HƯỚNG DẪN GIẢI.

Vấn đề 1. BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN CẠNH, ĐỈNH VÀ MẶT CỦA HÌNH ĐA DIỆN

Bài 1

1. • Xét hình đa diện (H), khi đó (H) có ít nhất một mặt, giả sử M_1 là một mặt của (H), M_1 là đa giác nên có ít nhất 3 đỉnh, giả sử đó là A, B, C
Vì AB là cạnh chung của đúng hai mặt nên AB là cạnh củau một mặt thứ hai M_2 của (H), suy ra M_2 có thêm ít nhất một đỉnh D
Nếu $D \equiv C$ thì M_1 và M_2 có hai cạnh chung là AB và BC vô lí, do đó $D \neq C$
Dẫn tới hình đa diện (H) có ít nhất 4 đỉnh. Có một hình đa diện có 4 đỉnh đó là hình chóp tam giác. Vậy số đỉnh ít nhất của hình đa diện là 4.

• Xét hình đa diện (H) có một mặt là M_1. Khi đó M_1 có ít nhất ba cạnh liên tiếp là $C_1; C_2; C_3$. Gọi M_2 là mặt khác M_1 có chung cạnh C_1 với M_1. Trên mặt M_2 còn có ít nhất hai cạnh $C_4; C_5$ khác C_1. Do tính phân biệt của M_2 và M_1 nên $C_4; C_5$ phải khác $C_2; C_3$. Như vậy $C_1; C_2; C_3; C_4; C_5$ khác nhau.
Gọi M_3 là mặt khác M_1 có chung cạnh C_2 với M_1. Khi đó M_3 có ít nhất hai cạnh $C_6; C_7$ khác C_2 và phân biệt với $C_1; C_3$.
+) Nếu C_6 khác với $C_4; C_5$ thì hình (H) có ít nhất 6 cạnh.
+) Nếu $C_6 \equiv C_4$ thì do M_3 và M_2 có nhiều nhất một cạnh chung nên C_7 khác $C_4; C_5$ nên (H) có ít nhất 6 cạnh là $C_1; C_2; C_3; C_4; C_5; C_7$.
+) Nếu $C_6 \equiv C_5$ thì cũng tương tự trên (H) có ít nhất 6 cạnh.
Suy ra hình (H) luôn có ít nhất 6 cạnh. Có một hình đa diện có 6 cạnh đó là hình chóp tam giác. Vậy số cạnh ít nhất của một hình đa diện là 6.

• Vì mỗi mặt của hình đa diện (H) có ít nhất ba cạnh, mà mỗi cạnh có thêm một mặt chung, do đó hình đa diện (H) có ít nhất 4 mặt. Hình chóp tam giác là hình đa diện có 4 mặt. Vậy số mặt ít nhất của hình đa diện là 4.

2. Gọi D, M, C lần lượt là số đỉnh, số mặt và số cạnh của khối đa diện đều loại $\{n; p\}$. Vì mỗi mặt có n cạnh nên M mặt thì có nM cạnh, nhưng mỗi cạnh lại chung cho hai mặt nên $2C = nM$.
Vì mỗi đỉnh là đỉnh chung cho p cạnh nên D sẽ cho pD cạnh , nhưng mỗi cạnh là cạnh chung của hai mặt suy ra $2C = pD$. Vậy $pD = 2C = nM$.

Từ đó suy ra: $\dfrac{D}{\frac{1}{p}} = \dfrac{C}{\frac{1}{2}} = \dfrac{M}{\frac{1}{n}} = \dfrac{D - C + M}{\frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}} = \dfrac{(D - C + M)2pn}{2n + 2p - np}$

Mà $D - C + M = 2$ suy ra $\dfrac{D}{\frac{1}{p}} = \dfrac{C}{\frac{1}{2}} = \dfrac{M}{\frac{1}{n}} = \dfrac{4pn}{2n + 2p - np}$

Vậy : $D = \dfrac{4n}{2n + 2p - np}; C = \dfrac{2np}{2n + 2p - np}; M = \dfrac{4p}{2n + 2p - np}$.

Ta có D, C, M, n, p đều là các số nguyên dương nên $2n + 2p - np > 0$, mà $2n + 2p - np = n(2 - p) - 2(2 - p) + 4 = -(p - 2)(n - 2) + 4$, do đó $(p - 2)(n - 2) < 4$.

Vì đa giác đều phải có ít nhất 3 cạnh, mỗi đỉnh cũng có không ít hơn 3 cạnh nên $n \geq 3, p \geq 3 \Rightarrow n - 2, p - 2$ là hai số nguyên dương có tích nhỏ hơn 4, nên chỉ có thể xảy ra các trường hợp

- $\begin{cases} n - 2 = 1 \\ p - 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow n = p = 3,$ ta có khối đa diện đều loại $\{3; 3\}$, đây chính là khối tứ diện đều.
- $\begin{cases} n - 2 = 2 \\ p - 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow n = 4; p = 3,$ ta có khối đa diện đều loại $\{4; 3\}$, đây chính là khối lập phương.
- $\begin{cases} n - 2 = 1 \\ p - 2 = 2 \end{cases} \Rightarrow n = 3; p = 4,$ ta có khối đa diện đều loại $\{3; 4\}$, đây chính là khối bát diện đều (tám mặt đều).
- $\begin{cases} n - 2 = 3 \\ p - 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow n = 5; p = 3,$ ta có khối đa diện đều loại $\{5; 3\}$, đây chính là thập nhị diện đều (mười hai mặt đều).

- $\begin{cases} n-2=1 \\ p-2=3 \end{cases} \Rightarrow n=3; p=5,$ ta có khối đa diện đều loại $\{3;5\}$, đây chính là

khối nhị thập diện đều (hai mươi mặt đều).

3. Vì mỗi mặt của (H) có đúng p cạnh nên $2q+1$ mặt thì có $(2q+1)p$ cạnh. Nhưng do mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên số cạnh là $c=\dfrac{p(2q+1)}{2}$, vì c là số nguyên nên p phải là số chẵn.

4. a) Do mỗi mặt có ít nhất 3 cạnh, nên số cạnh của m mặt không nhỏ hơn $3m$. Mà mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên
$c \geq \dfrac{3m}{2} \Leftrightarrow 2c \geq 3m > 2m \Leftrightarrow c > m$.

b) Vì mỗi đỉnh là đỉnh chung của ít nhất ba cạnh và qua hai đỉnh có đúng một cạnh nên $2c \geq 3d > 2d \Leftrightarrow c > d$.

5. Xét một hình đa diện có một mặt M_i với số cạnh lớn hơn hoặc bằng 4. Khi đó, do mỗi đỉnh của mặt M_i là đỉnh chung của ít nhất 3 cạnh, nên tại mỗi đỉnh của nó có thêm ít nhất một cạnh đi qua, khi đó số cạnh của hình đa diện sẽ lớn hơn hoặc bằng 8. Vì vậy, hình đa diện (H) có số cạnh là 7 thì không tồn tại mặt nào có số đỉnh lớn hơn hoặc bằng 4, tức là các mặt của hình đó phải là các tam giác.

Gọi M, C là số mặt và số cạnh của hình đa diện (H). Do mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt nên $3M=2C=14 \Rightarrow M=\dfrac{14}{3}$ (vô lý, do M là số nguyên dương).Vậy không tồn tại hình đa diện có 7 cạnh.

6. Xét khối đa diện (H) có số đỉnh là D và số cạnh xuất phát từ các đỉnh lần lượt là $C_1;C_2;...;C_D$, trong đó C_k là các số nguyên dương với $k=\{1;2;...;D\}$. Vì số đỉnh của khối đa diện là D nên số cạnh xuất phát từ mỗi đỉnh phải nhỏ hơn D, do đó $C_k<D$. Như vậy tập C_k có D phần tử mà chỉ nhận các giá trị từ 1 đến D, do đó theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại hai phần tử có giá trị bằng nhau.

Vậy một khối đa diện bất kỳ, luôn tồn tại hai đỉnh mà số cạnh xuất phát từ hai đỉnh đó bằng nhau.

Bài 2

1. Gọi Đ là số đỉnh của đa diện và C là số cạnh của đa diện ấy .Vì mỗi đỉnh đều là đỉnh chung của ba cạnh và mỗi cạnh chỉ qua hai đỉnh nên $3Đ = 2C \Rightarrow 3Đ$ là số chẵn$\Rightarrow$ Đ là số chẵn.

2. Giả sử A là đỉnh chung của ba cạnh AB, AC và AD của khối đa diện. Khi đó mặt của đa diện chứa cạnh AB, AC chính là tam giác ABC; mặt của đa diện chứa cạnh AC, AD chính là tam giác ACD; mặt của đa diện chứa cạnh AD, AB chính là tam giác ABD. Vì BC, BD, DC là cạnh của đa diện đó nên tam giác BCD là mặt của đa diện . Vậy đa diện đã cho được giới hạn bởi 4 mặt ABC, ACD, ADB và BCD nên đa diện đó là một khối tứ diện.

3. Giả sử tứ diện $ABCD$ có tâm đối xứng là O.

Nếu O thuộc một mặt phẳng chứa một mặt của tứ diện thì mặt đó là hình có tâm đối xứng. Điều này không thể xảy ra vì mặt của tứ diện là một tam giác mà tam giác là hình không có tâm đối xứng .

Vậy O không thuộc các mặt phẳng chứa mặt của tứ diện. Gọi A', B' lần lượt là hai điểm đối xứng của A và B qua O thì A', B' lần lượt thuộc hai mặt BCD và ACD của tứ diện. Vì đoạn $A'B'$ là hình đối xứng của đoạn AB qua O nên $A'B' /\!\!/= AB$

$\Rightarrow$ tứ giác $ABB'A'$ là hình bình hành

$\Rightarrow BA' /\!\!/ AB'$

Nếu A' không trùng B thì B' không trùng A, khi đó hai mặt phẳng (BCD) và (ACD) lần lượt chứa hai đường thẳng song song BA' và AB' nên giao tuyến CD của chúng cũng song song với BA', điều này không thể xảy ra vì A' thuộc tam giác BCD, do đó A' trùng B và B' trùng A, khi đó O là trung điểm của AB tức là O thuộc một mặt của tứ diện (điều mâu thuẩn).

Vậy tứ diện không có tâm đối xứng .

Bài 3

1. Xét khối đa diện (H) có một mặt là M_1. Gọi A, B, C là ba đỉnh liên tiếp của M_1. Ta có AB, BC là hai cạnh liên tiếp của (H).

Vì một cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt, nên tồn tại mặt M_2 khác M_1 và có chung cạnh AB với M_1. Mặt M_2 phải có ít nhất một đỉnh khác với các đỉnh A, B.

Giả sử $D \equiv C$ thì M_2 và M_1 có hai cạnh chung là AB và $BC(BD)$, tức là hai mặt trùng nhau, điều này mâu thuẫn với M_2 khác M_1. Vậy D phải khác C, tức là đa diện (H) phải có ít nhất bốn đỉnh.

2. Xét hình đa diện (H) có một mặt là M_1. Khi đó M_1 có ít nhất ba cạnh liên tiếp là $C_1; C_2; C_3$. Gọi M_2 là mặt khác M_1 có chung cạnh C_1 với M_1. Trên mặt M_2

còn có ít nhất hai cạnh $C_4;C_5$ khác C_1. Do tính phân biệt của M_2 và M_1 nên $C_4;C_5$ phải khác $C_2;C_3$. Như vậy $C_1;C_2;C_3;C_4;C_5$ khác nhau.

Gọi M_3 là mặt khác M_1 có chung cạnh C_2 với M_1. Khi đó M_3 có ít nhất hai cạnh $C_6;C_7$ khác C_2 và phân biệt với $C_1;C_3$.

- Nếu C_6 khác với $C_4;C_5$ thì hình (H) có ít nhất 6 cạnh.
- Nếu $C_6 \equiv C_4$ thì do M_3 và M_2 có nhiều nhất một cạnh chung nên C_7 khác $C_4;C_5$ nên (H) có ít nhất 6 cạnh là $C_1;C_2;C_3;C_4;C_5;C_7$.
- Nếu $C_6 \equiv C_5$ thì cũng tương tự trên (H) có ít nhất 6 cạnh.

Vậy hình (H) luôn có ít nhất 6 cạnh.

3. Giả sử mỗi đỉnh của khối đa diện là đỉnh chung của không ít hơn 6 cạnh. Khi đó, gọi $C_1, C_2, \ldots, C_D$ lần lượt là số cạnh xuất phát từ các đỉnh của khối đa diện thì $C_k \geq 6$ với mọi $k = \{1;2;\ldots;D\}$.

Ta có mỗi cạnh đi qua hai đỉnh nên

$$C = \frac{C_1 + C_2 + \ldots + C_D}{2} \geq \frac{6D}{2} \Rightarrow D \leq \frac{C}{3}.$$

Chứng minh tương tự ta có $M \leq \frac{2C}{3} \Rightarrow D + M \leq C$. Điều này không thể xảy ra, nên bài toán được chứng minh.

Bài 4

1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hai tam giác ACD và BCD bằng nhau (c.c.c)

$\Rightarrow AN = BN$ (hai đường trung tuyến tương ứng trong hai tam giác ACD, BCD)

$\Rightarrow$ Tam giác ANB cân tại N

$\Rightarrow NM$ là đường trung trực của AB.

Tương tự MN cũng là đường trung trực của CD.

Thực hiện đối xứng trục MN ,ta có

$A \to B, B \to A, C \to D, D \to C$ (kí hiệu $A \to B$ có nghĩa là B là ảnh của A qua phép biến hình)

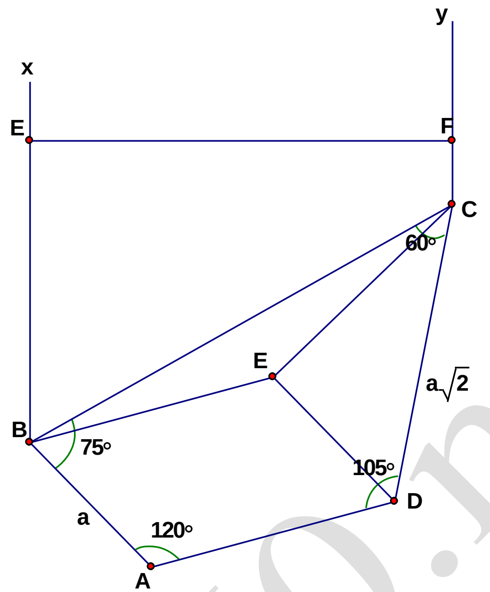
Suy ra $A' = hcA_{/CD} \to B' = hcB_{/CD}$

$C' = hcC_{/AB} \to D' = hcD_{/CD}$

$D' = hcD_{/CD} \to C' = hcC_{/AB}$

$\Rightarrow A'C' \to B'D'$ và $A'D' \to B'C \Rightarrow A'C' = B'D'$ và $A'D' = B'C'$.

2.



Ta có : $\widehat{ADC} = 360^0 - \left(\widehat{BAD} + \widehat{ABC} + \widehat{DCB}\right) = 360^0 - \left(120^0 + 75^0 + 60^0\right) = 105^0$

Thực hiện phép tịnh tiến $\overrightarrow{AD}$. Điểm B biến thành điểm E, khi đó tứ giác ABED là hình bình hành . Suy ra : $DE = AB = a$.

$\widehat{ADE} = \widehat{ABE} = 180^0 - \widehat{BAD} = 60^0 \Rightarrow \widehat{EDC} = \widehat{ADC} - \widehat{ADE} = 105^0 - 60^0 = 45^0$

Tam giác CED có $\widehat{EDC} = 45^0, CD = a\sqrt{2}, DE = a$ nên là tam giác vuông cân tại

$E \Rightarrow \widehat{ECD} = 45^0 \Rightarrow \widehat{ECB} = \widehat{DCB} - \widehat{ECD} = 60^0 - 45^0 = 15^0$

Lại có : $\widehat{EBC} = \widehat{ABC} - \widehat{ABE} = 75^0 - 60^0 = 15^0$

Suy ra tam giác BEC cân tại $E \Rightarrow EB = EC = ED = a$, $\widehat{BEC} = 150^0$.

Áp dụng định lí hàm cosin trong tam giác BEC, ta có:

$BC^2 = EB^2 + EC^2 - 2EB.EC.\cos\widehat{BEC} = 2a^2 - 2a^2\cos 150^0$

$= 2a^2 + 2a^2.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = a^2\left(2+\sqrt{3}\right). \Rightarrow BC = a\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Vì BE, CF cùng vuông góc với (P) nên BC là hình chiếu vuông góc của EF lên (P), suy ra $BC = EF\cos\left(EF,(P)\right) = EF\cos 60^0$

$$\Rightarrow EF = \frac{BC}{\cos 60^0} = \frac{a\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\frac{1}{2}} = 2a\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

3. Gọi M' là điểm đối xứng của M qua EF và H là giao điểm của MM' và EF thì H là trung điểm của MM' và $MA+MB=AM+AM'$.
Dựng hình bình hành $AMNM'$,ta có :

$$AM+MN\ge AN=2AH\Rightarrow AM+AM'\ge 2AH\Rightarrow MA+MB\ge 2AH$$

Tương tự $MC+MD\ge 2CH$
Ta chứng minh $HA+HC\ge OA+OC$.
Dựng $\overrightarrow{EA'}=\overrightarrow{CF}$, ta có tứ giác $EA'FC$ là hình bình hành nên O là trung điểm của $A'C$ và $EA'\perp EF$ (do $EF\perp CF$) suy ra $OA'=OC$
Hai tam giác vuông HEA và HEA' có chung cạnh HE và $EA=EA'$ (cùng bằng CF) nên chúng bằng nhau, suy ra $HA'=HA$. Do đó
$HA+HC=HA'+HC\ge A'C=OA'+OC=OA+OC$.
Suy ra $MA+MB+MC+MD\ge 2(AH+CH)$

$$\ge 2(OA+OC)=OA+OB+OC+OD \text{ (đpcm)}$$

Bài 5

1. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (P), ta có $MA=MA'$, suy ra
$MA+MB=MA'+MB\ge A'B$.
$MA+MB=A'B\Leftrightarrow M$ là giao điểm của $A'B$ và (P).
Vậy $\min(MA+MB)=A'B$ đạt được khi và chỉ khi M là giao điểm của $A'B$ với (P).

2. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua c, ta có : $\overrightarrow{AA'}=2\overrightarrow{IO}\Rightarrow I$ là trung điểm của $A'B$.
Vì (P) và (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến c; AA' vuông góc c tại trung điểm E của AA'. Từ đó suy ra A và A' đối xứng qua (Q)
$\Rightarrow A'Oz$ là ảnh của AOz qua phép đối xứng qua $(Q)\Rightarrow A'Oz=AOz$.
Trong mặt phẳng xác định bởi Oz và $A'B$ ta có:

$$A'Oz+BOz=180^0\Rightarrow AOz+BOz=180^0$$

3. Gọi D là hình chiếu vuông góc của C lên mặt phẳng (P). Thực hiện phép tịnh tiến vectơ $\overrightarrow{DC}$, mặt phẳng (P) biến thành mặt phẳng (P'). Gọi A',B',G' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A,B,G lên mặt phẳng (P'), ta có $AA'=a+c, BB'=b+c, GG'=h+c$. Vì tam giác $A'B'C$ là hình chiếu vuông góc của tam giác ABC lên mặt phẳng (P'), G là trọng tâm của tam giác ABC nên G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C$. Suy ra $\begin{cases} \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{O} \\ \overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C}=\overrightarrow{O} \end{cases}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'C}$$

$$=3\overrightarrow{GG'}+\underbrace{\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}}_{\vec{0}}+\underbrace{\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C}}_{\vec{0}}=3\overrightarrow{GG'}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}=3\overrightarrow{GG'}\ \left(\text{do } \overrightarrow{CC}=\vec{0}\right)$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}\right|=3\left|\overrightarrow{GG'}\right|\ \ (1)$$

Vì $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ là hai vectơ cùng hướng nên $\left|\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}\right|=\left|\overrightarrow{AA'}\right|+\left|\overrightarrow{BB'}\right|$

$(1)\Rightarrow 3\left|\overrightarrow{GG'}\right|=\left|\overrightarrow{AA'}\right|+\left|\overrightarrow{BB'}\right|\Rightarrow 3GG'=AA'+BB'$

$\Rightarrow 3(h+c)=a+c+b+c\Rightarrow h=\frac{1}{3}(a+b-c).$

4.

Xét phép vị tự tâm A tỉ số $\frac{3}{2}$ và gọi A_1,B_1 lần lượt là ảnh của A',B, ta có :

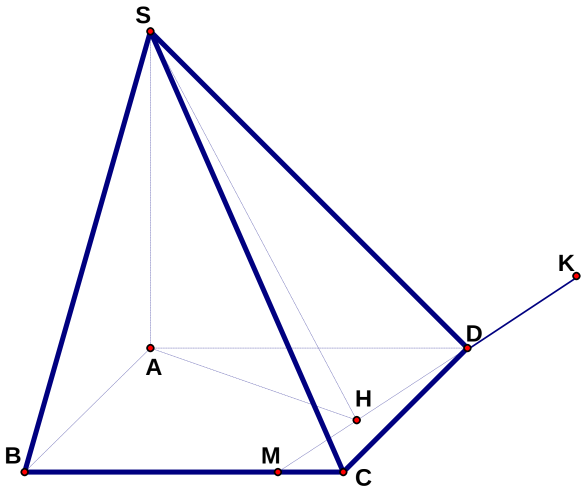
$\overrightarrow{AA_1}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{AB_1}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\Rightarrow A_1,B_1,M,N$ thẳng hàng

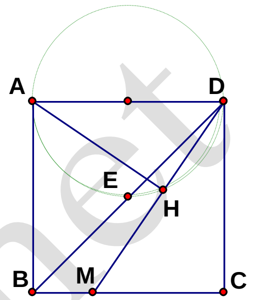
Tương tự gọi D_1 là ảnh của D qua phép vị tự đó thì ta cũng có B_1,D_1P,Q thẳng hàng và A_1,D_1,R,S thẳng hàng .

Vậy phép vị tự tâm A, tỉ số $\frac{3}{2}$ biến mặt phẳng $(A'BD)$ thành mặt phẳng đi qua 6 điểm M,N,P,Q,R,S, từ đó suy ra đpcm.

Bài 6

1.





Nối AH, vì $SH \perp DM$ nên theo định lí ba đường vuông góc, ta có $AH \perp DM$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, $AHD = 90^0$, suy ra H thuộc đường tròn (C) đường kính AD.

Mặt khác

Khi $M \equiv B$ thì $H \equiv E$ là giao điểm thứ hai của (C) với BD.

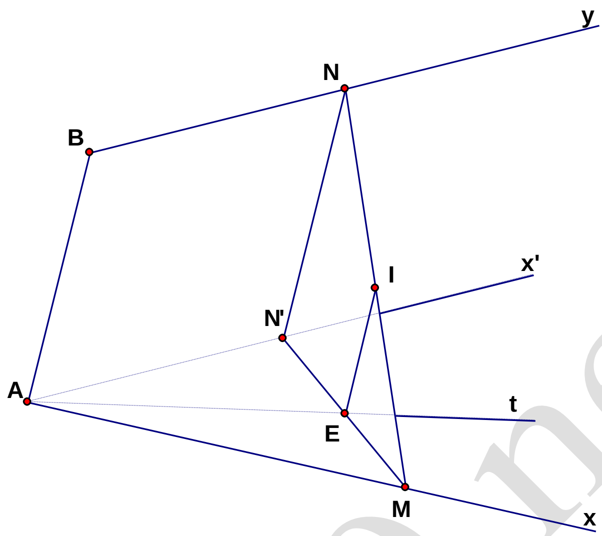
Khi $M \equiv C$ thì $H \equiv D$

Khi M di động trên cạnh BC thì H di động trên cung nhỏ DE của đường tròn (C) chứa trong góc BDC.

Vậy tập hợp các điểm H là cung nhỏ DE của đường tròn (C) chứa trong góc BDC.

Lại có K là điểm đối xứng của H qua điểm D, suy ra tập hợp các điểm K là ảnh của cung nhỏ DE nói trên qua phép đối xứng tâm D.

2.

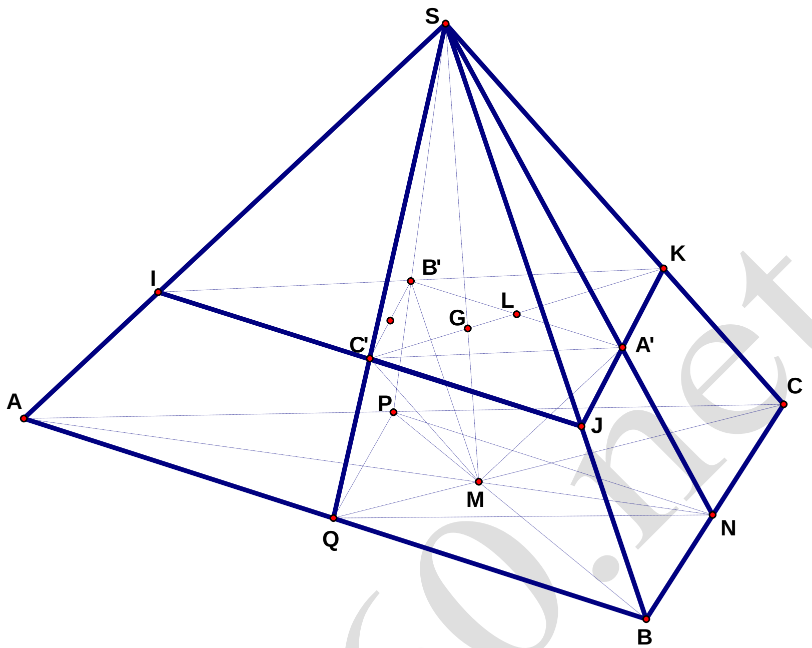


Tia By là ảnh của tia Ax' qua phép tịnh tiến $\overrightarrow{AB}$ do đó By song song và cùng chiều với tia Ax'. Từ N dựng đường thẳng song song với AB cắt tia Ax' tại N', khi đó tứ giác $ABNN'$ là hình bình hành , suy ra $AN' = BN$. Lại có $BN = AM$, do đó $AM = AN'$, suy ra tam giác AMN' cân tại A . Gọi E là trung điểm của MN' thì E thuộc tia phân giác At của góc $x'Ax$. Vậy tập hợp các điểm E là tia At .

Vì EI là đường trung bình của tam giác MNN' nên $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{N'N} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ do đó I là ảnh của E qua phép tịnh tiến $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Suy ra tập hợp các điểm I là ảnh của tia At qua phép tịnh tiến $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

3.



1.Cách dựng các điêm A', B', C'.

Gọi N là giao điểm của MA với BC, P là giao điểm của MB với AC, Q là giao điểm của MC với AB. Ta có ba điểm S, A', N là ba điểm chung của mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng α xác định bởi hai đường thẳng song song $SA, A'M$ nên chúng thẳng hàng, từ đó suy ra cách dựng A' như sau.

- Dựng N là giao điểm của MA với BC.
- Dựng A' là giao điểm của SN và đường thẳng đi qua M và song song với SA.

Tương tự B' là giao điểm của SP và đường thẳng đi qua M song song với SB; C' là giao điểm của SQ và đường thẳng đi qua M song song với SC.

2.Tập hợp các điêm G.

Ta có: $\begin{cases} MB' \parallel SB \\ MC' \parallel SC \end{cases} \Rightarrow (MB'C') \parallel (SBC)$

Mặt khác $\begin{cases} (A'B'C') \cap (MB'C') = B'C' \\ A' \in (A'B'C') \cap (SBC) \end{cases}$

Do đó giao tuyến của mặt phẳng $(A'B'C')$ và mặt phẳng (SBC) là đường thẳng đi qua A', song song với đường thẳng $B'C'$ và cắt SB, SC lần lượt tại J và K.

Giao tuyến của mp $(A'B'C')$ với mặt phẳng (SAB) là đường thẳng $JC' \parallel A'B'$ và cắt SA tại I.
Giao tuyến của $mp(A'B'C')$ với mặt phẳng (SCA) là đường thẳng $KI \parallel A'C'$.
Tứ giác $A'KB'C'$ có $A'K \parallel B'C'$, $KB' \parallel A'C'$ nên là hình bình hành do đó hai đường chéo $C'K$ và $A'B'$ cắt nhau tại trung điểm K của chúng .Từ đó suy ra trọng tâm G của tam giác $A'B'C'$ thuộc $C'K$.
Chứng minh tương tự G cũng thuộc $B'J$.
Ba điểm S,G,M là ba điểm chung của hai mặt phẳng (SBP) và (SCQ) nên chúng thẳng hàng.
Vì $MC' \parallel SC$ nên ta có: $\frac{GM}{GS} = \frac{GC'}{GK} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{SG}{SM} = \frac{2}{3}$.
Suy ra G là ảnh của M qua phép vị tự tâm S, tỉ số $\frac{2}{3}$, vì tập hợp các điểm M là miền trong của tam giác ABC nên tập hợp các điểm G là miền trong của tam giác $A_1B_1C_1$ là ảnh của tam giác ABC qua phép vị tự tâm S, tỉ số $\frac{2}{3}$.

Bài 7

1. O là trọng tâm của tứ diện $ABCD$, tức là điểm thỏa hệ thức : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{O}$. Khi đó, ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$. Lại có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN}$ (giả thiết), suy ra $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MO}$ **.** Điều đó chứng tỏ rằng N là điểm đối xứng của M qua O, vì tập hợp M là mặt phẳng (P) nên tập hợp N là mặt phẳng (P') đối xứng của (P) qua O.

2. Gọi K là hình chiếu vuông góc của S lên MB. Vì

$$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (MBC) \perp (SAB).$$

$$\begin{cases} (MBC) \cap (SAB) = MB,\ (MBC) \perp (SAB) \\ SK \subset (SAB), SK \perp MB \end{cases} \Rightarrow SK \perp (MBC) \Rightarrow K = hcM/_{(MBC)}$$

Trong mặt phẳng (SAB), $SKB = 90^0$, suy ra K thuộc đường tròn (C) đường kính SB chứa trong mặt phẳng (SAB).
Mặt khác vì M chỉ di động trên cạnh SA nên K chỉ di động trên cung nhỏ SA của đường tròn (C), gọi cung này là (L). Suy ra tập hợp K là cung (L).

Qua phép đối xứng trục $SA: S \to S$, $K \to H \in (P)$, do đó $SK \to SH$ và vì $SK \perp (MBC)$, (P) là ảnh của mặt phẳng (MBC) qua phép đối xứng trục SA nên $SH \perp (P)$ tức là H là hình chiếu vuông góc của S lên (P). Lại có tập hợp các điểm K là cung (L), suy ra tập hợp các điểm H là ảnh của (L) qua phép đối xứng trục SA.

3. Gọi I là giao điểm của DM và CN, dễ thấy I là điểm chung của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) nên I thuộc giao tuyến d của hai mặt phẳng này (d là đường thẳng qua S và song song với AD, BC).

Mặt khác vì M chỉ di động trên cạnh SA nên I chỉ di động trên tia Sx nằm trên d và cùng chiều với $\overrightarrow{DA}$. Vậy tập hợp các điểm I là tia Sx.

Phép đối xứng qua mặt phẳng (SCD) biến :

$$\begin{cases} D \to D, M \to M' \\ C \to C, N \to N' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} DM \to DM' \\ CN \to CN' \end{cases} \to I = DM \cap CN \to E = DM' \cap CN'.$$

Suy ra tập hợp E là ảnh của tia SX qua phép đối xứng qua mặt phẳng (SCD).

4. a.Tập hợp các điểm M'

Dựng đường thẳng qua A' song song với OO', cắt d_1 tại K. Vì $MM' // OO'$ nên $MM' // A'K$, lại có $M \in AA'$ do đó MM' chứa trong mặt phẳng $(AA'K)$ và M' thuộc AK, mặt khác $\overrightarrow{MA'} = k\overrightarrow{MA}$ nên ta có: $\overrightarrow{M'K} = k\overrightarrow{M'A}$.

Mặt phẳng $(AA'K)$ song song với mặt phẳng (P) (vì chứa hai đường thẳng cắt nhau $A'K, AA'$ song song với (P)) Do đó mặt phẳng (Q) cắt hai mặt phẳng trên theo hai giao tuyến song song : $AK // Ox$.

Trong góc (d, d_1), đường thẳng AK song song với đường thẳng cố định Ox và điểm M' chia đoạn AK theo một ti số không đổi . Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng (D) vẽ từ O và qua một vị trí đặc biệt của M'.

b.Tập hợp các điểm M.

Ta có

$$\begin{cases}\overrightarrow{MA'}=k\overrightarrow{MA}\\ \overrightarrow{M'K}=k\overrightarrow{M'A}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AA'}=k\overrightarrow{MA}\\ \overrightarrow{M'A}+\overrightarrow{AK}=k\overrightarrow{M'A}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{M'A}+\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{AK}=k\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{M'A}\right)$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{MM'}+\overrightarrow{KA'}=k\overrightarrow{MM'}\Rightarrow(1-k)\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{A'K}\Rightarrow\overrightarrow{M'M}=\frac{1}{1-k}\overrightarrow{KA'}=\frac{1}{1-k}\overrightarrow{OO'}$$

$\left(\text{do}\,\overrightarrow{KA'}=\overrightarrow{OO'}\right)$. Vậy M là ảnh của M' qua phép tịnh tiến $\frac{1}{1-k}\overrightarrow{OO'}$. Suy ra tập hợp các điểm M là ảnh của đường thẳng (D) qua phép tịnh tiến $\frac{1}{1-k}\overrightarrow{OO'}$.

5. a.Tập hợp các điểm A',B',C'.

Gọi A_1,B_1,C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A,B,C trên (P).Khi đó AA_1,BB_1,CC_1 và theo giả thiết thì $AA'\,//\,BB'\,//\,CC'$ nên ba mặt phẳng $(AA_1A'),(BB_1B'),(CC_1C')$ song song với nhau, do đó chúng cắt mặt phẳng (P) theo ba giao tuyến song song A_1A',B_1B',C_1C'. Từ đó suy ra ba tam giác vuông AA_1A',BB_1B',CC_1C' đồng dạng. Ta có:

$$\frac{AA'}{AA_1}=\frac{BB'}{BB_1}=\frac{CC'}{CC_1}=\frac{AA'+BB'+CC'}{AA_1+BB_1+CC_1}.$$

Vì ba điểm A,B,C cố định nên AA_1,BB_1,CC_1 là ba đoạn thẳng có độ dài không đổi. Đặt $AA_1+BB_1+CC_1=h\,(h>k)$.

Lại có $AA'+BB'+CC'=k$

Suy ra $AA'=AA_1.\frac{h}{k}$, $BB'=BB_1.\frac{h}{k}$, $CC'=CC_1.\frac{h}{k}$.

Trong tam giác vuông AA_1A',

$$A_1A'=\sqrt{AA'^2-AA_1{}^2}=\sqrt{AA_1^2\left(\frac{k^2}{h^2}-1\right)}=AA_1\sqrt{\frac{k^2}{h^2}-1}$$

Tương tự $B_1B'=BB_1\sqrt{\frac{k^2}{h^2}-1}$, $C_1C'=CC_1\sqrt{\frac{k^2}{h^2}-1}$.

Vậy tập hợp các điểm A',B',C' lần lượt là các đường tròn tâm A_1,B_1,C_1; bán kính $AA_1\sqrt{\frac{k^2}{h^2}-1}$, $BB_1\sqrt{\frac{k^2}{h^2}-1}$, $CC_1\sqrt{\frac{k^2}{h^2}-1}$ chứa trong mặt phẳng (P).

b.Tập hợp trọng tâm G' .

Gọi M, M' theo thứ tự là trung điểm của BC và $B'C'$ thì $MM' \,/\!/\, BB' \,/\!/\, CC'$ do đó $MM' \,/\!/\, AA'$. Trong mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng song song AA', MM', hai đường thẳng AM và $A'M'$ cắt nhau tại I. Khi đó I cũng là giao điểm của AM với (P) nên I cố định. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có :

$$\frac{GM}{GA} = \frac{G'M'}{G'A'} = \frac{1}{2} \Rightarrow GG' \,/\!/\, AA' \Rightarrow \frac{IG'}{IA'} = \frac{IG}{IA} = t \text{ (hằng số)} \Rightarrow \overrightarrow{IG'} = t.\overrightarrow{IA'}$$

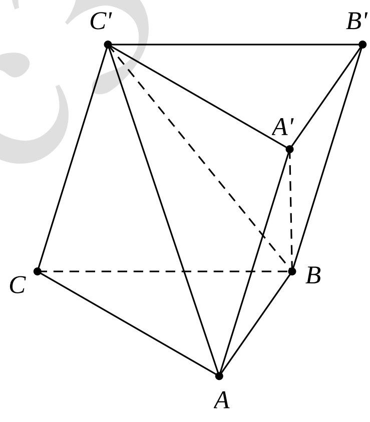
Suy ra G' là ảnh của A' qua phép vị tự tâm I, tỉ số t.

Vì tập hợp các điểm A' là đường tròn (a) tâm A_1, bán kính $AA_1\sqrt{\frac{k^2}{h^2} - 1}$ chứa trong (P) nên tập hợp các điểm G' là đường tròn ảnh của đường tròn (a) qua phép vị tự tâm I, tỉ số t.

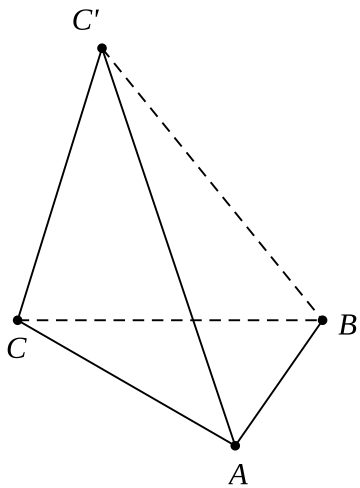
Vấn đề 2. PHÂN CHIA – LẮP GHÉP CÁC KHỐI ĐA DIỆN CHỨNG MINH HAI ĐA DIỆN BẰNG NHAU, CÁC BÀI TOÁN VỀ ĐA DIỆN ĐỀU

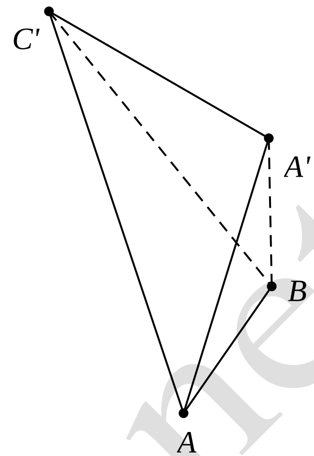
Bài 1

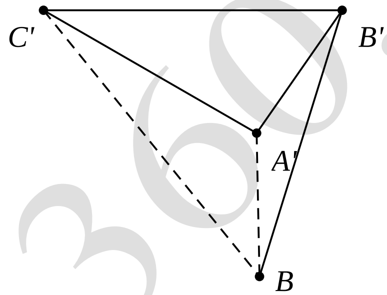
1. Ta phân chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành ba khối tứ diện $C'ABC$, $ABA'C'$, $BA'B'C'$.



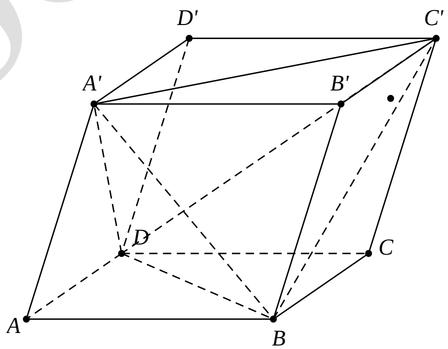
Khối lăng trụ chia thành 3 khối tứ diện

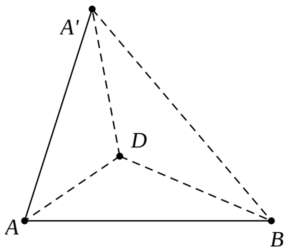


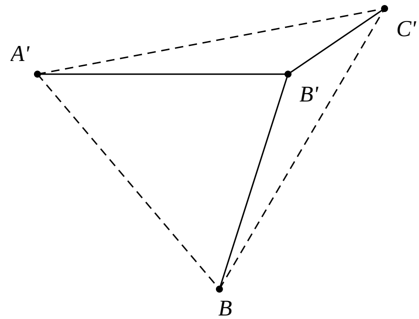


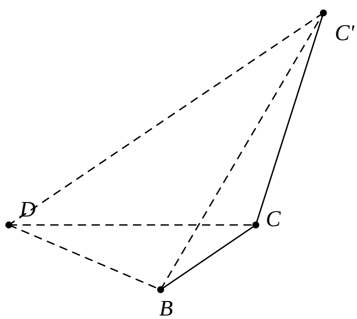


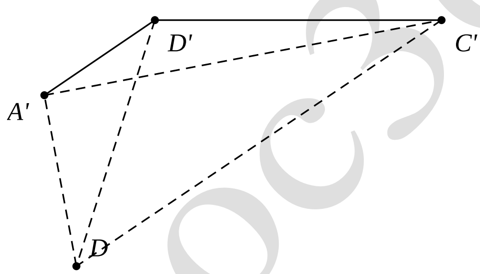
2. Chia khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thành 5 khối tứ diện
$A'ABD,\ BA'B'C',\ C'BCD,\ DA'C'D',\ A'C'BD$

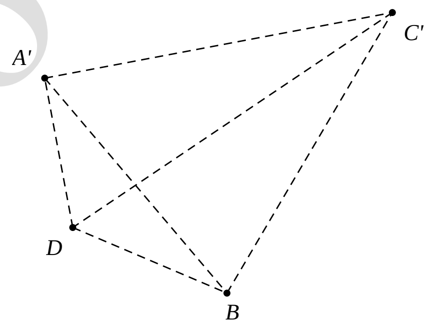








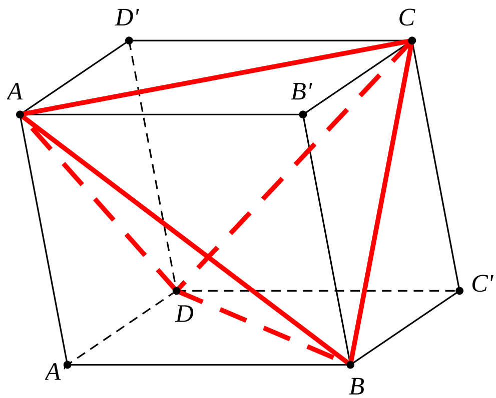




3. Vì AB và CD chéo nhau nên sẽ tồn tại cặp mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} AB \subset (\alpha) // CD \\ CD \subset (\beta) // AB \end{cases}$$

Tương tự vậy cũng tồn tại các cặp mặt phẳng
$(P),(Q)$ đi qua một trong hai đường thẳng AC, BD và song song với đường còn lại
$(R),(\gamma)$ đi qua một trong hai đường thẳng AD, BC và song song với đường còn lại
6 mặt phẳng trên cắt nhau tạo thành một khối hộp. Từ đó ta có đpcm.



4. Gọi O là tâm của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và $Đ_O$ là phép đối xứng tâm O khi đó :

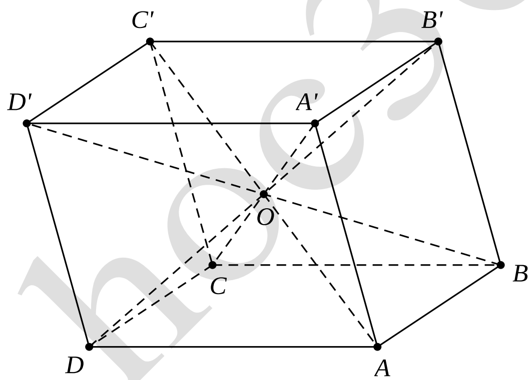
$Đ_O : A' \to C$

$A \to C'$

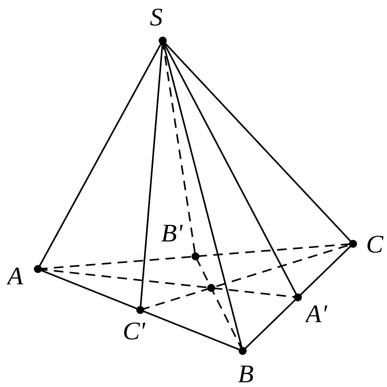
$B \to D'$

$D \to B'$

Do đó $Đ_O$ biến tứ diện $A'ABD$ thành $CC'D'B'$ nên chúng bằng nhau.

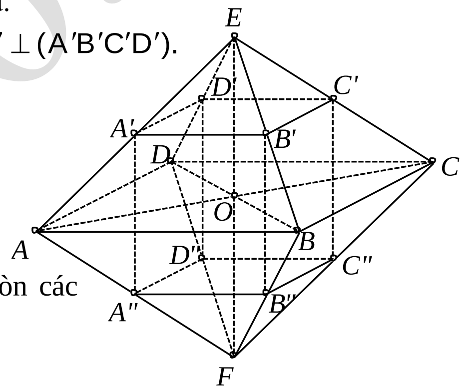


5. Xét phép đối xứng qua mặt phẳng (SAA') biến các điểm S, A, B, A' lần lượt thành các điểm S, A, C, A' và phép đối xứng qua mặt phẳng (SCC') biến các điểm S, A, C, A' thành các điểm S, B, C, B'. Như vậy, qua hai phép đối xứng trên, bốn đỉnh S, A, B, A' của tứ diện $SABA'$ thành bốn đỉnh S, B, C, B' của tứ diện $SBCB'$ nên hai tứ diện đó bằng nhau.



Bài 2 Tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a, nên các tứ giác $A'B'C'D', A''B''C''D''$ là các hình vuông cạnh $\frac{a}{2}$ và hai mặt phẳng $(A'B'C'D')$ và $(A''B''C''D'')$ song song với nhau.

Ta có $A'A''//EF$ nên $A'A'' \perp (ABCD) \Rightarrow A'A'' \perp (A'B'C'D')$.



Tương tự suy ra các cạnh bên $A'A'', B'B'', C'C'', D'D''$ cùng vuông góc với hai mặt đáy. Vậy $A'B'C'D'.A''B''C''D''$ là hình hộp chữ nhật.

Các cạnh đáy của hình hộp có độ dài là $\frac{a}{2}$, còn các cạnh bên của hình hộp có độ dài là $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Bài 3

1. (bạn đọc tự vẽ hình)

a) Khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được phân chia thành ba khối tứ diện là:

$$ABCA'; BCA'B'; CA'B'C'.$$

b) Khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được phân chia thành khối chóp tam giác $C.A'B'C'$ và khối chóp tứ giác là $C.A'B'AB$.

2. (Bạn đọc tự vẽ hình) Khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ thành năm khối tứ diện: $ABDA'$, $CBDC'$, $B'A'C'B$, $D'A'C'D$, $BDA'C'$.

3. Từ hình chóp trên ta dựng hình lập phương $HEFG.ABCD$. Ta thấy hai hình chóp $F.ABCD$ và $F.ABEH$ đối xứng nhau qua mặt phẳng (ABF), hai hình chóp $F.ABCD$ và $F.AHGD$ đối xứng nhau qua mặt phẳng (ADF). Do đó ba hình chóp $F.ABCD$, $F.ABEH$, $F.AHGD$ bằng nhau. Như vậy hình lập phương $HEFG.ABCD$ được chia thành ba khối chóp bằng $F.ABCD$. Từ đó suy ra có thể ghép ba hình chóp bằng hình chóp $F.ABCD$ để được một hình lập phương.

4. a) Gọi O là tâm của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, phép đối xứng tam O biến các điểm A, A', B', C', D' thành các điểm C', C, D, A, B nên phép đối xứng qua tâm O biến hình chóp $A.A'B'C'D'$ thành hình chóp $C'.ABCD$ do đó hai hình chóp $A.A'B'C'D'$ và $C'.ABCD$ bằng nhau

b) Xét phép đối xứng qua mặt phẳng $(ADC'B')$ các điểm A, B, C, A', B', C' lần lượt biến thành các điểm A, A', D', B, B', C' nên biến lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành lăng trụ $AA'D'.BB'C'$ nên hai lăng trụ đó bằng nhau.

5. Xét tứ diện ABCD. Gọi M, N là hai điểm thuộc cạnh AB sao cho M nằm giữa A và N. Gọi E, F là hai điểm thuộc cạnh CD sao cho E nằm giữa C và F. Khi đó các mặt phẳng (ABE), (ABF), (CDN), (CDM) sẽ phân chia khối tứ diện ABCD thành 9 khối tứ diện.

Bài 4

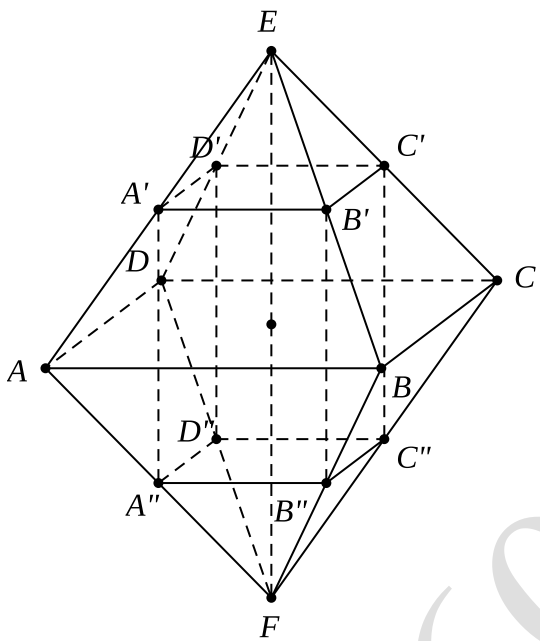
1. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a.

Do đó các tứ giác $A'B'C'D'$ và $A''B''C''D''$ là các hình vuông cạnh $\frac{a}{2}$ và

$(A'B'C'D')//(A''B''C''D'')$.

Mặt khác $A'A''//EF \Rightarrow A'A'' \perp (A'B'C'D')$

Tương tự ta cũng có $B'B'', C'C'', D'D''$ cùng song song với EF. Từ đó suy ra $A'B'C'D'.A''B''C''D''$ là một hình hộp chữ nhật.



2. a) Gọi Q, M lần lượt là trung điểm của CD, CB; G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm các mặt $(ABC), (ACD), (ABC)$ và (BCD)

Gọi a là cạnh của tứ diện, ta có : $G_1G_2 = \frac{2}{3}MQ = \frac{2}{3}\frac{a}{2} = \frac{a}{3}$.

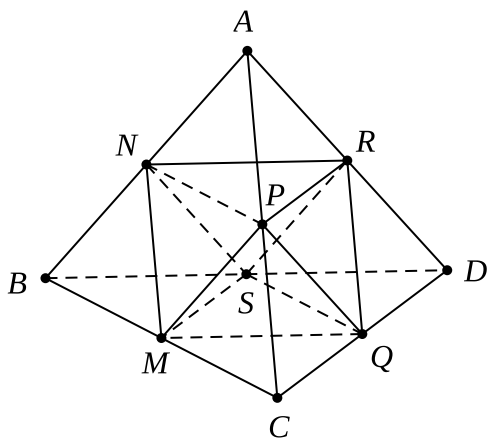
Tương tự $G_1G_4 = G_1G_3 = G_2G_3 = G_2G_4 = G_3G_4 = \frac{a}{3}$.

Từ đó suy ra $G_1G_2G_3G_4$ là một tứ diện đều cạnh $\frac{a}{3}$.

b) Gọi N, P, R, S lần lượt là trung điểm các cạnh AD, AB, AC, BD.

Ta có: $QM = QN = QS = QR = PM = PN = PS = PR = \frac{a}{2}$.

Vậy $MRNSQP$ là hình bát diện đều.



3. a) Vì $AE = AF = BE = BF = CE = CF = DE = DF$ nên A, B, C, D nằm trên mặt phẳng trung trực của EF.

b) Vì $(ABCD)$ là mặt phẳng trung trực của EF nên

$EF \perp (ABCD) \Rightarrow (ECFA) \perp (ABCD)$ (Vì $EF \subset (CEAF)$).

4. Xét khối bát diện đều $ABCDEF$ cạnh a. Gọi $O, M, N, P, Q, M', N', P', Q'$ lần là tâm các mặt $ABCD, EAD, EAB, EBC, ECD, FAD, FAB, FBC, FCD$.

Ta chứng minh được AC, BD, EF đôi một vuông góc tại O.

Ta có $MM'//EF$ và $MM' = \frac{1}{3}EF = \frac{1}{3}a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}a}{3}$, tương tự NN', PP', QQ' cũng song song với E và bằng $\frac{\sqrt{2}a}{3}$. Vậy $MNPQ.M'N'P'Q'$ là hình hộp.

Mặt khác MN, MQ, MM' lần lượt song song với BD, AC, EF nên chúng đôi một vuông góc, lại có $MN = \frac{1}{3}BD = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ do đó $MNPQ.M'N'P'Q'$ là hình lập phương.

5. Xét hình lập phương cạnh a.

Gọi M, N, P, Q, E, F lần lượt là tâm các mặt $ABB'A', ADD'A', DCC'D', BCC'B', ABCD, A'B'C'D'$. Ta có $EM = EN = EP = EQ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$FM = FN = FP = FQ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $MNPQEF$ là bát diện đều cạnh $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

6. Ghép hai khối tứ diện đều bằng nhau (một mặt của tứ diện này ghép vào một mặt của tứ diện kia, hai đỉnh không thuộc hai mặt đó nằm khác phía so với chính mặt phẳng ghép) ta được khối đa diện có 6 mặt là 6 tam giác đều. Cứ làm như vậy, nếu ghép $n-1$ khối tứ diện đều ta sẽ được khối đa diện có $2n$ mặt đều. Do đó tồn tại một khối đa diện có 20 mặt là tam giác đều nhưng không phải là khối hai mươi mặt đều.

Bài 5

1.

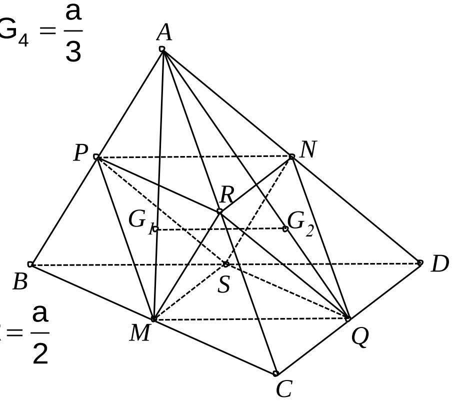
a) Gọi Q, M lần lượt là trung điểm của CD, CB; G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm các mặt $(ABC), (ACD), (ABD)$ và (BCD).

Gọi a là cạnh của tứ diện, ta có

$G_1G_2 = \frac{2}{3}MQ = \frac{2}{3}\frac{a}{2} = \frac{a}{3}$.

Tương tự $G_1G_4 = G_1G_3 = G_2G_3 = G_2G_4 = G_3G_4 = \frac{a}{3}$

nên $G_1G_2G_3G_4$ là một tứ diện đều cạnh $\frac{a}{3}$.



b) Gọi N, P, R, S lần lượt là trung điểm các cạnh AD, AB, AC, BD.

Theo tính chất đường trung bình, ta có

$QM = QN = QS = QR = PM = PN = PS = PR = \frac{a}{2}$

Vậy $MRNSQP$ là hình bát diện đều.

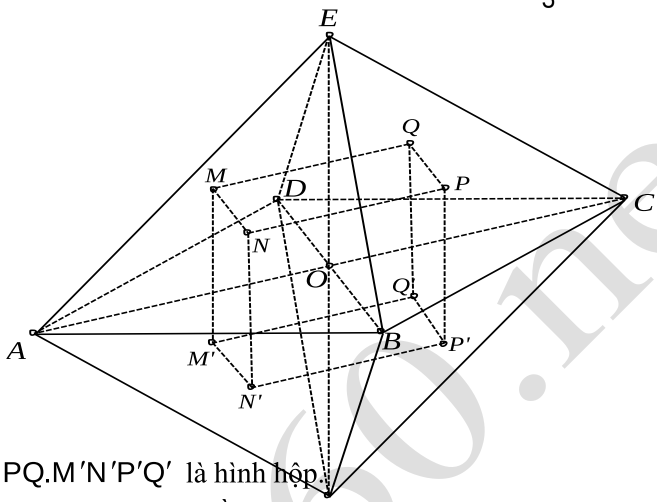
2. Xét khối bát diện đều $ABCDEF$ cạnh a.

Gọi $O, M, N, P, Q, M', N', P', Q'$ lần là tâm của các mặt $ABCD, EAD, EAB, EBC, ECD, FAD, FAB, FBC, FCD$.

Vì các đỉnh A, B, C, D cách đều E, F nên cùng thuộc một mặt phẳng, do đó $ABCD$ là hình thoi. Mà E cách đều A, B, C, D nên $ABCD$ là hình vuông, do đó

AC, BD đôi một vuông góc. Từ đó AC, BD, EF đôi một vuông góc tại O. Ta có $MM'//EF$ và $MM' = \frac{1}{3}EF = \frac{\sqrt{2}a}{3}$.

Tương tự NN', PP', QQ' cũng song song với E và bằng $\frac{\sqrt{2}a}{3}$.



Vậy $MNPQ.M'N'P'Q'$ là hình hộp.

Mặt khác MN, MQ, MM' lần lượt song song với BD, AC, EF nên chúng đôi một vuông góc, lại có $MN = \frac{1}{3}BD = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ do đó $MNPQ.M'N'P'Q'$ là hình lập phương.