HƯỚNG DẪN GIẢI.

Vấn đề 1. CÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM, TỌA ĐỘ VECTƠ

Bài 1

1. a) Ta có: $\vec{a}=(2;3;-5),\vec{b}=(0;-3;4),\ \vec{c}=(-1;-2;0)$

Suy ra $3\vec{a}=(6;9;-15),\ 2\vec{b}=(0;-6;8)\Rightarrow\vec{x}=(6;3;-7)$

Do đó: $\left|\vec{x}\right|=\sqrt{6^2+3^2+(-7)^2}=\sqrt{94}$

b) Ta có: $2\vec{b}-\vec{c}=(1;-4;8)$, nên $\vec{y}$ vuông góc với $2\vec{b}-\vec{c}$ khi và chỉ khi

$\vec{y}.\left(2\vec{b}-\vec{c}\right)=0\Leftrightarrow 1.(2x-1)-4.(-x)+8(3x+2)=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

c)

Cách 1: Ta có: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(-3;-8;-6)\Rightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=3+16=19\neq 0$

Nên ba véc tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng.

Cách 2. Giả sử ba véc tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng. Khi đó tồn tại hai số thực x,y sao cho $\vec{a}=x.\vec{b}+y.\vec{c}$ (1)

Mà $x\vec{b}+y\vec{c}=(-y;-3x-2y;4x)$ nên (1) $\Leftrightarrow\begin{cases}-y=2\\-3x-2y=3\\4x=-5\end{cases}$ hệ này vô nghiệm.

Vậy $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng.

Giả sử $\vec{u}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$ (2)

Do $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=(2m-p;3m-3n-2p;-5m+4n)$ nên (2) tương đương với

$\begin{cases}2m-p=3\\3m-3n-2p=7\\-5m+4n=-14\end{cases}\Leftrightarrow m=2,n=-1,p=1$

Vậy $\vec{u}=2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

2. a) Ta có $\vec{a}=(2;3;-1),\ \vec{b}=(-1;0;2),\ \vec{c}=(0;2;-3)$

b) Ta có: $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}=(1;-2;16)\Rightarrow\left|\vec{u}\right|=3\sqrt{29}$.

c) Ta có: $\vec{v} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{v}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow -1(3x-1) + 2(3-x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{6}{5}$.

d) Giả sử: $\vec{x} = k.\vec{a} + p.\vec{b} + l.\vec{c} \Leftrightarrow \begin{cases} k - p = 3 \\ 3k + 2l = 2 \\ -k + 2p - 3l = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{32}{11} \\ p = -\frac{1}{11} \\ l = -\frac{37}{11} \end{cases}$

Vậy $\vec{x} = \frac{32}{11}\vec{a} - \frac{1}{11}\vec{b} - \frac{37}{11}\vec{c}$.

Bài 2

1. Do $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^0$ nên ta có $\vec{a}.\vec{b} = 9$.

a) Sử dụng công thức

$|m\vec{a} + n\vec{b}| = \sqrt{(m\vec{a} + n\vec{b})^2} = \sqrt{m^2\vec{a}^2 + 2mn.\vec{a}\vec{b} + n^2\vec{b}^2}$.

Ta tính được $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{39}$, $|5\vec{a} + 2\vec{b}| = 2\sqrt{129}$, $|3\vec{a} - 2\vec{b}| = 6$.

b) Sử dụng công thức $\left|\left[m\vec{a}, n\vec{b}\right]\right| = |m.n|.|\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin(m\vec{a}, n\vec{b})$.

Với chú ý $(\vec{a}, 3\vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b}) = 30^0$, $(5\vec{a}, -2\vec{b}) = 180^0 - (\vec{a}, \vec{b}) = 150^0$.

2. a) Ta có $[\vec{u}, \vec{v}] = (-2m; -m^2 - m; -m - 5)$ nên ba véc tơ đã cho đồng phẳng khi và chỉ khi $[\vec{u}, \vec{v}].\vec{w} = 0$ hay $-2m.1 + (-m^2 - m).(-1) + (-m - 5).2 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow m = -2; m = 5$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = -2; m = 5$.

b) Ta có $\overrightarrow{CA}(-3; -4; m-1), \overrightarrow{CB}(4-m; 0; 2-2m)$, $\overrightarrow{CD}(1-m; 3+m; m-1)$.

Suy ra $\left[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right] = (8(1-m);\ (m-1)(m+2);\ 4(m-4))$.

Vậy bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng khi và chỉ khi $\left[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right].\overrightarrow{CD} = 0$, hay

$8(1-m)^2 + (m-1)(m+2)(3+m) + 4(m-1)(m-4) = 0$

$\Leftrightarrow (m-1)^2(m+18) = 0 \Rightarrow m = 1;\ m = -18$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = 1;\ m = -18$.

c) Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$ nên

$$\cos 60^0 = \frac{2m+2m+(2m-1).(-1)}{\sqrt{2^2+m^2+(2m-1)^2}.\sqrt{m^2+2^2+(-1)^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2m+1}{\sqrt{5m^2-4m+5}.\sqrt{m^2+5}}$$

Với $m \geq -\frac{1}{2}$, nên bình phương hai vế và rút gọn ta được

$$5m^4-4m^3+14m^2-36m+21=0 \Leftrightarrow (m-1)^2(5m^2+6m+21)=0 \Leftrightarrow m=1$$

Giá trị cần tìm của m là $m=1$.

Bài 3

1. Ta có $\overrightarrow{BC}(3;2;6) \Rightarrow BC=7$ nên $AK=\frac{2S_{ABC}}{BC}=\frac{14}{3}$.

Gọi $A\left(x;\frac{1}{3};z\right)$ thì $\overrightarrow{AK}\left(1-x;2;3-z\right)$. Do đó từ $\begin{cases} AK \perp BC \\ AK = \frac{14}{9} \end{cases}$ suy ra

$$\begin{cases} 3x+6z=25 \\ (1-x)^2+(3-z)^2=\frac{160}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+6z=25 \\ 45z^2-318z+405=0 \end{cases}$$

Từ đó ta có $A\left(-\frac{37}{15};\frac{1}{3};\frac{25}{5}\right)$ (loại) hoặc $A\left(5;\frac{1}{3};\frac{5}{3}\right)$ (thỏa mãn).

2. Gọi L là chân đường vuông góc hạ từ B đến AC.

Ta có $\overrightarrow{CL}=t\overrightarrow{CA}$ nên $L\left(2+3t;3-\frac{8}{3}t;5-\frac{10}{3}t\right)$.

Do đó $\overrightarrow{BL}\left(3+3t;2-\frac{8}{3}t;6-\frac{10}{3}t\right), \overrightarrow{CA}\left(3;-\frac{8}{3};-\frac{10}{3}\right)$ nên

$$\overrightarrow{BL}.\overrightarrow{CA}=0 \Leftrightarrow t=\frac{3}{5} \Rightarrow L\left(\frac{19}{5};\frac{7}{5};3\right).$$

3. $I\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};\frac{5}{3}\right), H\left(3;\frac{4}{3};\frac{7}{3}\right)$.

4. $G\left(2;\frac{13}{9};\frac{17}{9}\right) \Rightarrow \overrightarrow{HG}\left(-1;\frac{1}{9};-\frac{4}{9}\right)=2\overrightarrow{GI}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{18};-\frac{2}{9}\right)$.

Bài 4 $A(2;4;1), B(0;4;4), C(0;0;1)$

1. Gọi $D(x;y;z)$. Từ $DA=BC, DB=CA, DC=AB$ ta có hệ

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=25 \\ x^2+(y-4)^2+(z-2)^2=20 \\ x^2+y^2+(z-1)^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2(1-y) \\ z=\frac{12-4y}{3} \\ x^2+y^2+(z-1)^2=13 \end{cases}$$

Suy ra $D(2;0;4), D\left(-\frac{166}{61};\frac{144}{61};\frac{52}{61}\right)$. Chọn điểm $D(2;0;4)$.

2. Tọa độ trọng tâm của tứ diện là $G\left(1;2;\frac{5}{2}\right)$.

Tính được $GA = GB = GC = GD = \frac{\sqrt{29}}{2}$.

Vậy G cách đều các đỉnh của tứ diện (là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện).

3. Ta có $M\left(1;4;\frac{5}{2}\right)$, $N\left(1;0;\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{MN}(0;-4;0)$.

Do đó $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CD} = 0$. Hay MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AB và CD.

4. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm của các mặt đối diện.

Ta có $AA' = BB' = CC' = DD' = \frac{2\sqrt{29}}{3}$.

5. Ba góc ở mỗi đỉnh của tứ diện là ba góc của một tam giác, nên tổng các góc ở mỗi đỉnh là 180^0.

Bài 5

1. Ta có $\overrightarrow{BA} = (1;2;3)$, $\overrightarrow{BC} = (1;-2;3)$, $\overrightarrow{BD} = (4;2;4)$, $\overrightarrow{CD} = (3;4;1)$

Suy ra $\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right] = \left(\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\right) = (-14;8;10)$

Do đó $\overrightarrow{BA}.\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right] = 32 \neq 0 \Rightarrow A, B, C, D$ không đồng phẳng.

2. Ta có: $S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-14)^2 + 8^2 + 10^2} = 3\sqrt{10}$

Vì $S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}BH.CD$ nên suy ra $BH = \frac{2S_{\Delta BCD}}{CD} = \frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{26}} = \frac{6\sqrt{65}}{13}$.

3. Ta có: $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{BA}.\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\right| = \frac{16}{3}$.

Gọi $h = d(A,(BCD)) \Rightarrow h = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta BCD}} = \frac{16}{3\sqrt{10}} = \frac{8\sqrt{10}}{15}$.

4. Gọi $E(x;y;z)$.

$ABCE$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y + 2 = 2 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$.

Vậy $E(1;0;3)$.

5. Ta có:

$$\overrightarrow{AC}=(0;-4;0)\Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=-8\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right)=\frac{\left|\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}\right|}{AC.BD}=\frac{8}{4.6}=\frac{1}{3}.$$

6. Ta có $M\in Oy\Rightarrow M(0;y;0)$. Tam giác BMC cân tại

$$M\Leftrightarrow MC^2=MB^2\Leftrightarrow (-1)^2+y^2+3^2=(y+2)^2\Leftrightarrow y=\frac{3}{2}.$$

Vậy $M\left(0;\frac{3}{2};0\right)$.

7. Ta có:

$$A'\left(\frac{2}{3};0;-\frac{2}{3}\right),\ G\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow \overrightarrow{AA'}=\left(\frac{2}{3};-2;-\frac{2}{3}\right),\ \overrightarrow{AG}=\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$$

Mà $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{-2}{\frac{-3}{2}}=\dfrac{-\frac{2}{3}}{-\frac{1}{2}}=\dfrac{4}{3}\Rightarrow \overrightarrow{AA'}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AG}\Rightarrow A,A',G$ thẳng hàng.

Bài 6

1. Gọi K là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC.

Khi đó: $\begin{cases} K\in BC\\ AK\perp BC\end{cases}$

- $K\in BC$ nên $\overrightarrow{BK}=t.\overrightarrow{BC}$, do đó

$$\begin{cases} x_K+1=t(1+1)\\ y_K-2=t(1-2)\\ x_K-0=t(-2-0)\end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x_K=2t-1\\ y_K=2-t\quad (t\in\mathbb{R})\\ x_K=-2t\end{cases}\Rightarrow K(2t-1;2-t;-2t).$$

- $AK\perp BC\Leftrightarrow \overrightarrow{AK}.\overrightarrow{BC}=0$. Vì $\overrightarrow{AK}(2t-3;-1-t;-1-2t)$ nên

$$(2t-3).2+(-1-t).(-1)+(-1-2t).(-2)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$$

Tọa độ điểm K cần tìm là $K\left(-\frac{1}{3};\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

2. Gọi $H(x;y;z)$ là trực tâm tam giác ABC Ta có

$\overrightarrow{AH}(x-2;y-3;z-1),\overrightarrow{BH}(x+1;y-2;z),\ \overrightarrow{AB}(-3;-1;-1),\overrightarrow{AC}(-1;-2;-3),\overrightarrow{BC}(2;-1;$

Tích có hướng của hai véc tơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ là

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -2 & -3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & -3\\ -3 & -1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -1 & -2\end{vmatrix}\right)=(1;-8;5).$$

Vì H là trực tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases}AH\perp BC\\ BH\perp CA\\ H\in(ABC)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA}=0\\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AH}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y-2z=-1\\ x+2y+3z=3\\ x-8y+5z=-17\end{cases}$$

Giải hệ ta được $H\left(\frac{2}{15};\frac{29}{15};-\frac{1}{3}\right)$.

3. Gọi $I(x;y;z)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có $\overrightarrow{AI}(x-2;y-3;z-1),\overrightarrow{BI}(x+1;y-2;z),\overrightarrow{CI}(x-1;y-1;z+2)$.

Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên

$$\begin{cases}AI=BI\\ AI=CI\\ I\in(ABC)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}AI^2=BI^2\\ AI^2=CI^2\\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AI}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6x+2y+2z=9\\ x+2y+3z=4\\ x-8y+5z=-17\end{cases}$$

Giải hệ ta được $I\left(\frac{14}{15};\frac{61}{30};-\frac{1}{3}\right)$.

4. Trọng tâm G của tam giác ABC có tạo độ thỏa mãn

$$G\left(\frac{2-1+1}{3};\frac{3+2+1}{3};\frac{1+0-2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3};\ 2;-\frac{1}{3}\right)$$

Do đó $\overrightarrow{HG}\left(\frac{8}{15};\ \frac{1}{15};\ 0\right),\overrightarrow{GI}\left(\frac{4}{15};\ \frac{1}{30};\ 0\right)$ nên $\overrightarrow{HG}=2\overrightarrow{GI}$, tức là ba điểm G,H,I nằm trên một đường thẳng.

Bài 7

Vì $C\in(Oxy)$ nên $C(x;y;0)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-3;0;-3),\overrightarrow{AC}(x-5;y-3;1),\overrightarrow{BC}(x-2;y-3;4)$

Tam giác ABC là tam giác đều nên $AB=AC=BC$, do đó

$$\begin{cases}AC=AB\\ AC=BC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-5)^2+(y-3)^2+1^2=18\\ (x-5)^2+(y-3)^2+1^2=(x-2)^2+(y-3)^2+4^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(y-3)^2=1\\ x=1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1;y=4\\ x=1;y=2\end{array}\right..$$

Vì C có tung độ nhỏ hơn 3 nên $C(1;2;0)$.

a) Gọi $D(x;y;z)$.

Khi đó $\overrightarrow{AD}(x-5;y-3;z+1),\overrightarrow{BD}(x-2;y-3;z+4),\overrightarrow{CD}(x-1;y-2;z)$

Tam giác ABC là tam giác đều nên $ABCD$ là tứ diện đều khi và chỉ khi $AD=BD=CD=AB=3\sqrt{2}$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}(x-5)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=(x-2)^2+(y-3)^2+(z+4)^2\\(x-5)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=(x-1)^2+(y-2)^2+z^2\\(x-5)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=18\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}z=1-x\\y=16-5x\\(x-5)^2+(13-5x)^2+(2-x)^2=18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=1-x\\y=16-5x\\3x^2-16x+20=0\end{cases}$$

Giải phương trình $3x^2-16x+20=0$ ta được $x=2,x=\dfrac{10}{3}$.

Vậy tọa độ các điểm D là $D(2;\ 6;\ -1)$ hoặc $D\left(\dfrac{10}{3};\ -\dfrac{2}{3};-\dfrac{7}{3}\right)$.

b) Gọi $S(x;y;z)$. Ta có

$\overrightarrow{AS}(x-5;y-3;z+1),\overrightarrow{BS}(x-2;y-3;z+4),\overrightarrow{CS}(x-1;y-2;z)$

SA,SB,SC đôi một vuông góc khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{BS}=0\\\overrightarrow{BS}.\overrightarrow{CS}=0\\\overrightarrow{CS}.\overrightarrow{AS}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-5)(x-2)+(y-3)^2+(z+1)(z+4)=0\\(x-2)(x-1)+(y-3)(y-2)+(z+4)z=0\\(x-1)(x-5)+(y-2)(y-3)+z(z+1)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2-7x-6y+5z=-23\\x^2+y^2+z^2-3x-5y+4z=-8\\x^2+y^2+z^2-6x-5y+z=-11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-4z=12\\-3x-3z=-3\\x^2+y^2+z^2-6x-5y+z=-11\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=5z+11\\x=1-z\\3z^2+10z+8=0\end{cases}$$

Giải phương trình $3z^2+10z+8=0$ ta được $z=-2;z=-\dfrac{4}{3}$.

Suy ra hai điểm S thỏa mãn là $S(3;1;-2), S\left(\frac{7}{3};\frac{13}{3};-\frac{4}{3}\right)$.

Bài 8

a) Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu của A lên các trục Ox, Oy, Oz.

B_1, B_2, B_3 là hình chiếu của A lên các mặt phẳng tọa độ $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$.

Ta có: $A_1\left(3;0;0\right), A_2\left(0;-2;0\right), A_3\left(0;0;4\right)$ và

$B_1\left(3;-2;0\right), B_2\left(3;0;4\right), B_3\left(0;-2;4\right)$

b) Do $M \in Ox \Rightarrow M\left(m;0;0\right)$, $N \in Oy \Rightarrow N\left(0;n;0\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AM} = \left(m-3;2;-4\right)$, $\overrightarrow{AN} = \left(-3;n+2;-4\right)$

Tam giác AMN vuông cân tại A nên ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = 0\\ AM^2 = AN^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-3(m-3)+2(n+2)+16=0\\ (m-3)^2+2^2+(-4)^2=(-3)^2+(n+2)^2+(-4)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m-3=\dfrac{2(n+2)+16}{3} & (1)\\ \left[\dfrac{2(n+2)+16}{3}\right]^2 = (n+2)^2 + \end{cases}$$

Ta có: $(2) \Leftrightarrow 4(n+2)^2+64(n+2)+256 = 9(n+2)^2+45$

$$\Leftrightarrow 5(n+2)^2-64(n+2)-211=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n+2=\dfrac{32+3\sqrt{231}}{5}\\ n+2=\dfrac{32-3\sqrt{231}}{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=\dfrac{22+3\sqrt{231}}{5}\\ n=\dfrac{22-3\sqrt{231}}{5}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{189+6\sqrt{231}}{5}\\ m=\dfrac{189-6\sqrt{231}}{5}\end{array}\right..$$

Vậy có hai bộ thỏa yêu cầu bài toán:

$M_1\left(\dfrac{189+6\sqrt{231}}{15};0;0\right), N_1\left(0;\dfrac{22+3\sqrt{231}}{5};0\right)$ hoặc

$M_2\left(\frac{189-6\sqrt{231}}{15};0;0\right), N_2\left(0;\frac{22-3\sqrt{231}}{5};0\right)$.

c) Vì $E\in(Oyz)$ nên $E\left(0;x;y\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AE}=\left(-3;y+2;z-4\right)$, $\overrightarrow{BE}=\left(1;y-4;z+4\right)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BE}\right]=\left(8y+6z-8;4z+8;10-4y\right)$

Nên từ giả thiết bài toán ta

có: $\begin{cases}AE^2=BE^2\\ \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BE}\right]\right|=3\sqrt{29}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}AE^2=BE^2\\ \left|\left[\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BE}\right]\right|^2=1044\end{cases}$

$AE^2=BE^2\Leftrightarrow 9+(y+2)^2+(z-4)^2=1+(y-4)^2+(z+4)^2\Leftrightarrow y=\frac{4z+1}{3}$

$\left|\left[\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BE}\right]\right|^2=1044\Leftrightarrow\left(8y+6z-8\right)^2+(4z+8)^2+\left(10-4y\right)^2=1044$

$\Leftrightarrow\left(\frac{50z-16}{3}\right)^2+\left(4z+8\right)^2+\left(\frac{26-16z}{3}\right)^2-1044=0\Leftrightarrow z=2, z=-\frac{34}{25}$

- $z=2\Rightarrow y=3$ nên $E\left(0;3;2\right)$
- $z=-\frac{34}{25}\Rightarrow y=-\frac{37}{25}$ nên $\left(0;-\frac{37}{25};-\frac{34}{25}\right)$.

Bài 9

Ta có: $\overrightarrow{OA}=(4;0;0)$, $\overrightarrow{OB}=(x_0;y_0;0)\Rightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=4x_0$

Theo giả thiết bài toán ta có hệ phương trình sau:

$\begin{cases}(x_0-4)^2+y_0^2=40\\ \frac{4x_0}{4.\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2+y_0^2-8x_0=24\\ \sqrt{2}x_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_0^2=x_0^2\\ x_0^2-4x_0-12=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=6\\ y_0=6\end{cases}\Rightarrow B\left(6;6;0\right)$

a) Do $C\in Oz\Rightarrow C(0;0;m)$, $m>0$.

Ta có: $\overrightarrow{OA}=(4;0;0)$, $\overrightarrow{OB}=(6;6;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(0;0;24)$ và

$\overrightarrow{OC}=(0;0;m)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right].\overrightarrow{OC}=24m \Rightarrow V_{OABC}=\frac{1}{6}.24m=8 \Leftrightarrow m=2 \Rightarrow C(0;0;2)$.

b) Ta có $G\left(\frac{10}{3};2;0\right)$, $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AC}=(-4x;0;2x)$

$\Rightarrow M(4-4x;0;2x) \Rightarrow \overrightarrow{OM}=(4-4x;0;2x);\overrightarrow{GM}=\left(\frac{2}{3}-4x;2;2x\right)$

$\Rightarrow OM \perp GM \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{GM}=0 \Leftrightarrow (4-4x)(\frac{2}{3}-4x)+4x^2=0$

$\Leftrightarrow 20x^2-\frac{56}{3}x+\frac{8}{3}=0 \Leftrightarrow 15x^2-14x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{19}}{15}$.