0;a\sqrt{3};0\right), M\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$

Vì $AM=\frac{1}{2}BC=a\Rightarrow MA'=\sqrt{A'A^2-AM^2}=a\sqrt{3}$,

suy ra $A'\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};a\sqrt{3}\right)$

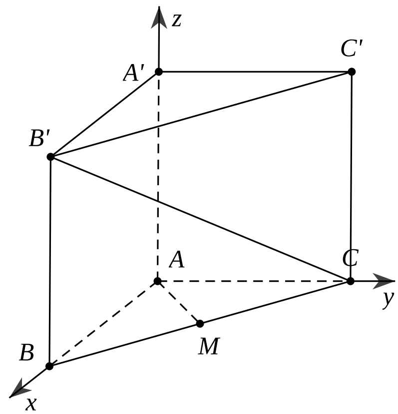
Vì $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow B'\left(\frac{3a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};a\sqrt{3}\right), \overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow C'\left(\frac{a}{2};\frac{3a\sqrt{3}}{2};a\sqrt{3}\right)$

Thể tích khối chóp $A'.ABC$: $V=\frac{1}{3}A'M.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3}{4}$

Vì $\overrightarrow{AA'}=\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};a\sqrt{3}\right), \overrightarrow{B'C'}=\left(-a;a\sqrt{3};0\right)$

suy ra $\cos\left(AA',B'C'\right)=\frac{\left|\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{B'C'}\right|}{AA'.B'C'}=\frac{a^2}{2a.2a}=\frac{1}{4}$.

**4.** Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ




Tọa độ các đỉnh là: $A\left(0;0;0\right)$, $B\left(a;0;0\right)$, $C\left(0;a;0\right)$, $A'\left(0;0;a\sqrt{2}\right)$, $B'\left(a;0;a\sqrt{2}\right)$

$C'\left(0;a;a\sqrt{2}\right)$, $M\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$.

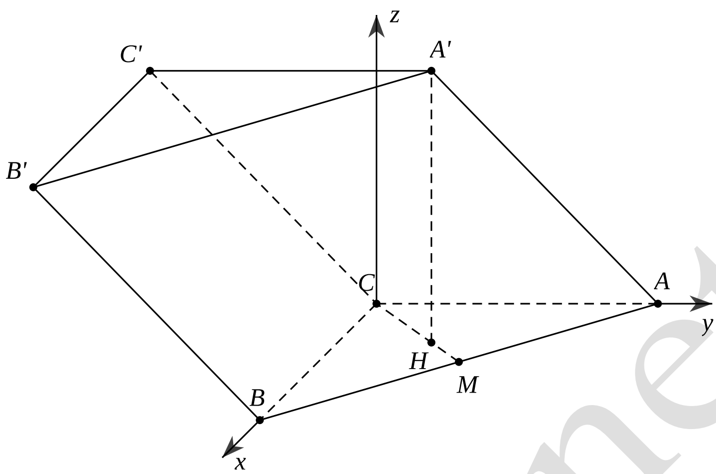
Thể tích khối lặng trụ: $V=AA'.S_{\Delta ABC}=a\sqrt{2}.\frac{a^2}{2}=\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Ta có: $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$, $\overrightarrow{AC}=\left(0;a;0\right)$, $\overrightarrow{B'C}=\left(-a;a;a\sqrt{2}\right)$

Suy ra $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right]=\left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2};-\frac{a^2\sqrt{2}}{2};a^2\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{AC}=-\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Vậy $d\left(AM,B'C\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right]\right|}=\frac{a}{2}$

**5.** Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ




Gọi $M, H$ lần lượt là trung điểm của $BC$ và trọng tâm của tam giác $ABC$

Đặt $BC = x, SH = y; x, y > 0$ suy ra $AC = AB.\cot 60^0 = \frac{x}{\sqrt{3}}$. Tọa độ các đỉnh là:

$$C(0;0;0), B(x;0;0), A\left(0;\frac{x}{\sqrt{3}};0\right), H\left(\frac{x}{3};\frac{x}{3\sqrt{3}};0\right), B'\left(\frac{x}{3};\frac{x}{3\sqrt{3}};y\right)$$

Suy ra $\overrightarrow{BB'} = \left(-\frac{2x}{3};\frac{x}{3\sqrt{3}};y\right)$, $\vec{k} = (0;0;1)$ là VTPT của $(ABC)$

Theo đề bài ta có:

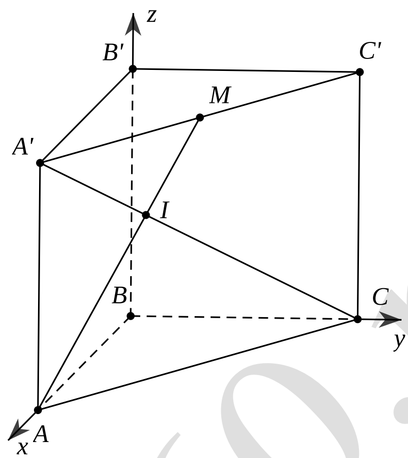
$$\begin{cases} \dfrac{\left|\overrightarrow{BB'}.\vec{k}\right|}{\left|\overrightarrow{BB'}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \sin 60^0 \\ BB' = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = a \\ \sqrt{\dfrac{13}{27}x^2 + y^2} = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \\ x^2 = \dfrac{27a^2}{52} \end{cases}$$

Suy ra $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}CA.CB = \frac{1}{2}x.\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{x^2}{2\sqrt{3}} = \frac{81a^2}{104\sqrt{3}}$

Vậy thể tích khối chóp $A'.ABC$ là:

$$V_{A'ABC} = V_{B'.ABC} = \frac{1}{3}y.\frac{x^2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}a}{2}.\frac{27a^2}{104\sqrt{3}} = \frac{9a^3}{208}.$$

**6.** Đặt $BC = x, x > 0$. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ




Tọa độ các điểm là:

$B(0;0;0), A(a;0;0), C(0;x;0), B'(0;2a;0), A'(a;0;2a), C'(0;x;2a)$

Suy ra $\overrightarrow{A'C} = (-a;x;-2a) \Rightarrow A'C^2 = a^2 + x^2 + (2a)^2 = (3a)^2 \Rightarrow x = 2a$

Trung điểm $M\left(\frac{a}{2};a;2a\right) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \left(-\frac{a}{2};a;2a\right)$

Phương trình $AM : \begin{cases} x = a - t \\ y = 2t \\ z = 4t \end{cases} \Rightarrow I(a-t;2t;4t) \Rightarrow \overrightarrow{A'I} = (-t;2t;4t-2a)$

Vì $I \in A'C \Rightarrow \frac{-t}{-a} = \frac{2t}{2a} = \frac{4t-2a}{-2a} \Rightarrow t = \frac{a}{3} \Rightarrow I\left(\frac{2a}{3};\frac{2a}{3};\frac{4a}{3}\right)$

Suy ra

$$\overrightarrow{BI} = \left(\frac{2a}{3};\frac{2a}{3};\frac{4a}{3}\right), \overrightarrow{CI} = \left(\frac{2a}{3};-\frac{4a}{3};\frac{4a}{3}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BI},\overrightarrow{CI}\right] = \left(\frac{8a^2}{3};0;-\frac{4a^2}{3}\right)$$

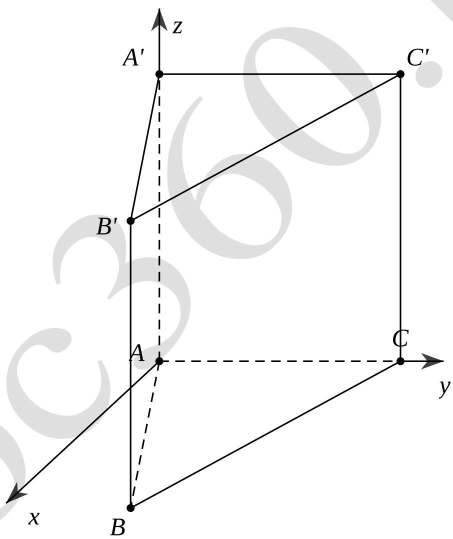
$$\overrightarrow{AI} = \left(-\frac{a}{3};\frac{2a}{3};\frac{4a}{3}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BI},\overrightarrow{CI}\right].\overrightarrow{AI} = -\frac{8a^3}{3}$$

Thể tích khối chóp $IABC$: $V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BI},\overrightarrow{CI}\right].\overrightarrow{AI}\right| = \frac{4a^3}{9}$

Ta có $\vec{n} = (2;0;-1)$ là VTPT của $(IBC)$, phương trình mặt phẳng $(IBC)$:
$2x - z = 0$

Vậy $d(A,(IBC)) = \frac{2a}{\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

**7.** Đặt $AA' = x, x > 0$. Chọn hệ trục như hình vẽ




Tọa độ các điểm:

$A(0;0;0), C(0;a;0), A'(0;0;x), C'(0;a;x), B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right)$

Suy ra

$$\overrightarrow{A'B}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};-x\right),\overrightarrow{A'C}=(0;a;-x)\Rightarrow\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'C}\right]=\left(\frac{ax}{2};\frac{ax\sqrt{3}}{2};\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$$

Nên $\vec{n}=\left(x;x\sqrt{3};a\sqrt{3}\right)$ là VTPT của $(A'BC)$, $\vec{k}=\left(0;0;1\right)$ là VTPT của $(ABC)$

Theo đề bài: $\dfrac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|}=\cos 60^0\Rightarrow 2\sqrt{3}a=\sqrt{4x^2+3a^2}\Rightarrow x=\dfrac{3a}{2}$

Thể tích lăng trụ: $V_{ABC.A'B'C'}=x.S_{\Delta ABC}=\dfrac{3a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Tọa độ trọng tâm $G\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6};\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2}\right)$.

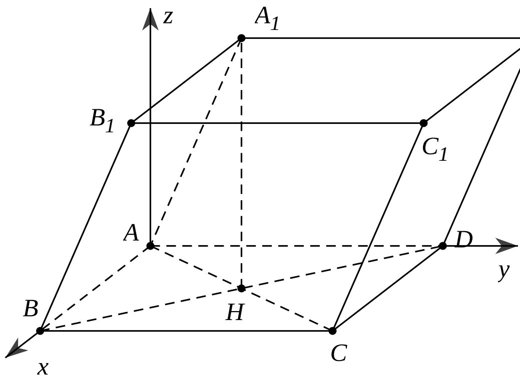
Gọi $I\left(x;y;z\right)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$, ta có

$$\begin{cases}\begin{cases}IA^2=IB^2\\ IA^2=IC^2\\ IA^2=IG^2\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2=\left(x-\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{a}{2}\right)^2+z^2\\ x^2+y^2+z^2=x^2+(y-a)^2+z^2\\ x^2+y^2+z^2=\left(x-\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(y-\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{a}{2}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\\ y=\dfrac{a}{2}\\ z=-\dfrac{a}{12}\end{cases}$$

Tâm $I\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6};\dfrac{a}{2};-\dfrac{a}{12}\right)$, bán kính $R=IA=\dfrac{7a}{12}$.

**8.** Gọi $H$ là tâm của đáy $ABCD$ và đặt $A_1H=x$.

Chọn hệ trục như hình vẽ




Tọa độ các điểm:

$$A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;a\sqrt{3};0), C\left(a;a\sqrt{3};0\right), H\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right),$$

$$A_1\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};x\right)$$

Suy ra $\overrightarrow{AA_1}=\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};x\right), \overrightarrow{AD}=\left(0;a\sqrt{3};0\right)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{AD}\right]=\left(ax\sqrt{3};0;\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)\Rightarrow \vec{n}=\left(2x;0;a\right)$ là VTPT của $(A_1AD)$

Và $\vec{k}=(0;0;1)$ là VTPT của $(ABCD)$ nên theo giả thiết đề bài ta có:

$$\frac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|}=\cos 60^0 \Rightarrow 2a=\sqrt{4x^2+a^2}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}a}{2}$$

Thể tích khối lăng trụ: $V=x.S_{ABCD}=\frac{\sqrt{3}a}{2}.a.a\sqrt{3}=\frac{3a^3}{2}$.

$\overrightarrow{A_1B}=\left(\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{2};-x\right),\overrightarrow{A_1D}=\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};-x\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{A_1B},\overrightarrow{A_1D}\right]=\left(a\sqrt{3}x;ax;0\right)$

Phương trình $(A_1BD):x\sqrt{3}+y-a\sqrt{3}=0$. Vì

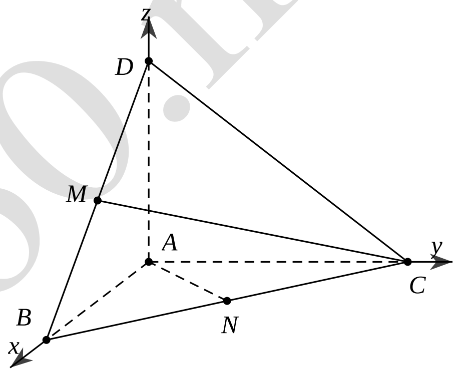
$\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow B_1\left(\frac{3a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

Vậy $d\left(B_1,(A_1BD)\right)=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

**Bài 2**

a) Ta có: $AB^2+AC^2=BC^2=25$ nên $\Delta ABC$ vuông tại $A$.

Chọn hệ trục toạ độ Đêcac vuông góc *Oxyz* như hình vẽ




Suy ra $O\equiv A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $C(0;4;0)$, $D(0;0;4)$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng $(BCD):\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1$

$\Leftrightarrow 4x+3y+3z-12=0$

Do đó: $d\left(A,(BCD)\right)=\frac{|-12|}{\sqrt{16+9+9}}=\frac{12}{\sqrt{34}}=\frac{6\sqrt{34}}{17}$

b) Ta có $M\left(0;2;2\right),N\left(\frac{3}{2};2;0\right)$. Suy ra

$\overrightarrow{AN}=\left(\frac{3}{2};2;0\right),\overrightarrow{CM}=\left(0;-2;2\right),\overrightarrow{AC}\left(0;4;0\right)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM}\right]=\left(4;-3;-3\right),\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM}\right].\overrightarrow{AC}=-12$.

Suy ra khoảng cách giữa hai đường thẳng $AN,CM$ là:

$$d(AN,CM)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM}\right]\right|}=\frac{12}{\sqrt{4^2+3^2+3^2}}=\frac{6\sqrt{34}}{17}.$$

Góc giữa hai đường thẳng $AN, CM$ là:

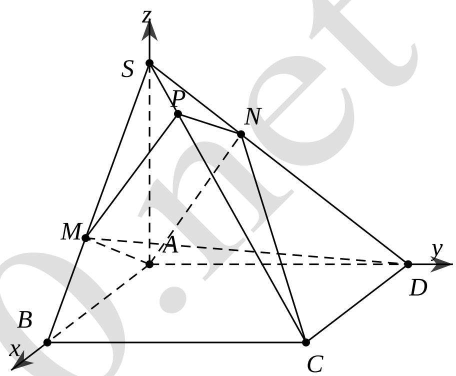
$$\cos(AN, CM) = \frac{\left|\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{CM}\right|}{AN.CM} = \frac{4}{\sqrt{\frac{9}{4} + 4.\sqrt{2^2 + 2^2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{5} \Rightarrow (AN, CM) \approx 56^0.$$

**Bài 3**

**1.** a) Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Ta có tọa độ các điểm

$A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;2a;0)$,

$C(a;2a;0)$, $S(0;0;3a)$




Suy ra $\overrightarrow{SB} = (a;0;-3a)$,

$\overrightarrow{SD} = (0;2a;-3a)$, $\overrightarrow{SC} = (a;2a;-3a)$

Phương trình $SB: \begin{cases} x = a + t \\ y = 0 \\ z = -3t \end{cases}$

$\Rightarrow M(a+t;0;-3t) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (a+t;0;-3t)$

Mà

$$AM \perp SB \Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{SB} = 0 \Leftrightarrow (a+t) + 9t = 0 \Rightarrow t = -\frac{a}{10} \Rightarrow M\left(\frac{9a}{10};0;\frac{3a}{10}\right)$$

Tương tự vậy ta tìm được $N\left(0;\frac{18a}{13};\frac{12a}{13}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right] = -\frac{27a^2}{65}(1;2;-3)$

Do đó ta có phương trình của $(AMN): x + 2y - 3z = 0$

Phương trình $SC: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3a - 3t \end{cases}$ nên tọa độ điểm $P$ là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3a - 3t \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{9a}{14}, y = \frac{9a}{7}, z = \frac{15a}{14} \Rightarrow P\left(\frac{9a}{14}; \frac{9a}{7}; \frac{15a}{14}\right).$$

Ta có: $\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}\right] = -\frac{27a^2}{70}(1;2;-3)$, $\left[\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AP}\right] = \frac{27a^2}{91}(1;2;-3)$

Suy ra $S_{AMPN} = \frac{1}{2}\left[\left|\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}\right]\right| + \left|\left[\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AP}\right]\right|\right] = \frac{621\sqrt{14}a^2}{1820}$ và

$d(S,(AMN)) = \frac{9a}{\sqrt{14}}$

Vậy $V_{S.AMPN} = \frac{1}{3}.\frac{9a}{\sqrt{14}}.\frac{621\sqrt{14}a^2}{1820} = \frac{1863a^3}{1820}$.

b) Ta có $\overrightarrow{CN} = \left(-a; -\frac{8a}{13}; \frac{12a}{13}\right)$, $\overrightarrow{DM} = \left(\frac{9a}{10}; -2a; \frac{3a}{10}\right)$, $\overrightarrow{CD} = (-a;0;0)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{DM}\right] = \left(\frac{348a^2}{65}; \frac{147a^2}{130}; \frac{426a^2}{65}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{DM}\right].\overrightarrow{CD} = -\frac{348a^3}{65}$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng $CN, DM$ là:

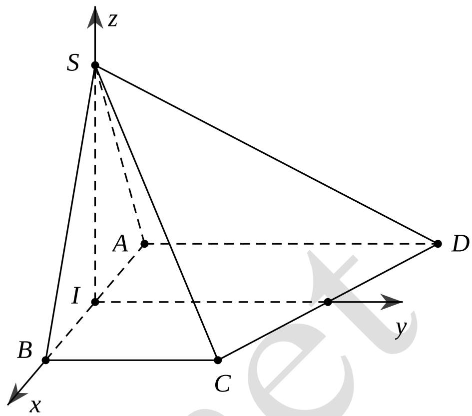
$$d(CN, DM) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{DM}\right].\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{DM}\right]\right|} = \frac{2332a}{3\sqrt{15209}}.$$

Và $\cos(CN, DM) = \frac{\left|\overrightarrow{CN}.\overrightarrow{DM}\right|}{CN.DM} = \frac{133}{\sqrt{154570}}$.

**2.** Vì hai mặt phẳng $(SDI)$ và $(SCI)$ cùng vuông góc với đáy nên $SI \perp (ABCD)$.

Đặt $SI = x, x > 0$, tọa độ các điểm là: $I\left(0;0;0\right)$, $A\left(-a;0;0\right)$, $B\left(a;0;0\right)$, $C\left(a;a;0\right)$, $D\left(-a;2a;0\right)$, $S\left(0;0;x\right)$. Suy ra $\overrightarrow{SC} = \left(a;a;-x\right)$, $\overrightarrow{CD} = \left(-2a;a;0\right)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{CD}\right] = \left(ax;2ax;3a^2\right)$




Nên $\overrightarrow{n_1} = \left(x;2x;3a\right)$ là VTPT của mặt phẳng $(SCD)$.

Mà $\vec{k} = (0;0;1)$ là VTPT của mặt đáy nên theo giả thiết đề bài ta có

$$\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\vec{k}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \cos 60^0 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3a}{\sqrt{5x^2+9a^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$$

Mặt khác: $S_{ABCD} = \dfrac{AB(BC+AD)}{2} = 3a^2$ nên thể tích khối chóp là

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SI.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{3a\sqrt{15}}{5}.3a^2 = \frac{3a^3\sqrt{15}}{5}.$$

**3.** Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Ta có tọa độ các đỉnh

$A(0;0;0)$, $B\left(a;0;0\right)$,

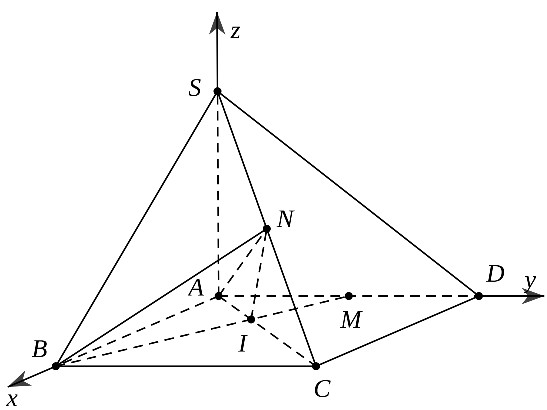
$D\left(0;a\sqrt{2};0\right)$, $C\left(a;a\sqrt{2};0\right)$

$S(0;0;a)$

$M\left(0;\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$, $N\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\dfrac{a}{2}\right)$

Suy ra : $\overrightarrow{BM} = \left(-a;\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$

$\overrightarrow{AC} = \left(a;a\sqrt{2};0\right)$



Phương trình $BM:\begin{cases}x=a-2t\\ y=\sqrt{2}t\\ z=0\end{cases}$, phương trình $AC:\begin{cases}x=t'\\ y=\sqrt{2}t'\\ z=0\end{cases}$

Từ đó ta tìm được giao điểm $I\left(\frac{a}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3};0\right)$

Ta có: $\overrightarrow{AS}=(0;0;a),\overrightarrow{AC}=(a;a\sqrt{2};0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AC}\right]=(-a^2\sqrt{2};a^2;0)$

$\Rightarrow\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{2};-1;0)$ là VTPT của $(SAC)$

$\overrightarrow{SM}=\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};-a\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{BM}\right]=\left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2};a^2;\frac{a^2\sqrt{2}}{2}\right)$

$\Rightarrow\overrightarrow{n_2}=(1;\sqrt{2};1)$ là VTPT của $(SMB)$.

Vì $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0\Rightarrow(SAC)\perp(SMB)$

Ta có: $\overrightarrow{AN}=\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a}{2}\right),\overrightarrow{AI}=\left(\frac{a}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3};0\right),\overrightarrow{AB}=(a;0;0)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AI}\right]=\left(-\frac{a^2\sqrt{2}}{6};\frac{a^2}{6};0\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AI}\right].\overrightarrow{AB}=-\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Vậy $V_{ANIB}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AI}\right].\overrightarrow{AB}\right|=\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

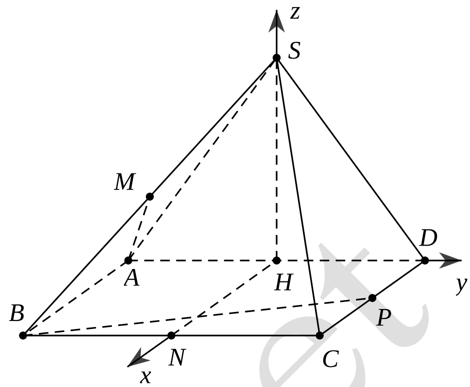
**4.** Gọi $H$ là trung điểm $AD\Rightarrow SH\perp AD\Rightarrow SH\perp(ABCD)$

$H(0;0;0)$, $A\left(0;-\dfrac{a}{2};0\right)$, $D\left(0;\dfrac{a}{2};0\right)$,

$N\left(a;0;0\right)$, $B\left(a;-\dfrac{a}{2};0\right)$,

$C\left(a;\dfrac{a}{2};0\right)$, $S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$,

$M\left(\dfrac{a}{2};-\dfrac{a}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$, $P\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};0\right)$



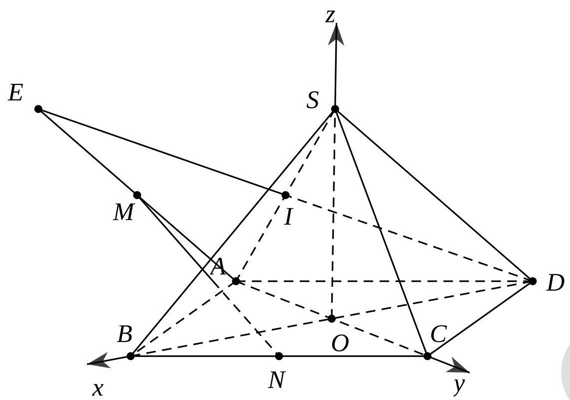

$$\overrightarrow{AM}=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right), \overrightarrow{BP}=\left(-\frac{a}{2};a;0\right)\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BP}=0\Rightarrow AM\perp BP.$$

Ta có: $\overrightarrow{CM}=\left(-\dfrac{a}{2};-\dfrac{3a}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right), \overrightarrow{CN}=\left(0;-\dfrac{a}{2};0\right), \overrightarrow{CP}=\left(-\dfrac{a}{2};0;0\right)$

$$\Rightarrow\left[\overrightarrow{CN},\overrightarrow{CP}\right]=\left(0;0;-\frac{a^2}{4}\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{CN},\overrightarrow{CP}\right].\overrightarrow{CM}=-\frac{a^3\sqrt{3}}{16}.$$

Vậy $V_{CMNP}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{CN},\overrightarrow{CP}\right].\overrightarrow{CM}\right|=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{96}$.

**5.** Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Đặt $SO=h$ và gọi $I$ là trung điểm $SA$.




Ta có tọa độ các đỉnh là:

$A\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), C\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), D\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$

$S(0;0;h), I\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{h}{2}\right), N\left(\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{2}}{4};0\right), E\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{a\sqrt{2}}{2};h\right),$

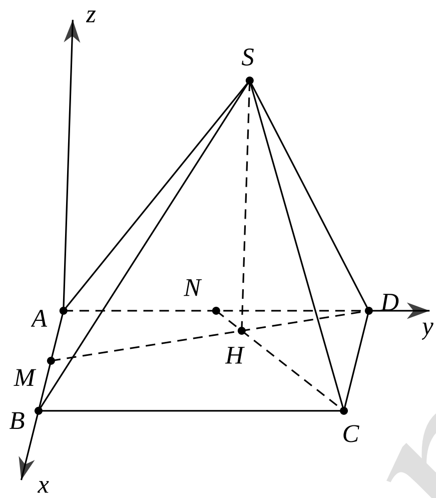
$M\left(\frac{a\sqrt{2}}{4};-\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{h}{2}\right).$

$\overrightarrow{MN}=\left(0;\frac{3a\sqrt{2}}{4};-\frac{h}{2}\right), \overrightarrow{BD}=\left(a\sqrt{2};0;0\right)\Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BD}=0\Rightarrow MN\perp BD$

$\overrightarrow{AC}=\left(0;a\sqrt{2};0\right), \overrightarrow{AN}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{3a\sqrt{2}}{4};0\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\frac{ah\sqrt{2}}{2};0;0\right)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AN}=\frac{a^2h}{4}$. Vậy $d(MN,AC)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\right]\right|}=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

**6.** Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ




Tọa độ các đỉnh:

$A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;a;0), C(a;a;0), M\left(\frac{a}{2};0;0\right), N\left(0;\frac{a}{2};0\right)$

Suy ra $\overrightarrow{DM}=\left(\frac{a}{2};-a;0\right)\Rightarrow$ phương trình

$DM:\begin{cases}x=t\\y=a-2t\\z=0\end{cases}\Rightarrow H(t;a-2t;0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{CH}=(t-a;-2t;0), \overrightarrow{CN}=\left(-a;-\frac{a}{2};0\right)$

Vì

$H\in CN\Rightarrow \frac{t-a}{-a}=\frac{-2t}{\frac{-a}{2}}\Leftrightarrow -t+a=4t\Rightarrow t=\frac{a}{5}\Rightarrow H\left(\frac{a}{5};\frac{3a}{5};0\right)\Rightarrow S\left(\frac{a}{5};\frac{3a}{5};a\sqrt{3}\right)$

Vì $S_{CDNM}=S_{ABCD}-S_{\Delta AMN}-S_{\Delta BCM}=a^2-\frac{a^2}{8}-\frac{a^2}{4}=\frac{5a^2}{8}$

Nên thể tích khối chóp $S.CDNM$ :

$$V=\frac{1}{3}SH.S_{CDNM}=\frac{1}{3}a\sqrt{3}.\frac{5a^2}{8}=\frac{5a^3\sqrt{3}}{24}.$$

Ta có:

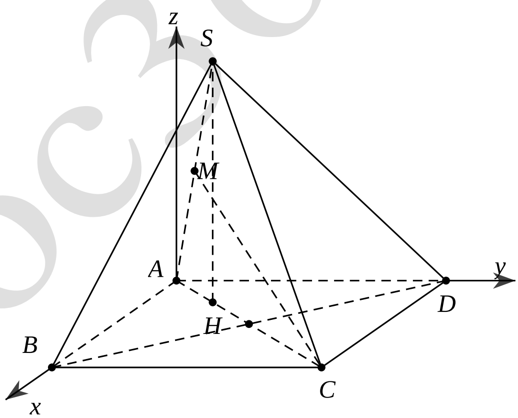
$$\overrightarrow{SC}=\left(\frac{4a}{5};\frac{2a}{5};-a\sqrt{3}\right),\overrightarrow{DC}=(a;0;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{SC}\right]=\left(a^2\sqrt{3};\frac{a^2\sqrt{3}}{2};a^2\right)$$

$$\Rightarrow\left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{DC}=a^3\sqrt{3}.$$

Vậy $d\left(SC,DM\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{DC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{SC}\right]\right|}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{\dfrac{a^2\sqrt{19}}{2}}=\dfrac{2a\sqrt{57}}{19}.$

**7.** Ta có $AH=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\Rightarrow SH=\sqrt{SA^2-AH^2}=\dfrac{a\sqrt{14}}{4}$

Chọn hệ trục như hình vẽ




Tọa độ các điểm

$A(0;0;0),B(a;0;0),D(0;a;0),C(a;a;0),H\left(\frac{a}{4};\frac{a}{4};0\right),S\left(\frac{a}{4};\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{14}}{4}\right)$

Gọi $N$ là trung điểm của

$$SA \Rightarrow N\left(\frac{a}{8};\frac{a}{8};\frac{a\sqrt{14}}{8}\right) \Rightarrow \overrightarrow{CN} = \left(-\frac{7a}{8};-\frac{7a}{8};\frac{a\sqrt{14}}{8}\right)$$

$$\overrightarrow{SN} = \left(-\frac{a}{8};-\frac{a}{8};-\frac{a\sqrt{14}}{8}\right) \Rightarrow \overrightarrow{SN}.\overrightarrow{CN} = 0 \Rightarrow CN \perp SA \Rightarrow N \equiv M$$

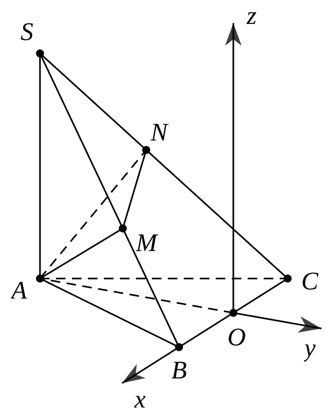
Ta có: $\overrightarrow{SB} = \left(\frac{3a}{4};-\frac{a}{4};-\frac{a\sqrt{14}}{4}\right), \overrightarrow{SC} = \left(\frac{3a}{4};\frac{3a}{4};-\frac{a\sqrt{14}}{4}\right)$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right] = \left(\frac{a^2\sqrt{14}}{4};0;\frac{3a^2}{4}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{SM} = -\frac{a^3\sqrt{14}}{8}$$

Vậy $V_{S.MBC} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{SM}\right| = \frac{a^3\sqrt{14}}{48}$.

**Bài 4**

**1.** Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, trong đó gốc tọa độ $O$ là trung điểm cạnh $BC$.




a) Vì $BAO = \frac{1}{2}BAC = 60^0$ nên

$$AO = AB\cos 60^0 = \frac{a}{2}, BO = AB\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Đặt $SA = x, x > 0$, tọa độ các điểm là:

$A(0;-\frac{a}{2};0)$, $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right), C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right)$,

$S\left(0;-\frac{a}{2};x\right)$

Suy ra $\overrightarrow{SA} = (0;0;-x), \overrightarrow{AB} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{AB}\right] = \left(-\frac{ax}{2};\frac{ax\sqrt{3}}{2};0\right)$

Nên $\overrightarrow{n_1} = (1;-\sqrt{3};0)$ là VTPT của $(SAB)$

$$\overrightarrow{SB}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};-x\right),\overrightarrow{BC}=\left(-a\sqrt{3};0;0\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{BC}\right]=\left(0;ax\sqrt{3};\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$$

Nên $\overrightarrow{n_2}=\left(0;2x;a\right)$ là VTPT của $(SBC)$

Theo đề bài $\dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\cos 60^0\Leftrightarrow\dfrac{\left|-2x\sqrt{3}\right|}{2.\sqrt{4x^2+a^2}}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Do đó $S\left(0;-\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)$

Vì $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.AC.\sin BAC=\dfrac{1}{2}a.a.\sin 120^0=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ nên thể tích khối chóp $S.ABC$

$$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{6}}{48}.$$

Ta có: $\dfrac{SM}{SB}=\dfrac{SA^2}{SB^2}=\dfrac{x^2}{a^2+x^2}=\dfrac{1}{9},\ \dfrac{SN}{SC}=\dfrac{SA^2}{SC^2}=\dfrac{1}{9}$ nên

$$V_{S.AMN}=\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}.V_{S.ABC}=\frac{1}{81}.\frac{a^3\sqrt{6}}{48}=\frac{a^3\sqrt{6}}{3888}.$$

**2.** *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

Gọi $O$ là hình chiếu của $S$ trên $(ABC)$, ta suy ra $O$ là trọng tâm $\Delta ABC$.

Gọi $I$ là trung điểm của $BC$, ta có:

$$AI=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow OA=\frac{a\sqrt{3}}{3},\quad OI=\frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Trong $mp\left(ABC\right)$, ta vẽ tia $Oy$ vuông góc với $OA$. Đặt $SO=h$, chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta được:

$$O\left(0;0;0\right),A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3};\ 0;\ 0\right),S\left(0;0;h\right)\Rightarrow I\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};\ 0;\ 0\right),B\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};\ \frac{a}{2};\ 0\right)$$

$$C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};-\frac{a}{2};\ 0\right),M\left(-\frac{a\sqrt{3}}{12};\ \frac{a}{4};\ \frac{h}{2}\right),N\left(-\frac{a\sqrt{3}}{12};-\frac{a}{4};\ \frac{h}{2}\right).$$

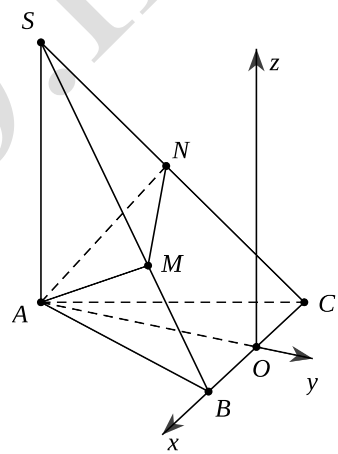
Suy ra $\left[\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AN}\right]=\left(\dfrac{ah}{4};\ 0;\ \dfrac{5a^2\sqrt{3}}{24}\right)\Rightarrow \overrightarrow{n_1}=\left(6h;0;5a\sqrt{3}\right)$ là VTPT của $(AMN)$

$\left[\overrightarrow{SB},\ \overrightarrow{SC}\right]=\left(-ah;\ 0;\ \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}\right)\Rightarrow \overrightarrow{n_2}=\left(6h;0;-a\sqrt{3}\right)$ là VTPT của $(SBC)$

Vì $(AMN)\perp(SBC)\Rightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0\Leftrightarrow h^2=\dfrac{5a^2}{12}$

$\Rightarrow S_{\Delta AMN}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AN}\right]\right|=\dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}$

**3.** Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ và $O$ là trung điểm $BC$




$A\left(0;-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right), B\left(\dfrac{a}{2};0;0\right),$

$C\left(-\dfrac{a}{2};0;0\right),\ S\left(0;-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};2a\right)$

$\overrightarrow{SB}=\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};-2a\right), \overrightarrow{SC}=\left(-\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};-2a\right)$

Phương trình $SB:\begin{cases}x=\dfrac{a}{2}+t\\ y=\sqrt{3}t\\ z=-4t\end{cases}$

$\Rightarrow M\left(\dfrac{a}{2}+t;\sqrt{3}t;-4t\right)\Rightarrow \overrightarrow{AM}\left(\dfrac{a}{2}+t;\sqrt{3}t+\dfrac{a\sqrt{3}}{2};-4t\right)$

Vì

$AM\perp SB\Rightarrow \dfrac{a}{2}+t+3t+\dfrac{3a}{2}+16t=0\Rightarrow t=-\dfrac{a}{10}\Rightarrow M\left(\dfrac{2a}{5};-\dfrac{a\sqrt{3}}{10};\dfrac{2a}{5}\right)$

Tương tự ta tìm được $N\left(-\frac{2a}{5};-\frac{a\sqrt{3}}{10};\frac{2a}{5}\right)$

$\overrightarrow{SA}=(0;0;-2a),\overrightarrow{SM}=\left(\frac{2a}{5};\frac{2a\sqrt{3}}{5};-\frac{8a}{5}\right),\overrightarrow{SN}=\left(-\frac{2a}{5};\frac{2a\sqrt{3}}{5};-\frac{8a}{5}\right)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SN}\right]=\left(0;\frac{32a^2}{25};\frac{8a^2\sqrt{3}}{25}\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SN}\right].\overrightarrow{SA}=-\frac{16a^2\sqrt{3}}{25}$

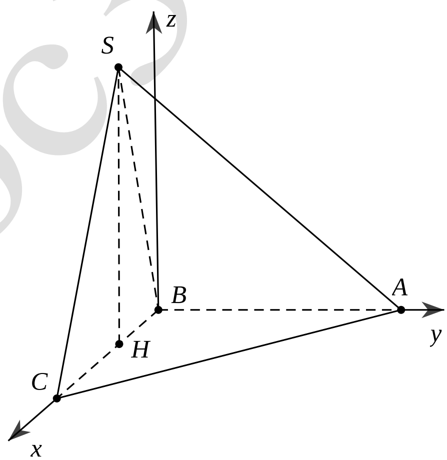
Do đó $V_{S.AMN}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SN}\right].\overrightarrow{SA}\right|=\frac{8a^3\sqrt{3}}{75}$. Mặt khác

$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.2a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Vậy $V_{A.BCNM}=V_{S.ABC}-V_{S.AMN}=\frac{3a^3\sqrt{3}}{50}$.

**4.** Gọi $H$ là hình chiếu của $S$ lên $BC\Rightarrow SH\perp(ABC)$

Đặt $BH=x, SH=y; x,y>0$. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ




Tọa độ các đỉnh $B(0;0;0), C(4a;0;0), A(0;3a;0), H(x;0;0), S(x;0;y)$

Suy ra $\overrightarrow{BS}=(x;0;y),\overrightarrow{BC}=(4a;0;0)\Rightarrow\overrightarrow{BS}.\overrightarrow{BC}=4ax$

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} \dfrac{\overrightarrow{BS}.\overrightarrow{BC}}{SB.BC} = \cos 30^0 \\ SB = 2a\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4ax}{2a\sqrt{3}.4a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x^2 + y^2 = 12a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3a \\ y = a\sqrt{3} \end{cases}$

Thể tích khối chóp $S.ABC$: $V = \dfrac{1}{3}y.\dfrac{1}{2}BA.BC = \dfrac{1}{6}.a\sqrt{3}.4a.3a = 2a^3\sqrt{3}$

$\overrightarrow{SA} = \left(-3a; 3a; -a\sqrt{3}\right), \overrightarrow{SC} = \left(a; 0; -a\sqrt{3}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}\right] = \left(-3a^2\sqrt{3}; -4a^2\sqrt{3}; -3a^2\right)$

Suy ra $\vec{n} = (3; 4; \sqrt{3})$ là VTPT của $(SAC)$, phương trình $(SAC)$ là:

$$3x + 4y + \sqrt{3}z - 12a = 0$$

Vậy $d\left(B, (SAC)\right) = \dfrac{\left|-12a\right|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 3}} = \dfrac{6a\sqrt{7}}{7}$.

**Bài 5** *( Bạn đọc tự vẽ hình )*

Ta có : $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(a;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ b;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ c)$.

**1**. Tọa độ điểm $H$ khi $H$ là trực tâm $\Delta ABC$ hay là hình chiếu của $O$ lên $(ABC)$

$$\begin{cases} x = \dfrac{ab^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \\ y = \dfrac{bc^2a^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \\ z = \dfrac{ca^2b^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \end{cases}.$$

**2**. Phương trình mặt phẳng $(ABC)$ : $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$.

$$d(O,\ (ABC)) = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}}} = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

**3**. Gọi $M(x;\ y;\ z)$. Ta có $M\in(ABC)\Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Ta có $\frac{AM^2}{AO^2}=\frac{(x-a)^2+y^2+z^2}{a^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}-\frac{2x}{a}+1=\frac{OM^2}{OA^2}-\frac{2x}{a}+1$.

Tương tự ta đi đến $\frac{AM^2}{AO^2}+\frac{BM^2}{BO^2}+\frac{CM^2}{CO^2}=OM^2\left(\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}\right)+1$

$$=\frac{OM^2}{OH^2}+1=\frac{MH^2}{OH^2}+2.$$

**4**. Dễ chứng minh $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$.

Chú ý $\sin\beta\sin\gamma\le\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\gamma}{2}$ nên

$$\frac{\sin^2\alpha}{1+\sin\beta\sin\gamma}\ge\frac{2\sin^2\alpha}{2+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}=\frac{2\sin^2\alpha}{4-\sin^2\alpha}$$

Tương tự ta có vế trái $T$ của bất đẳng thức cần chứng minh thỏa mãn

$$T\ge\frac{2\sin^2\alpha}{4-\sin^2\alpha}+\frac{2\sin^2\beta}{4-\sin^2\beta}+\frac{2\sin^2\gamma}{4-\sin^2\gamma}$$

Hay $T+6\ge 8\left(\frac{1}{4-\sin^2\alpha}+\frac{1}{4-\sin^2\beta}+\frac{1}{4-\sin^2\gamma}\right)$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}$, $\forall x,y,z>0$ ta được

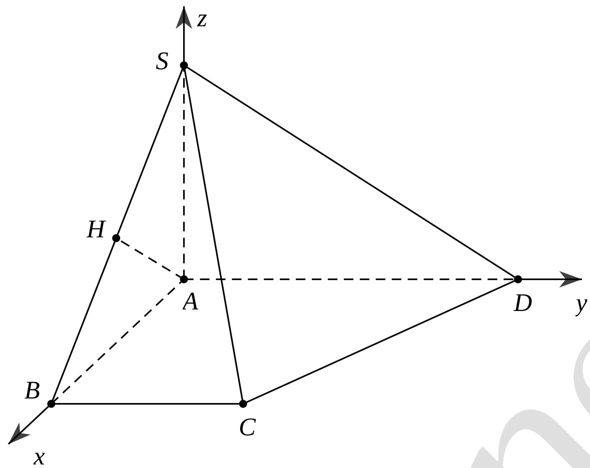
$$T+6\ge\frac{72}{12-(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)}=\frac{36}{5}.$$

Vậy $\frac{\sin^2\alpha}{1+\sin\beta\sin\gamma}+\frac{\sin^2\beta}{1+\sin\gamma\sin\alpha}+\frac{\sin^2\gamma}{1+\sin\alpha\sin\beta}\ge\frac{6}{5}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\alpha=\beta=\gamma=\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$.

**Bài 6**

**1**. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ




Tọa độ các đỉnh: $A(0;0;0), S\left(0;0;a\sqrt{2}\right), B\left(a;0;0\right), D\left(0;2a;0\right), C\left(a;a;0\right)$

Suy ra $\overrightarrow{SB}=\left(-a;0;a\sqrt{2}\right)$, phương trình

$$SB:\begin{cases}x=a-t\\ y=0\\ z=\sqrt{2}t\end{cases}\Rightarrow H\left(a-t;0;\sqrt{2}t\right)\Rightarrow \overrightarrow{AH}=\left(a-t;0;\sqrt{2}t\right)$$

$$AH\perp SB\Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{SB}=0\Leftrightarrow -a+t+2t=0\Rightarrow t=\frac{a}{3}\Rightarrow H\left(\frac{2a}{3};0;\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)$$

Ta có: $\overrightarrow{SC}=\left(a;a;-a\sqrt{2}\right), \overrightarrow{CD}=\left(a;-a;0\right)$

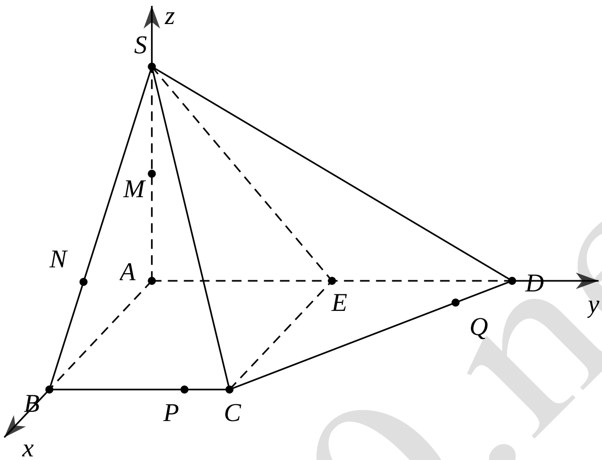
Suy ra $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{CD}=0\Rightarrow SC\perp CD\Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại $C$

$\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{CD}\right]=\left(-a^2\sqrt{2};-a^2\sqrt{2};-2a^2\right)\Rightarrow \vec{n}=\left(1;1;\sqrt{2}\right)$ là VTPT của $(SCD)$

Phương trình $(SCD): x+y+\sqrt{2}z-2a=0$.

Vậy $d\left(H,(SCD)\right)=\dfrac{\left|\dfrac{2a}{3}+\dfrac{2a}{3}-2a\right|}{\sqrt{1+1+2}}=\dfrac{a}{3}$.

**Bài 7**




**1**. Ta có $A\left(0;0;0\right), B\left(a;0;0\right), D\left(0;2a;0\right), C(a;a;0)$.

Đặt $SA = x \Rightarrow S\left(0;0;x\right)$

$\overrightarrow{BD} = \left(-a;2a;0\right), \overrightarrow{SC} = \left(a;a;-x\right) \Rightarrow DB = a\sqrt{5}, SC = \sqrt{x^2+2a^2}; \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{SC} = a^2$

Nên $\cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{BD}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{BD}\right|}{SC.BD} = \dfrac{a}{\sqrt{5(x^2+2a^2)}} = \dfrac{1}{\sqrt{30}}$

$\Leftrightarrow x^2 + 2a^2 = 6a^2 \Leftrightarrow x = 2a \Rightarrow S\left(0;0;2a\right)$.

**2**. Ta có $\overrightarrow{CS} = \left(-a;-a;2a\right), \overrightarrow{CD} = \left(-a;a;0\right) \Rightarrow \overrightarrow{CS}.\overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại $C$.

Do đó: $S_{\Delta SCD} = \dfrac{1}{2}CS.CD = \dfrac{1}{2}.a\sqrt{6}.a\sqrt{2} = a^2\sqrt{3}$

Gọi $\beta = \left((SCD),(SAB)\right)$. Ta có hình chiếu của tam giác $SCD$ lên mặt phẳng $(SAB)$ là tam giác $SAB$ nên ta suy ra $\cos\beta = \dfrac{S_{\Delta SAB}}{S_{\Delta SCD}} = \dfrac{\frac{1}{2}a.2a}{a^2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

**3**. Ta có $E\left(0;a;0\right)$. Gọi $I\left(x;y;z\right)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SBCE$

Khi đó $\begin{cases} IB^2 = IS^2 \\ IC^2 = IS^2 \\ IE^2 = IS^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-2a)^2 \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-2a)^2 \\ x^2 + (y-a)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (z-2a)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 4z = 3a \\ -x - y + 2z = a \\ -2y + 4z = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{2} \\ y = \dfrac{a}{2} \\ z = a \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; a\right).$$

Bán kính $R = IE = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

**4**. Ta có $M(0;0;a)$. Do $\overrightarrow{SN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{SB} \Rightarrow N\left(\frac{2a}{3}; 0; \frac{2a}{3}\right)$,

$\overrightarrow{BP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC} \Rightarrow P\left(a; \frac{3a}{4}; 0\right), \overrightarrow{CQ} = \frac{4}{5}\overrightarrow{CD} \Rightarrow Q\left(\frac{a}{5}; \frac{9a}{5}; 0\right)$

Suy ra $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{2a}{3}; 0; -\frac{a}{3}\right), \overrightarrow{MP} = \left(a; \frac{3a}{4}; -a\right), \overrightarrow{MQ} = \left(\frac{a}{5}; \frac{9a}{5}; -a\right)$

$\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right] = \left(\frac{a^2}{4}; \frac{a^2}{3}; \frac{a^2}{2}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right].\overrightarrow{MQ} = \frac{3a^3}{20} \neq 0$ nên $M, N, P, Q$ không đồng phẳng.

Vậy $V_{MNPQ} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right].\overrightarrow{MQ}\right| = \frac{a^3}{40}$.

**Bài 8**

Đặt $AA' = 2x,\ x > 0$

**1.** Ta có $A(0;0;0),\ C(0;a;0),$

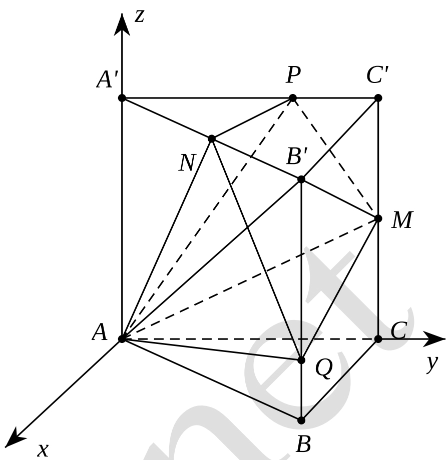
$A'(0;0;2x),\ C'(0;a;2x)$

Gọi $K$ là hình chiếu của $B$ lên $Oy$,

$BK = AB.\sin 60^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2},$

$AK = \dfrac{a}{2}$. Nên

$B\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};0\right),\ B'\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};2x\right).$




Suy ra $M(0;a;x) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (0;a;x),\ \overrightarrow{B'M} = \left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};-x\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{B'M} = \dfrac{a^2}{2} - x^2$. Mà $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{B'M} = 0$ nên suy ra $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Do đó $A'(0;0;a\sqrt{2})$ và $B'\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};a\sqrt{2}\right)$

**2.** Ta có $\overrightarrow{A'N} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{A'B'} \Rightarrow N\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{4};\dfrac{a}{4};a\sqrt{2}\right),$

$\overrightarrow{A'P} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{A'C'} \Rightarrow P\left(0;\dfrac{2a}{3};a\sqrt{2}\right)$

$\overrightarrow{B'Q} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{B'B} \Rightarrow Q\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}\right)$ và $M\left(0;a;\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AN} = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{4};\dfrac{a}{4};a\sqrt{2}\right),\ \overrightarrow{AM} = \left(0;a;\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right), \overrightarrow{AP} = \left(0;\dfrac{2a}{3};a\sqrt{2}\right),$

$\overrightarrow{AQ} = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};\dfrac{3a\sqrt{2}}{4}\right)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}\right] = \left(0;\dfrac{a^2\sqrt{6}}{2};-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}\right].\overrightarrow{AN} = -\dfrac{5\sqrt{6}}{24}a^3;$

$$\left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}\right]\overrightarrow{AM}=\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$$

Do đó $V_{A.MPQ}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}\right].\overrightarrow{AN}\right|=\frac{5\sqrt{6}}{24}a^3;$

$$V_{A.MPQ}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}\right]\overrightarrow{AM}\right|=\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$$

Vậy $V_{AMPNQ}=V_{A.MPQ}+V_{A.MPQ}=\frac{13a^3\sqrt{6}}{24}$.

**Bài 9** *( Bạn đọc tự vẽ hình )*

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (hình vẽ), với $O\equiv A$, trục $Oz$ chứa $AB$, trục $Ox$ chứa đường thẳng $a$, trục $Oy \,//\, b$.

Đặt $AB=h$, $AM=a$, và $AN=b$, $(h,a,b>0)$.

Tọa độ các điểm $A(0;0;0)$, $B(0;0;h)$, $M(a;0;0)$, $N(0;\ b;h)$.

Vì $MN=AM+BN$ nên $\sqrt{h^2+a^2+b^2}=a+b\Leftrightarrow 2a.b=h^2$.

**1**. Ta có:

$$AM.BN=a.b=\frac{h^2}{2},$$

$\overrightarrow{AB}(0;0;h)$, $\overrightarrow{AM}(a;\ 0;\ 0)$, $\overrightarrow{AN}(0;b;h)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right]=(0;\ ah;\ 0)$.

Thể tích khối tứ diện $ABMN$ là:

$$V_{ABMN}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right].\overrightarrow{AN}\right|=\frac{1}{6}abh=\frac{1}{12}h^3.$$

Vì $h=AB$ không đổi nên tích $AM.BN$ và thể tích khối tứ diện $ABMN$ là những đại lượng không đổi.

**2**. Gọi trung điểm của $AB$ là $I\left(0;\ 0;\ \frac{h}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{MN}(-a;\ b;\ h)$, $\overrightarrow{IM}\left(a;\ 0;\ \frac{h}{2}\right)$ nên $\left[\overrightarrow{MN},\ \overrightarrow{IM}\right]=\left(-\frac{hb}{2};\ \frac{ha}{2};\ -ab\right)$.

Khoảng cách từ điểm $I$ đến đường thẳng $MN$ là:

$$d(I,\ MN)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MN},\ \overrightarrow{IM}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|}=\sqrt{\frac{h^2b^2+h^2a^2+4a^2b^2}{4(a^2+b^2+h^2)}}=\sqrt{\frac{2ab^3+2ba^3+4a^2b^2}{4(a^2+b^2+h^2)}}$$

$= \sqrt{\frac{ab}{2}} = \frac{h}{2} = \frac{AB}{2}$.

Vậy đường thẳng $MN$ tiếp xúc với mặt cầu đường kính $AB$.

**Bài 10**

**1**. Chọn hệ trục tọa độ sao cho:

$$A(0;0;0); S(0;0;2a), B(a;0;0), D(0;2a;0) \Rightarrow C(a;2a;0)$$

Do $MD = x \Rightarrow M(x;2a;0) \Rightarrow \overrightarrow{SB} = (a;0;-2a), \overrightarrow{SM} = (x;2a;-2a)$

$\Rightarrow S_{\Delta SBM} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SM}\right]\right| = a\sqrt{x^2 - 2ax + 6a^2}$

Xét hàm số: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2ax + 6a^2}, x \in [0;a]$.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{x-a}{\sqrt{x^2 - 2ax + 6a^2}} \le 0 \ \forall x \in [0;a]$

$\Rightarrow a\sqrt{5} = f(a) \le f(x) = a\sqrt{6} \Rightarrow a^2\sqrt{5} \le S_{\Delta SBM} \le a^2\sqrt{6}$.

Vậy $\max S_{\Delta SBM} = a^2\sqrt{6}$ có được khi $M \equiv D$

$\min S_{\Delta SBM} = a^2\sqrt{5}$ có được khi $M \equiv C$

**2.** Ta có:

$\overrightarrow{SC} = (a;2a;-2a) \Rightarrow \left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SM}\right]\overrightarrow{SC} = 4a^3 + 4a^2(a-x) - 4a^3 = 4a^3(a-x)$

$\Rightarrow V_{C.SBM} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SM}\right].\overrightarrow{SC}\right| = \dfrac{2a^2(a-x)}{3}$. Mà

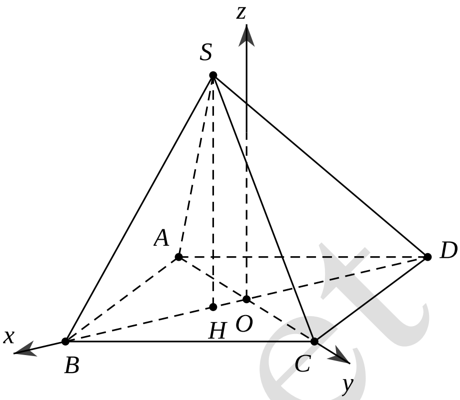
$V_{S.ACBD} = \frac{1}{3}AS.AB.AD = \dfrac{4a^3}{3}$

$\Rightarrow V_{C.SMB} = \frac{1}{3}V_{S.ABC} \Leftrightarrow \dfrac{2a^2(a-x)}{3} = \dfrac{4a^3}{9} \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{3}$. Vậy $DM = \dfrac{a}{3}$.

**Bài 11**

**1.** Vì $SA = SB = SC$ nên hình chiếu $H$ của $S$ lên mặt phẳng đáy là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ nên $H \in BD$. Chọn hệ trục như hình vẽ

Giả sử $B\left(b;0;0\right), C\left(0;c;0\right)$ với $b,c>0$.
Khi đó $A(0;-c;0), D(-b;0;0)$ và $b^2+c^2=1$. Gọi $H(h;0;0)$, ta có:
$HB^2=HA^2 \Rightarrow (h-b)^2=h^2+c^2$
$\Rightarrow h=\dfrac{b^2-c^2}{2b}=\dfrac{2b^2-1}{2b}$




Ta có: $SH^2=SA^2-AH^2=1-\dfrac{1}{4b^2}=\dfrac{4b^2-1}{4b^2} \Rightarrow SH=\dfrac{\sqrt{4b^2-1}}{2b}$, $b>\dfrac{1}{2}$

Do đó $S\left(\dfrac{b^2-c^2}{2b};0;\dfrac{\sqrt{4b^2-1}}{2b}\right)$

Vì đáy $ABCD$ là hình thoi nên ta có $S_{ABCD}=4S_{\Delta ABO}$, do vậy

$$V_{S.ABCD}=4V_{SABO}=4\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right].\overrightarrow{OS}\right|=\frac{2}{3}\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right].\overrightarrow{OS}\right|$$

Mà $\overrightarrow{OA}=\left(0;-c;0\right), \overrightarrow{OB}=\left(b;0;0\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(0;0;bc)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right].\overrightarrow{OS}=\dfrac{1}{2}c\sqrt{4b^2-1}$

Nên $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}c\sqrt{4b^2-1}=\dfrac{1}{6}\sqrt{4c^2(4b^2-1)}$

Ap dụng bđt Cô si ta có: $\sqrt{4c^2(4b^2-1)}\le \dfrac{4c^2+4b^2-1}{2}=\dfrac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} c^2+b^2=1 \\ 4c^2=4b^2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=\dfrac{\sqrt{10}}{4} \\ c=\dfrac{\sqrt{6}}{4} \end{cases}$

Khi đó $SD^2=\left(\dfrac{b^2-c^2}{2b}+b\right)^2+\dfrac{4b^2-1}{4b^2}=\dfrac{3}{2} \Rightarrow SD=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Vậy $\max V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{4}$ đạt được khi $SD = \dfrac{\sqrt{6}}{2}cm$.

**2.** Ngoại tiếp tứ diện đều $ABCD$ bằng hình lập phương $AB_1CD_1.C_1DA_1B$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Tọa độ các điểm

$$A(\sqrt{2};\ 0;0), B(0;\sqrt{2};0), C(0;0;\sqrt{2}), D(\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2}),\ S\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Suy ra

$$\overrightarrow{SA}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \overrightarrow{SB}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \overrightarrow{SC}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{SD}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Gọi $\vec{e} = (x;\ y;\ z)$ là véc tơ đơn vị của đường thẳng $\Delta$. Khi đó:

$$SA' = \left|\vec{e}.\overrightarrow{SA}\right|,\ SB' = \left|\vec{e}.\overrightarrow{SB}\right|,\ SC' = \left|\vec{e}.\overrightarrow{SC}\right|,\ SD' = \left|\vec{e}.\overrightarrow{SD}\right|$$

Vì $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nên $4P = 4(SA'^4 + SB'^4 + SC'^4 + SD'^4)$

$$= (-x+y+z)^4 + (x-y+z)^4 + (x+y-z)^4 + (x+y+z)^4$$

$$= 4 + 16(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \le 4 + \frac{16}{3}(x^2+y^2+z^2)^2$$

Hay $P \le \dfrac{7}{3}$.

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $x^2 = y^2 = z^2 = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow |x| = |y| = |z| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $\max P = \dfrac{7}{3}$ đạt được khi $\Delta$ là các đường thẳng đi qua các đỉnh của tứ diện đều $ABCD$.