HƯỚNG DẪN GIẢI.

Bài 1

1. (Bạn đọc tự vẽ hình)

Ta có $\Delta SAB = \Delta SAC \Rightarrow AB = AC$. Đặt $AB = AC = x$.

Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC ta có :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 120^0 \Leftrightarrow a^2 = x^2 + x^2 - 2.x.x.\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Mặt khác: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin BAC = \frac{1}{2}\frac{a}{\sqrt{3}}.\frac{a}{\sqrt{3}}\sin 120^0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{24}$.

$$SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}SA.S_{ABC} = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{24}a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{72}.$$

2. . (Bạn đọc tự vẽ hình)

Gọi H là trung điểm của AC thì $SH \perp AC \Rightarrow SH \perp (ABC)$. Đặt $SH = h$

Ta có $SC^2 = HS^2 + HC^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$, $SB^2 = HS^2 + HB^2 = h^2 + \frac{3a^2}{4}$

Mà $SC^2 = BS^2 + BC^2 - 2BS.BC\cos 60^0$

$$\Rightarrow h^2 + \frac{a^2}{4} = h^2 + \frac{3a^2}{4} + a^2 - 2a\sqrt{h^2 + \frac{3a^2}{4}}.\frac{1}{2} \Leftrightarrow h = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.a\sqrt{\frac{3}{2}}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

3. Kẻ $HK \perp AD \Rightarrow SKH = \left((SAD),(ABCD)\right) = 60^0$

Ta có: $HK = \frac{1}{4}CD = \frac{a}{4}$

$\Rightarrow SH = HK\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$,

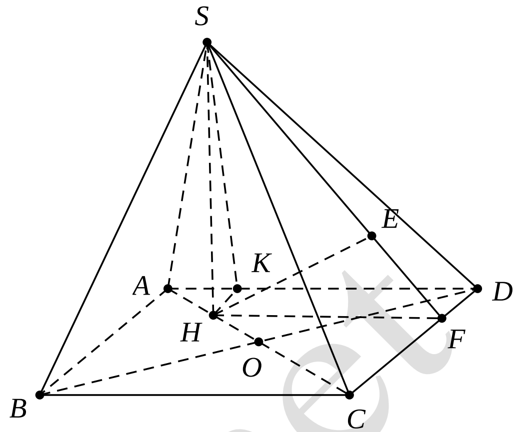
$S_{ABCD} = a^2$

$V_{SABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Do $AB // (SCD)$

$\Rightarrow d\left(AB, SC\right) = d(A,(SCD))$

$= \frac{4}{3}d\left(H,(SCD)\right)$



Vẽ $HF \perp CD, HE \perp SF \Rightarrow HE = d(H,(SCD))$, $HF = \frac{3}{4}AD = \frac{3}{4}a$

Trong tam giác SHF ta có: $\frac{1}{HE^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HF^2} = \frac{64}{9a^2} \Rightarrow HE = \frac{3a}{4}$.

4. (Bạn đọc tự vẽ hình)

Ta có $SO = (SAC) \cap (SBD)$. Do hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ nên suy ra $SO \perp (ABCD)$.

Kẻ $OE \perp AB, OK \perp SE \Rightarrow OK = d\left(O,(SAB)\right) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Vì $\frac{1}{OE^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{OK^2} - \frac{1}{OE^2} = \frac{4}{a^2} \Rightarrow SO = \frac{a}{2}$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.DB = 2a^2\sqrt{3}$. Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

5. (Bạn đọc tự vẽ hình)

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A.

Ta có: $BC \perp (SAB) \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp SB \Rightarrow SB \perp (AHK)$

Do đó $AHK = \left((SAB),(SBC)\right) = 60^0$.

Trong tam giác vuông AKH ta có: $\frac{AK}{AH} = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AK = \frac{\sqrt{3}}{2}AH$

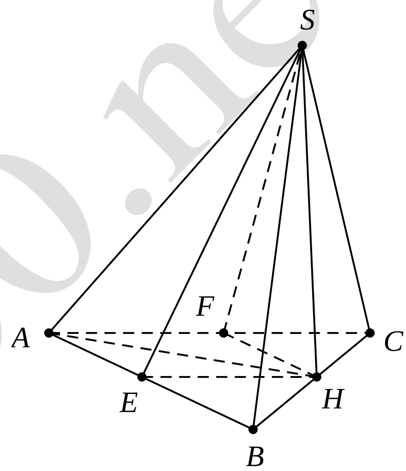
Suy ra

$$\frac{1}{AK^2}=\frac{4}{3AH^2}\Leftrightarrow\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AC^2}=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AB^2}\right)\Rightarrow\frac{1}{SA^2}=\frac{2}{a^2}\Rightarrow SA=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=a\sqrt{3}\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}CA.CB=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$

6. Gọi H là hình chiếu của S lên BC; E,F lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC suy ra $SH\perp(ABC)$ và $HE=HF$ nên AH là phân giác của góc BAC



Ta có: $\dfrac{AB}{HF}=\dfrac{BC}{HC}=1+\dfrac{BH}{CH}=1+\dfrac{AB}{AC}$

$$\Rightarrow HF=\frac{AB.AC}{AB+AC}=\frac{2a}{3}$$

Suy ra $SH=HF.\tan 60^0=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$,

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC=a^2$$

Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}$.

7. *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

Ta có $BA=BC$ nên tam giác ABC vuông cân tại B.

Vì $BC\perp BA, BC\perp AS$ nên

$BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AB'$,

$AB'\perp SB\Rightarrow AB'\perp(SBC)\Rightarrow AB'\perp SC.$

$B'C'\perp SC\Rightarrow SC\perp(AB'C').$

Thể tích khối chóp $S.AB'C'$ là:

$$V=\frac{1}{3}SC'.S_{AB'C'}=\frac{1}{6}SC'.AB'.B'C'.$$

Ta có: $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}=\sqrt{SA^2+BC^2+BA^2}=a\sqrt{3}.$

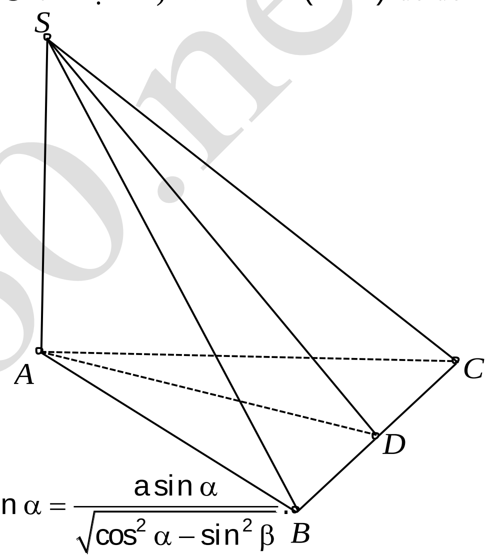
Tam giác SAC' vuông tại A, đường cao AC' nên $SC' = \frac{SA^2}{SC} = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Tam giác SAB vuông cân tại A nên $AB' = SB' = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Suy ra $B'C'^2 = SB'^2 - SC'^2 = \frac{a^2}{6} \Rightarrow B'C' = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Vậy thể tích cần tìm là $V = \frac{1}{6}SC'.AB'.B'C' = \frac{1}{6}.\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{a^3}{36}$.

8. Vì hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm A nên $\alpha = SBA$. Mặt khác, $SA \perp BC$, $AD \perp BC$ (tam giác ABC cân tại A) nên $BC \perp (SAD)$ do đó $\beta = BSD$.



Từ các tam giác vuông SAB, SDB ta có $AB = SB.\cos\alpha, BD = SB.\sin\beta$.

Mà $AB^2 = AD^2 + DB^2$ nên

$SB^2.\cos^2\alpha = SB^2.\sin^2\beta + a^2$

$\Rightarrow SB = \frac{a}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}$.

Do đó $BD = \frac{a\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}, SA = SB.\sin\alpha = \frac{a\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}$.

Thể tích khối chóp là: $V = \frac{1}{3}SA.S_{ABC} = \frac{1}{6}SA.AD.BC$,

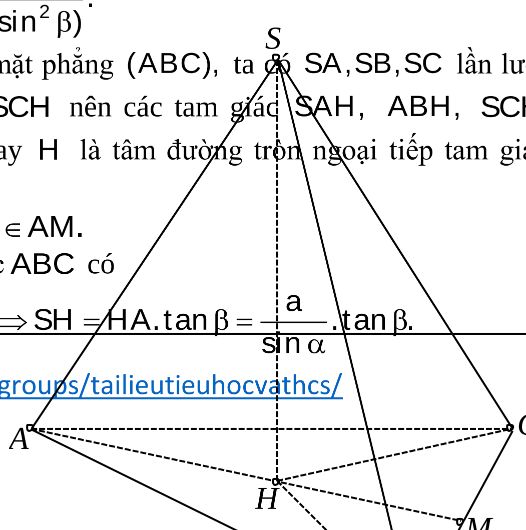
hay $V = \frac{1}{3}.SA.AD.BD = \frac{a^3\sin\alpha.\sin\beta}{3(\cos^2\alpha - \sin^2\beta)}$.

9. Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC), ta có SA, SB, SC lần lượt tạo với đáy các góc SAH, SBH, SCH nên các tam giác SAH, ABH, SCH bằng nhau nên $HA = HB = HC$, hay H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi M là trung điểm của BC thì $H \in AM$.

Theo định lý hàm số sin cho tam giác ABC có

$\frac{BC}{\sin A} = 2R = 2HA \Rightarrow HA = \frac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow SH = HA.\tan\beta = \frac{a}{\sin\alpha}.\tan\beta$.

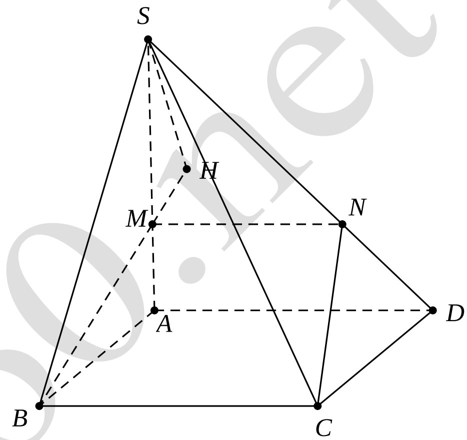


Mặt khác, tam giác ABC cân tại A nên $AB = BM.\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2}.\cot\frac{\alpha}{2}$, do đó diện tích đáy là $S_{ABC} = \frac{1}{2}AM.BC = \frac{a^2}{4}.\cot\frac{\alpha}{2}$.

Thể tích của khối chóp cần tìm là $V = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{a^3\tan\beta}{48\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

10. Ta có: $MN//AD; BC \perp SA$ và $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp BM \Rightarrow BCMN$ là hình thang vuông tại B và M.



$SA = AB\tan 60^0 = a\sqrt{3}$,

$\frac{MN}{AD} = \frac{SM}{SA} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN = \frac{4a}{3}$,

$BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$

Diện tích hình thang $BCMN$:

$S = \frac{BC + MN}{2}BM = \frac{10a^2}{3\sqrt{3}}$

Hạ $SH \perp BM \Rightarrow SH \perp (BCMN) \Rightarrow SH$ là đường cao của khối chóp $S.BCMN$.

Do $\Delta MHS \sim \Delta MAB$ nên suy ra:

$$MH.MB = MS.MA \Rightarrow MH = \frac{MS.MA}{MB} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow BH = BM + MH = a\sqrt{3} \Rightarrow SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$$

Vậy $V_{S.BCMN} = \frac{1}{3}S.SH = \frac{1}{3}.\frac{10a^2}{3\sqrt{3}}.a = \frac{10\sqrt{3}a^3}{27}$.

Bài 2

1. Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC: $p = \frac{AB + BC + CA}{2} = 9a$

Nên diện tích tam giác ABC là:

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - AC)} = \sqrt{9a.4a.3a.2a} = 6a^2\sqrt{6}$$

Kẻ đường cao AK của tam giác ABC và đường cao AH của tam giác SAK

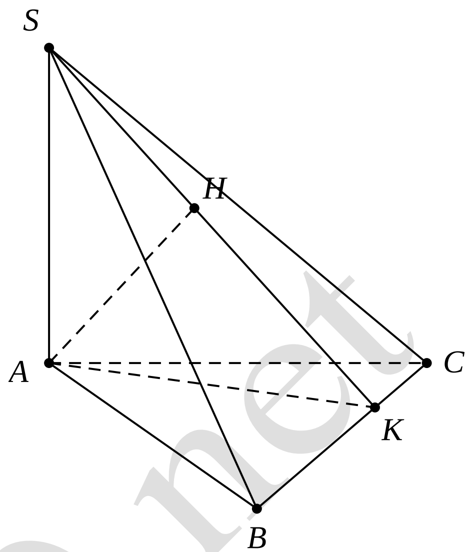
Ta có: $AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow AH = d(A,(SBC)) = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$,

$AK = \dfrac{2S_{\Delta ABC}}{BC} = 2a\sqrt{6}$

Trong tam giác vuông SAK,

ta có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{AK^2}$



$$\Rightarrow \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AK^2} = \frac{9}{24a^2} - \frac{1}{24a^2} = \frac{1}{3a^2} \Rightarrow SA = a\sqrt{3}$$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.a\sqrt{3}.6a^2\sqrt{6} = 6a^3\sqrt{2}$.

2. Gọi O là tâm của đáy, I là trung điểm BC

a) Ta có $BC \perp (SIO) \Rightarrow SIO = \big((SBC),(ABC)\big) = 60^0$

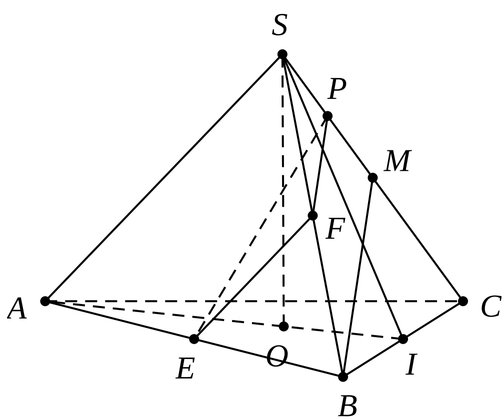
$IO = \dfrac{1}{3}AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

$\Rightarrow SO = IO\tan 60^0 = \dfrac{a}{2}$,

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Vậy $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}SO.S_{\Delta ABC}$

$= \dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$



b) Gọi E, F, P lần lượt là trung điểm của AB, BS, SM, ta có:

$\big(SA, BM\big) = \big(EF, PF\big) \Rightarrow EF \perp FP$. Đặt $AB = x$

Ta có: $EF = a,\ BM^2 = \dfrac{2(BS^2 + BC^2) - SC^2}{4} = \dfrac{x^2 + 2a^2}{2},\ FP = \dfrac{BM}{2}$

$$EM^2 = \frac{2(EC^2 + ES^2) - SC^2}{4} = \frac{2\left(\dfrac{3x^2}{4} + SA^2 - AE^2\right) - SC^2}{4} = \frac{4a^2 + x^2}{4}$$

$$EP^2 = \frac{2(SE^2 + EM^2) - SM^2}{4} = \frac{9a^2}{16}$$

Tam giác EFP vuông tại F nên

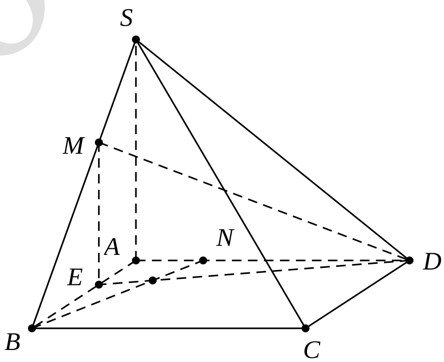
$EP^2 = EF^2 + FP^2 \Leftrightarrow x^2 = 8a^2 \Leftrightarrow x = 2a\sqrt{2}$

$$AO = \frac{2}{3}AI = \frac{x\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{8a^2}{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Vậy $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}SO.S_{\Delta ABC} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{9}\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{4a^3}{3}$.

3. Vẽ $ME // SA \Rightarrow ME \perp (ABCD)$, do đó $DM \perp BN \Leftrightarrow DE \perp BN$.

Đặt $AN = xAD$



$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AD} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$;

$\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD}$

$BN \perp DE \Leftrightarrow \left(3\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{AB} - x\overrightarrow{AD}\right) = 0$

$\Leftrightarrow -3xAD^2 - AB^2 + (3 + x)\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$

Ta có tam giác ABD đều nên:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = AB.AD.\cos BAD = a.a.\cos 60^0 = \dfrac{a^2}{2}$

Nên ta có: $-3xa^2 - a^2 + \dfrac{a^2(3 + x)}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{5} \Rightarrow AN = \dfrac{2}{5}AD = \dfrac{2a}{5}$

Ta có: $ME = \dfrac{2}{3}SA = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$, $S_{\Delta ABN} = \dfrac{1}{2}AB.AN.\sin 60^0 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{10}$

Suy ra $S_{\Delta BND} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta ABN} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{20}$

Vậy $V_{BDMN} = \dfrac{1}{3}ME.S_{\Delta BND} = \dfrac{1}{3}\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{20} = \dfrac{a^3}{10}$.

4. Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$, tương tự như ví dụ trên ta cũng có I là tâm đường tròn nội tiếp hình thang $ABCD$.

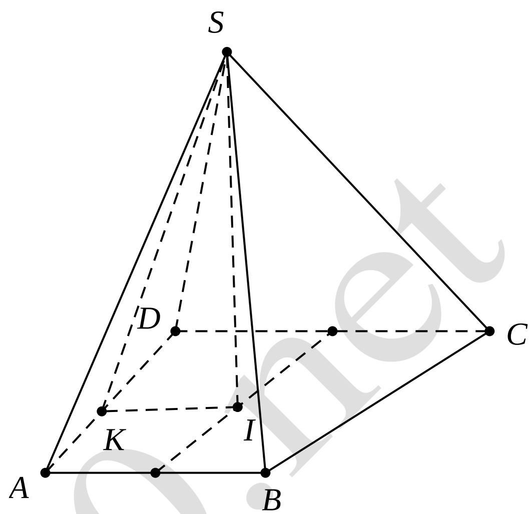
Vì tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp nên

$AB + DC = AD + BC = 5a$

Diện tích hình thang $ABCD$ là $S = \frac{1}{2}(AB + DC)AD$

$= \frac{1}{2}.5a.2a = 5a^2$

Gọi p là nửa chu vi và r là bán kính đường tròn nội tiếp của hình thang



$ABCD$ thì $p = \dfrac{AB + DC + AD + BC}{2} = \dfrac{10a}{2} = 5a$,

$S = pr \Rightarrow r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{5a^2}{5a} = a \Rightarrow IK = r = a$.

Tam giác SAD đều và có cạnh $2a$ nên

$SK = a\sqrt{3} \Rightarrow SI = \sqrt{SK^2 - IK^2} = a\sqrt{2}$

Vậy $V = \dfrac{1}{3}SI.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{2}.5a^2 = \dfrac{5\sqrt{2}a^3}{3}$.

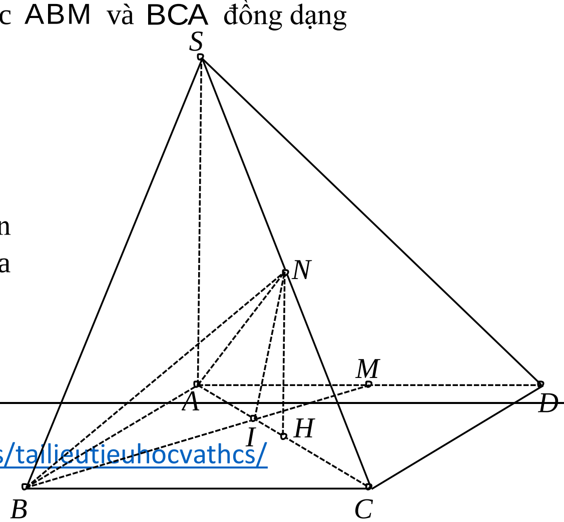
5. Ta có $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{BA}{BC}$ nên hai tam giác ABM và BCA đồng dạng

$\Rightarrow ABM = BCA$

$\Rightarrow ABM + BAC = BCA + BAC = 90^0$

$\Rightarrow AIB = 90^0 \Rightarrow MB \perp AC$

Mặt khác, SA vuông góc với đáy nên $SA \perp BM$, do đó $BM \perp (SAC)$ suy ra $(SBM) \perp (SAC)$.



Vì N là trung điểm của SC, nên gọi H là trung điểm của AC thì NH là đường trung bình của tam giác SAC.

Ta có $NH = \dfrac{SA}{2} = \dfrac{a}{2}$, $NH // SA$ nên $NH \perp (ABCD)$.

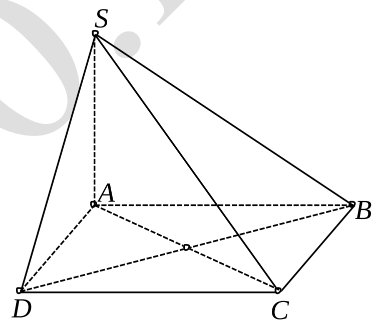
Thể tích khối chóp $ABIN$ là $V_{NAIB} = \dfrac{1}{3} NH.S_{ABI}$.

Trong tam giác AMB ta có $\dfrac{1}{AI^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AM^2} \Rightarrow AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ và

$BI = \sqrt{AB^2 - AI^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow S_{ABI} = \dfrac{1}{2} IA.IB = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{6}$.

Vậy thể tích khối chóp $ABIN$ là $V_{NAIB} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{2}}{6} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

6. Hình chiếu của SC lên mặt đáy là AC nên $SCA = 45^0$. Mặt khác $CB \perp (SAB)$ nên $CSB = 30^0$.



Tam giác vuông SBC có $CSB = 30^0$ nên $BC = \dfrac{1}{2} SC$.

Tam giác vuông SAC có $SAC = 45^0$ nên $SA = AC = \dfrac{\sqrt{2}}{2} SC$.

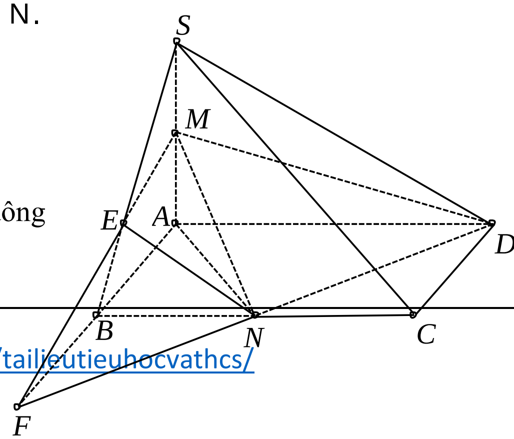
Từ tam giác vuông ABD ta có $BA^2 + BC^2 = AC^2$ nên $SC = 2a$, suy ra $BC = a$ và $SA = a\sqrt{2}$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

7. Dễ dàng tính được $AN = DM = a\sqrt{2}$, mà $AD = 2a$ nên tam giác AND vuông tại N. Theo định lí ba đường vuông góc thì $DN \perp MN$, suy ra

$\tan DMN = \dfrac{DN}{MN} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Ta được $MN = a\sqrt{6}$ nên từ tam giác vuông AMN thì $AM = 2a \Rightarrow SA = 4a$.



Gọi $F = AB \cap DN$ thì B là trung điểm $AF \Rightarrow E$ là trọng tâm tam giác SAF nên $d(E,(ABC)) = \frac{1}{3}SA = \frac{4}{3}a.$

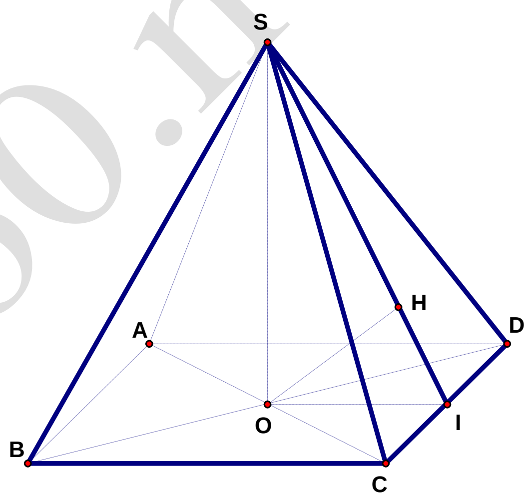
$$V_{M.AFD} = \frac{1}{3}MA.S_{ADF} = \frac{4}{3}a^3, V_{E.BFN} = \frac{1}{3}d(E,(ABC)).S_{BFN} = \frac{2}{9}a^3$$

Thể tích khối đa diện $ADM.BNE$ là $V_{ADM.BNE} = V_{M.AFD} - V_{E.BFN} = \frac{10}{9}a^3.$

Mà $V_{S.ABND} = 2a^3$, nên $V_{S.DMEN} = V_{S.ABND} - V_{ADM.BNE} = \frac{8}{9}a^3.$

8. a) Tính $V_{S.ABCD}$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD, theo tính chất của hình chóp đều ta có $SO \perp (ABCD)$.



Trong tam giác vuông SOC,

$$SO^2 = SC^2 - OC^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}a^2.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

Tính diện tích toàn phần của hình chóp $S.ABCD$: $S_{tp} = 4S_{SBC} + S_{ABCD}$

Vì tam giác SBC có các cạnh đều bằng a nên là tam giác đều suy ra

$$S_{SBC} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{tp} = a^2\sqrt{3} + a^2 = a^2\left(\sqrt{3}+1\right).$$

Tính diện tích hai mặt chéo SAC và SBD.

Hai mặt chéo SAC và SBD bằng nhau:

$$S_{SAC} = \frac{1}{2}AC.SO = \frac{1}{2}a\sqrt{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

b). Tính $d\left(A,(SCD)\right)$.

Cách 1. Ta có $V_{S.ACD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Mặt khác $V_{SACD}=\frac{1}{3}S_{SCD}.d\left(A,\left(SCD\right)\right)$

$$\Rightarrow d\left(A,\left(SCD\right)\right)=\frac{3V_{SACD}}{S_{SCD}}=\frac{\frac{a^3\sqrt{2}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}}=\frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Cách 2. Gọi I là trung điểm của CD, dựng $OH\perp SI\ \left(H\in SI\right)$, ta có

$$\begin{cases}CD\perp OI\\ CD\perp SO\end{cases}\Rightarrow CD\perp\left(SOI\right)\Rightarrow CD\perp OH.$$

$$\begin{cases}OH\perp SI\\ OH\perp CD\end{cases}\Rightarrow OH\perp\left(SCD\right)\Rightarrow OH=d\left(O,\left(SCD\right)\right)$$

Trong tam giác vuông SOI, $OH.SI=SO.OI\Rightarrow OH=\frac{SO.OI}{SI}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{a\sqrt{6}}{6}.$

$$AO\cap\left(SCD\right)=\left\{C\right\}\Rightarrow\frac{d\left(A,\left(SCD\right)\right)}{d\left(O,\left(SCD\right)\right)}=\frac{CA}{CO}=2$$

$$\Rightarrow d\left(A,\left(SCD\right)\right)=2d\left(O,\left(SCD\right)\right)=2OH=\frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

9. a) .Tính $V_{S.ABCD}$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD, ta có $SO\perp\left(ABCD\right)$.

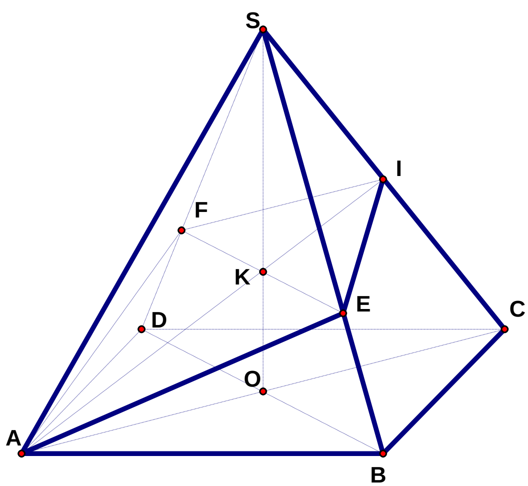
$\Rightarrow$ hình chiếu vuông góc của SC lên mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ là $OC\Rightarrow$

$\left(SC,\left(ABCD\right)\right)=\left(SC,OC\right)=SCO=60^0.$

Trong tam giác vuông SOC,

$SO=OC\tan 60^0=\frac{a\sqrt{2}}{2}.\sqrt{3}=\frac{a\sqrt{6}}{2}.$

$\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SO=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$



b) .Tính diện tích thiết diện .

Gọi I là trung điểm của cạnh SC, K là giao điểm của AI và SO.

Qua O dựng đường thẳng song song với BD, cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại E, F. Nối AE, AF.

Tam giác cân SAC có $SCA = 60^0$ nên là tam giác đều, suy ra $AF \perp SC$.

$$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC \Rightarrow EF \perp SC \ (\text{do } EF \parallel BD).$$

$$\begin{cases} EF \perp SC \\ AI \perp SC \end{cases} \Rightarrow (AEIF) \perp SC \Rightarrow (AEIF) \equiv (P).$$

$\Rightarrow$ Thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $AEIF$.

$$\begin{cases} EF \parallel BD \\ BD \perp (SAC) \end{cases} \Rightarrow EF \perp (SAC) \Rightarrow EF \perp AI \Rightarrow S_{AEIF} = \frac{1}{2} AI.EF$$

$$AI = \frac{AC\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Trong tam giác SAC, K là giao điểm của hai đường trung tuyến SO và AI nên K là trọng tâm của tam giác này

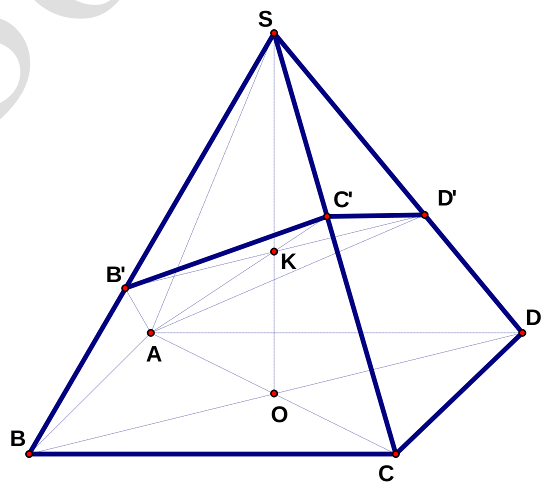
$$\Rightarrow \frac{EF}{BD} = \frac{SK}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow EF = \frac{2}{3} BD = \frac{2a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_{AEIF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}.$$

10. a) Điều kiện của h để C' thuộc cạnh SC.

$(P) \perp SC \Rightarrow AC' \perp SC$, C' là chân đường cao của tam giác SAC, suy ra C' thuộc cạnh SC khi và chỉ khi ASC là góc nhọn. Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, ta có O là trung điểm của AC, $SO = h$ và tam giác SAC cân tại S, suy ra

$$OSC = \frac{1}{2} ASC$$

do đó ASC là góc nhọn



$$\Leftrightarrow OSC < 45^0 \Leftrightarrow \tan OSC = \frac{OC}{SO} < 1 \text{ hay } \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{h} < 1 \Leftrightarrow h > \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

b) Tính $V_{S.A'B'C'D'}$.

Trong tam giác vuông SOC,

$$SC^2=SO^2+OC^2=h^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=h^2+\frac{a^2}{2}\Rightarrow SC=\sqrt{h^2+\frac{a^2}{2}}.$$

$$\begin{cases}BD\perp AC\\ BD\perp SO\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp SC\Rightarrow BD\,/\!/\,(P)\ (\text{do }(P)\perp SC)$$

$$\begin{cases}BD\subset(SBD)\\ (P)\,/\!/\,BD,(P)\cap(SBD)=B'D'\end{cases}\Rightarrow B'D'\,/\!/\,BD$$

$$\Rightarrow B'D'\perp(SAC)\Rightarrow B'D'\perp AC'\ \Rightarrow S_{AB'C'D'}=\frac{1}{2}AC'.B'D'.$$

Trong tam giác SAC: $2S_{SAC}=AC'.SC=SO.AC$

$$\Rightarrow AC'=\frac{SO.AC}{SC}=\frac{h.a\sqrt{2}}{\sqrt{h^2+\frac{a^2}{2}}}=\frac{2ah}{\sqrt{2h^2+a^2}}.$$

Trong tam giác vuông SAC', $SC'^2=SA^2-AC'^2=h^2+\frac{a^2}{2}-\left(\frac{2ah}{\sqrt{2h^2+a^2}}\right)^2$

$$=\frac{2h^2+a^2}{2}-\frac{4a^2h^2}{2h^2+a^2}=\frac{\left(2h^2-a^2\right)^2}{2\left(2h^2+a^2\right)}\Rightarrow SC'=\frac{2h^2-a^2}{\sqrt{2\left(2h^2+a^2\right)}}.$$

Gọi $\{K\}=B'D'\cap AC'$, khi đó S,K,O là ba điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) nên chúng thẳng hàng.

Trong tam giác $SBD, B'D'\,/\!/\,BD$ $\Rightarrow\frac{B'D'}{BD}=\frac{SK}{SO}\Rightarrow B'D'=\frac{BD.SK}{SO}$.

Hai tam giác vuông SKC' và SOC có góc nhọn S chung nên chúng đồng dạng ,suy ra

$$\frac{SK}{SC'}=\frac{SC}{SO}\Rightarrow SK=\frac{SC'.SC}{SO}=\frac{\frac{2h^2-a^2}{\sqrt{2\left(2h^2+a^2\right)}}.\sqrt{\frac{2h^2+a^2}{2}}}{h}=\frac{2h^2-a^2}{2h}.$$

$$\Rightarrow B'D'=\frac{a\sqrt{2}.\frac{2h^2-a^2}{2h}}{h}=\frac{a\sqrt{2}\left(2h^2-a^2\right)}{2h^2}.$$

Suy ra $S_{AB'C'D'}=\frac{1}{2}\frac{2ah}{\sqrt{2h^2+a^2}}.\frac{a\sqrt{2}\left(2h^2-a^2\right)}{2h^2}=\frac{a^2\sqrt{2}\left(2h^2-a^2\right)}{2h\sqrt{2h^2+a^2}}$.

Suy ra thể tích khối chóp $S.AB'C'D'$.

$$V=\frac{1}{3}S_{AB'C'D'}.SC'=\frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{2}\left(2h^2-a^2\right)}{2h\sqrt{2h^2+a^2}}.\frac{2h^2-a^2}{\sqrt{2\left(2h^2+a^2\right)}}=\frac{1}{6}.\frac{a^2\left(2h^2-a^2\right)^2}{h\left(2h^2+a^2\right)}.$$

c) Chứng minh tam giác $B'C'D'$ có góc tù.

Vì O là trung điểm của BD nên K là trung điểm của $B'D'$.

Mặt khác $B'D'\perp AC'\Rightarrow$ Tam giác $B'C'D'$ cân tại C'.

Hai tam giác $SC'K$ và SOC đồng dạng suy ra $\frac{KC'}{OC}=\frac{SK}{SC}$

$B'D' /\!/ BD\Rightarrow\frac{KD'}{OD}=\frac{SK}{SO}$

Vì $OD=OC, SC>SO$ nên $KC'<KD'\Rightarrow\tan KD'C'=\frac{KC'}{KD'}<1\Rightarrow KD'C'<45^0$.

Tam giác $B'C'D'$ cân tại C', $B'D'C'<45^0\Rightarrow B'C'D'>90^0\Rightarrow B'C'D'$ là góc tù.

Bài 3

1. Gọi O là tâm của đáy, ta có $SO\perp(ABCD)$ suy ra :

$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SO.S_{ABCD}.$$

a) Gọi M là trung điểm CD, ta có: $CD\perp(SMO)$

Do đó góc SMO là góc giữa mặt bên với mặt đáy, nên $SMO=60^0$

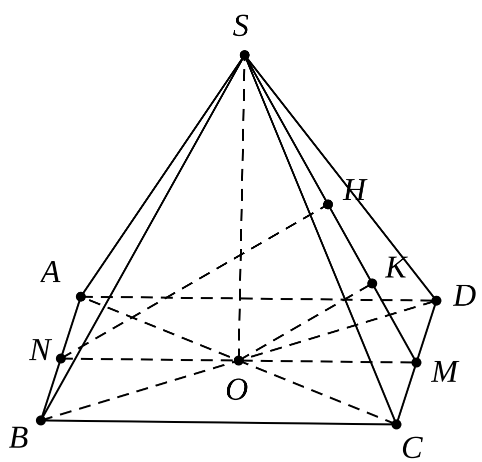
Đặt $AB=2x\Rightarrow MO=x$,

$OC=x\sqrt{2}$

Trong các tam giác vuông SOC, SOM ta có:

$SO^2=SC^2-OC^2=5a^2-2x^2$;

$SO=OM.\tan 60^0=x\sqrt{3}$



Nên ta có phương trình : $5a^2 - 2x^2 = 3x^2 \Rightarrow x = a$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}x\sqrt{3}.(2x)^2 = \frac{4\sqrt{3}}{3}x^3 = \frac{4\sqrt{3}}{3}a^3$.

b) Gọi K là hình chiếu của O lên AM, ta có $OK \perp (SCD)$ nên OSK là góc giữa đường cao SO với mặt bên nên $OSK = 45^0$. Gọi N là trung điểm AB.

$AB // (SCD) \Rightarrow d(AB, SC) = d(AB,(SCD)) = d(N,(SCD)) = NH = 2a$

Trong đó $HN // OK \Rightarrow OK = \frac{1}{2}NH = a$

Các tam giác SKO, SOM là các tam giác vuông cân nên ta có

$$SO = OK\sqrt{2} = a\sqrt{2},\ OM = SO = a\sqrt{2}$$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}a\sqrt{2}\left(2a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{8a^3\sqrt{2}}{3}$.

2. *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

a) Gọi M là trung điểm CD.

$SM \perp CD, SH \perp CD \Rightarrow CD \perp (SHM) \Rightarrow \alpha = SHM \Rightarrow SH = x\tan\alpha, HM = x$

Tam giác HCD vuông cân tại H

$\Rightarrow CD = 2x, HC = HD = \sqrt{2}x.$

Xét tam giác vuông SHC ta có $SC^2 = SH^2 + HC^2$ nên

$\Leftrightarrow b^2 = x^2\tan^2\alpha + 2x^2 \Rightarrow x = \frac{b}{\sqrt{2+\tan^2\alpha}}$. Thể tích của khối chóp

$V = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}x\tan\alpha.(2x)^2 = \frac{4}{3}x^3\tan\alpha$, hay $V = \frac{4}{3}\frac{b^3\tan\alpha}{\sqrt{(2+\tan^2\alpha)^3}}$.

b) Diện tích đáy của khối chóp $S_{ABCD} = a^2$.

Gọi I là trung điểm của SH, hạ $IK \perp SM$ thì $IK \perp (SCD) \Rightarrow IK = k$.

Đặt $SH = h$. Tam giác SIK và tam giác SMH đồng dạng nên $\frac{SI}{SM} = \frac{IK}{HM}$,

Do đó ta có: $SI.HM = IK.SM \Leftrightarrow \frac{h}{2}.\frac{a}{2} = k.\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} \Rightarrow h = \frac{2ak}{\sqrt{a^2 - 16k^2}}$.

Thể tích khối chóp là $V = \frac{2a^3k}{3\sqrt{a^2-16k^2}}$.

3. *(Bạn đọc tự vẽ hình)*
Gọi E là trung điểm của BC và F là hình chiếu vuông góc của E lên SA thì EF là đoạn vuông góc chung của SA và $BC \Rightarrow EF = d(BC,SA) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Gọi O là trọng tâm của tam giác ABC. Hai tam giác vuông SOA và EFA đồng dạng, suy ra

$$\frac{SO}{EF} = \frac{OA}{FA} \Rightarrow SO = \frac{OA.EF}{FA} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{AE^2 - EF^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{6}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}.SO = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

4. *(Bạn đọc tự vẽ hình)*
a) Tam giác SCD vuông tại $S \Rightarrow SP \perp CD$, mà $MN // CD \Rightarrow SP \perp MN$.
b) Gọi E là trung điểm của AB, ta có $SE \perp AB$.

Trong tam giác vuông SEA, $SE^2 = SA^2 - EA^2 = 2a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow SE = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

MN là đường trung bình trong tam giác SAB

$$\Rightarrow MN = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2} \text{ , } d(A,MN) = \frac{1}{2}SE = \frac{a\sqrt{7}}{4}.$$

$$\Rightarrow S_{AMN} = \frac{1}{2}MN.d(A,MN) = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{7}}{4} = \frac{a^2\sqrt{7}}{16}.$$

Dựng $OH \perp SE$ thì $OH \perp (SAB)$ (do $OH \perp SE, OH \perp AB$) $\Rightarrow OH = d(O,(SAB))$

Trong tam giác vuông SOA, $SO^2 = SA^2 - OA^2 = 2a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{2}$.

Trong tam giác vuông SOE, $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OE^2} = \frac{2}{3a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{14}{3a^2}$

$$\Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{14}} = \frac{a\sqrt{42}}{14}$$

$$\frac{d(P,(SAB))}{d(O,(SAB))} = \frac{EP}{EO} = 2 \Rightarrow d(P,(SAB)) = 2d(O,(SAB)) = \frac{a\sqrt{42}}{7}.$$

Thể tích khối tứ diện $AMNP$:

$$V = \frac{1}{3}S_{AMN}.d(P,(SAB)) = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{7}}{16}.\frac{a\sqrt{42}}{7} = \frac{a^3\sqrt{6}}{48}.$$

5. a) Xác định các góc α , β.

$$\begin{cases} SA=(SAB)\cap(SAC) \\ (SAB)\perp(ABC),\,(SAC)\perp(ABC) \end{cases} \Rightarrow SA\perp(ABC).$$

$\Rightarrow hcSB/_{(ABC)}=AB\Rightarrow \left(SB,(ABC)\right)=(SB,AB)=SBA=\alpha.$

Tam giác ABC cân tại A có AD là trung tuyến $\Rightarrow BD\perp AD$.

$$\begin{cases} BD\perp AD \\ BD\perp SA \end{cases} \Rightarrow BD\perp(SAD)$$

$\Rightarrow hcSB/_{(SAD)}=SD\Rightarrow \left(SB,(SAD)\right)=(SB,SD)=BSD=\beta.$

b) Chứng minh

$SB^2=SA^2+AD^2+BD^2$.

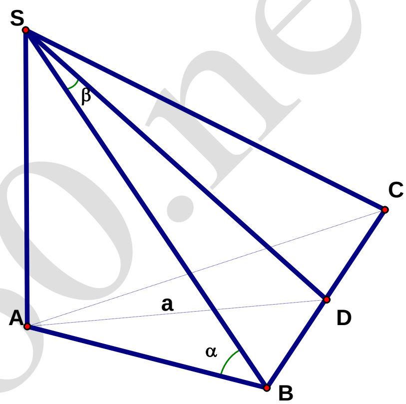
Trong tam giác vuông SAB,

$SB^2=SA^2+AB^2$.

Trong tam giác vuông ADB,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$.

Suy ra $SB^2=SA^2+AD^2+BD^2$ (*).



c) $V=\frac{1}{3}S_{ABC}.SA=\frac{1}{6}AD.BC.SA$

Trong tam giác vuông

$SAB, SA=SB\sin\alpha$

Trong tam giác vuông SDB (vuông tại D), $BD=SB\sin\beta$.

Thay SA,BD vào (*) ta được

$$SB^2=SB^2\sin^2\alpha+a^2+SB^2\sin^2\beta\Rightarrow SB^2\left(1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta\right)=a^2$$

$$\Rightarrow SB^2\left(\cos^2\alpha-\sin^2\beta\right)=a^2\Rightarrow SB^2=\frac{a^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$$

$$\Rightarrow V=\frac{1}{6}a.2SB\sin\beta.SB\sin\alpha=\frac{1}{3}a.SB^2\sin\alpha.\sin\beta=\frac{1}{3}a.\frac{a^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}.\sin\alpha.\sin\beta.$$

$$=\frac{a^3\sin\alpha.\sin\beta}{3\left(\cos^2\alpha-\sin^2\beta\right)}.$$

Lại có $\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\frac{1+\cos2\alpha}{2}-\frac{1-\cos2\beta}{2}=\frac{1}{2}(\cos2\alpha+\cos2\beta)$

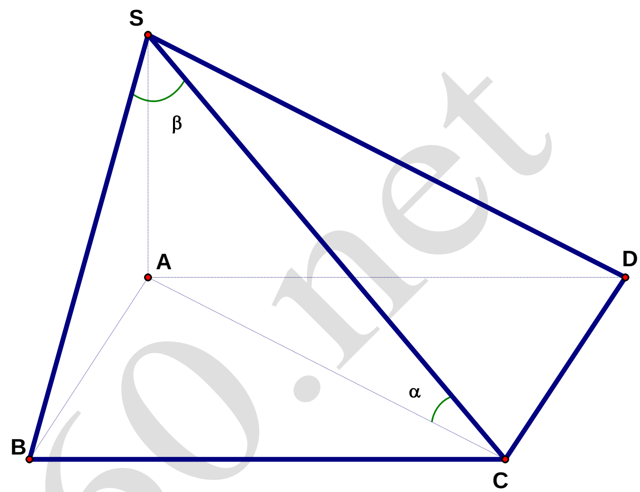
$$=\cos\frac{2\alpha+2\beta}{2}\cos\frac{2\alpha-2\beta}{2}=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$$

$$\Rightarrow V=\frac{a^3\sin\alpha.\sin\beta}{3\left(\cos^2\alpha-\sin^2\beta\right)}=\frac{a^3\sin\alpha\sin\beta}{3\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$ (đpcm).

6. a) Chứng minh $SC^2=\dfrac{a^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$

Hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$ là AC nên

$(SC,(ABCD))=SCA=\alpha$.



$\begin{cases}BC\perp SA\\BC\perp AB\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow$

hình chiếu vuông góc của SC lên (SAB) là SB

$\Rightarrow(SC,(SAB))=BSC=\beta$.

Xét tam giác vuông

$SAC,\cos\alpha=\dfrac{AC}{SC}\Rightarrow\cos^2\alpha=\dfrac{AC^2}{SC^2}$.

Xét tam giác vuông SBC (vuông tại B), $\sin\beta=\dfrac{BC}{SC}\Rightarrow\sin^2\beta=\dfrac{BC^2}{SC^2}$.

Suy ra $\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\dfrac{AC^2-BC^2}{SC^2}=\dfrac{AB^2}{SC^2}=\dfrac{a^2}{SC^2}$

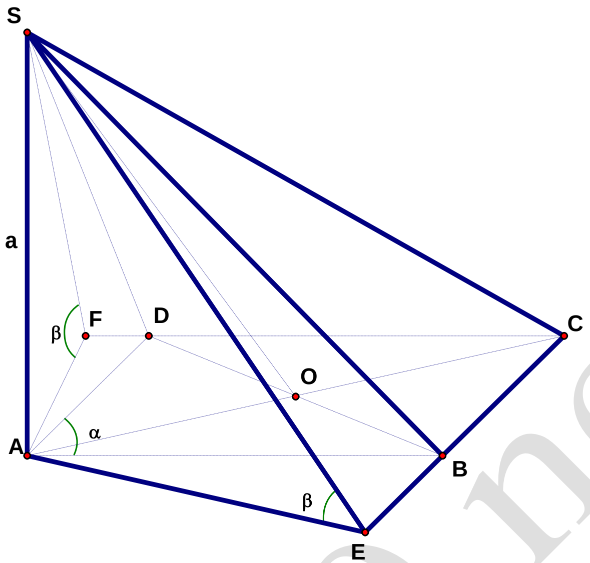
$\Rightarrow SC^2=\dfrac{a^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$. (đpcm).

b) V_{SABCD}

$$V_{SABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\frac{1}{3}AB.BC.SA=\frac{1}{3}a.SC\sin\beta.SC\sin\alpha=\frac{1}{3}a^2SC^2\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{1}{3}\frac{a^3\sin\alpha.\sin\beta}{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}.$$

7. *a)*.Tính S_{xq} của hình chóp .



$$\begin{cases} SA = (SAB) \cap (SAD) \\ (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD)$$

Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BC, CD, ta có

$$\begin{cases} BC \perp AE \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAE) \Rightarrow BC \perp SE.$$

$$\begin{cases} BC = (SBC) \cap (ABCD) \\ AE \subset (ABCD),\ AE \perp BC \\ SE \subset (SBC),\ SE \perp BC \end{cases} \Rightarrow ((SBC),(ABCD)) = (SE, AE) = SEA = \beta$$

Tương tự $((SCD),(ABCD)) = SFA = \beta.$

Trong hai tam giác vuông SAE, SAF, $SE = SF = \dfrac{SA}{\sin\beta} = \dfrac{a}{\sin\beta}$.

$AE = AF = SA\cot\beta = a\cot\beta$.

Trong tam giác vuông AEB, $AB = \dfrac{AE}{\sin ABE} = \dfrac{a\cot\beta}{\sin\alpha}$.

Ta có $S_{ABCD}=AB.AD.\sin\alpha=AB^2\sin\alpha=\left(\frac{a\cot\beta}{\sin\alpha}\right)^2\sin\alpha=\frac{a^2\cot^2\beta}{\sin\alpha}$.

$S_{SAD}=S_{SAB}=\frac{1}{2}SA.AB=\frac{1}{2}.\frac{a^2\cot\beta}{\sin\alpha}$,

$S_{SCD}=S_{SBC}=\frac{1}{2}BC.SE=\frac{1}{2}.\frac{a}{\sin\beta}=\frac{a^2\cot\beta}{2\sin\alpha.\sin\beta}$.

Suy ta diện tích xung quanh của hình chóp $S.ABCD$.

$S_{xq}=2\left(S_{SBC}+S_{SAB}\right)=\frac{a^2\cot\beta}{\sin\alpha}\left(1+\frac{1}{\sin\beta}\right)$

b). Tính $V_{S.ABCD}$.

$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\frac{a^3\cot^2\beta}{3\sin\alpha}$.

c). Chứng tỏ rằng : $\sin\varphi=\dfrac{\cot\beta.\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cot^2\beta}}$.

Gọi $\{O\}=AC\cap BD$ thì theo tính chất của hình thoi , $BD\perp AC$, O là trung điểm của AC và BD.

Ta có $\begin{cases}BD\perp AC\\BD\perp SA\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow(SBD)\perp(SAC)$

$\begin{cases}(SBD)\cap(SAC)=SO\\(SBD)\perp(SAC)\\SB\subset(SBD)\end{cases}\Rightarrow hcSB/_{(SAC)}=SO\Rightarrow\left(SB,(SAC)\right)=\left(SB,SO\right)=BSO=\varphi$.

Trong tam giác vuông SOB, $\sin\varphi=\frac{OB}{SB}$ (*).

OA là đường phân giác của $DAB\Rightarrow OAB=\frac{\alpha}{2}$.

Trong tam giác vuông AOB, $OB=AB\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{a\cot\beta}{\sin\alpha}.\sin\frac{\alpha}{2}=\dfrac{a\cot\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Trong tam giác vuông SAB,

$SB^2=SA^2+AB^2=a^2+\left(\frac{a\cot\beta}{\sin\alpha}\right)^2=a^2\left(1+\frac{\cot^2\beta}{\sin^2\alpha}\right)$

$$\Rightarrow SB = a\sqrt{\left(1+\frac{\cot^2\beta}{\sin^2\alpha}\right)} = \frac{a}{\sin\alpha}\sqrt{\sin^2\alpha+\cot^2\beta}.$$

Từ (*) $\Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{\dfrac{a\cot\beta}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}.}{\dfrac{a}{\sin\alpha}\sqrt{\sin^2\alpha+\cot^2\beta}} = \dfrac{\cot\beta.\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cot^2\beta}}.$

Bài 4 Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, BA. $H = AM \cap CN$.

1. Diện tích đáy của khối chóp $S.ABC$ là $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}a.a.\sin 60^0 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

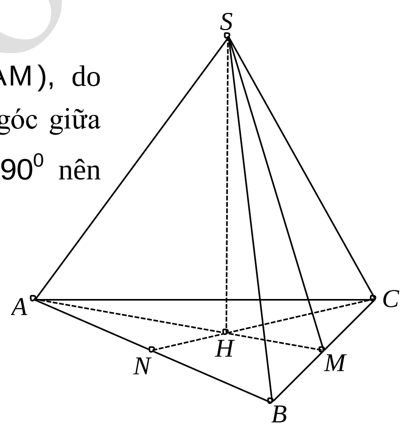
Vì H cũng là trọng tâm của tam giác ABC nên $HA = \dfrac{2}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Do đó $SH^2 = SA^2 - AH^2 = b^2 - \dfrac{a^2}{3} \Rightarrow h = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3b^2-a^2}$.

Thể tích của khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3b^2-a^2}}{12}$.

2. Diện tích đáy $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vì $SH \perp BC, AM \perp BC$ nên $BC \perp (SAM)$, do đó góc giữa mặt (SBC) và mặt đáy là góc giữa hai đường thẳng MA, MS. Do $SHM = 90^0$ nên $\alpha = (MA, MS) = SMA$.



Ta có $HM = \dfrac{1}{3}AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$,

nên $SH = HM.\tan\alpha = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}\tan\alpha$.

Thể tích khối chóp là $V = \dfrac{a^3\tan\alpha}{8}$.

3. Đặt $AB = x$. Xét tam giác vuông SAN ta có $SN = AN.\cot\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{x}{2}.\cot\dfrac{\beta}{2}$.

Trong tam giác vuông SHN: $SN^2 = SH^2 + HN^2$, nên

$$\frac{x^2}{4}.\cot^2\frac{\beta}{2}=h^2+\left(\frac{x\sqrt{3}}{6}\right)^2\Rightarrow x=\frac{2\sqrt{3}.h}{\sqrt{3\cot^2\frac{\beta}{2}-1}}.$$

Diện tích đáy $S_{ABC}=\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{3\sqrt{3}.h^2}{3\cot^2\frac{\beta}{2}-1}$.

Thể tích khối chóp là $V=\dfrac{1}{3}SH.S_{ABC}=\dfrac{\sqrt{3}.h^3}{3\cot^2\frac{\beta}{2}-1}$.

4. Vì hình chiếu của S lên mặt đáy là H nên góc giữa cạnh bên và mặt đáy là $\varphi=\widehat{SAH}$. Trung đoạn của hình chóp là $SM=d$. Đặt $SH=h$.

Ta có $AH=SH.\cot\varphi=h.\cot\varphi\Rightarrow HM=\dfrac{1}{2}AH=\dfrac{1}{2}h.\cot\varphi$.

Tam giác SHM vuông tại H nên $SM^2=SH^2+HM^2$, hay

$$h^2+\frac{1}{4}h^2\cot^2\varphi=d^2\Rightarrow h=\frac{2d}{\sqrt{4+\cot^2\varphi}}.$$

Suy ra $AH=\dfrac{2d\cot\varphi}{\sqrt{4+\cot^2\varphi}}=\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}\Rightarrow AB=\dfrac{4d\cot\varphi}{\sqrt{3(4+\cot^2\varphi)}}$, nên diện tích đáy của khối chóp $S_{ABC}=\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{4\sqrt{3}d^2\cot^2\varphi}{3(4+\cot^2\varphi)}$.

Thể tích của khối chóp là $V=\dfrac{1}{3}h.S_{ABC}=\dfrac{16d^3\cot^3\varphi}{9\sqrt{(4+\cot^2\varphi)^3}}$.

Bài 5

1. Gọi M là trung điểm của BC. Vì các tam giác SBC, ABC là tam giác đều nên

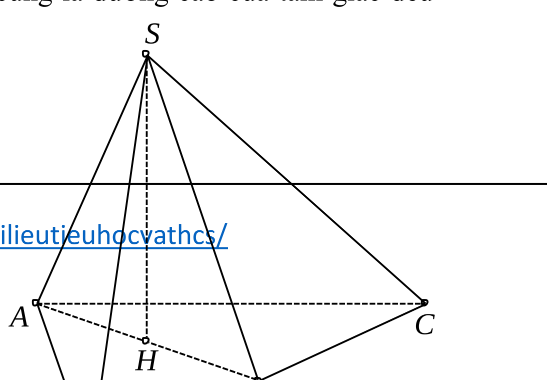
$SM\perp BC, AM\perp BC\Rightarrow \widehat{SMA}=\widehat{(SBC),(ABC)}=60^0$.

Ta có $SM=AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên tam giác SAM là tam giác đều.

Gọi H là trung điểm cạnh $AM\Rightarrow SH\perp AM$ mà $BC\perp SH$ nên SH là đường cao của khối chóp, nhưng SH cũng là đường cao của tam giác đều SAM nên $SH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{4}a$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$V_{SABC}=\frac{1}{3}SH.S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{16}a^3.$$



Mặt khác, tam giác SAC có

$$CS = CA = a, SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra diện tích của tam giác SAC là

$$S_{ACS} = \frac{1}{2}SA.\sqrt{SC^2 - \frac{SA^2}{4}} = \frac{\sqrt{39}}{16}a^2.$$

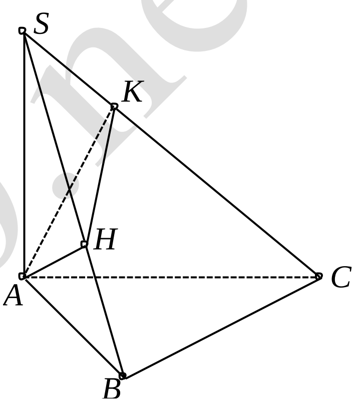
Vậy khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) là:

$$d(B,(SAC)) = \frac{3V_{SABC}}{S_{ACS}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}a.$$

2. Vì $BC \perp (SAB)$ nên $AH \perp BC$

$AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp HK, AH \perp SC$

mà $AK \perp SC \Rightarrow SC \perp (AHK)$.



Vậy $V_{SAHK} = \frac{1}{6}SK.HA.HK$.

Ta có $AH = \frac{AB.SA}{SB} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

$$AK = \frac{AC.SA}{SC} = \frac{2\sqrt{5}a}{3},$$

$$HK = \sqrt{AK^2 - AH^2} = \frac{8a}{3\sqrt{5}}, SK = \frac{4a}{3}$$

$$\Rightarrow V_{SAHK} = \frac{1}{6}.\frac{4a}{3}.\frac{2a}{\sqrt{5}}.\frac{8a}{3\sqrt{5}} = \frac{32}{135}a^3.$$

Mặt khác $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{4}{\sqrt{5}}a$ nên $S_{AHS} = \frac{4}{5}a^2$.

Vậy khoảng cách cần tìm là: $d(K,(SAB)) = \frac{3V_{KSAH}}{S_{AHS}} = \frac{8}{9}a.$

3. *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

Gọi M, N là trung điểm của BC, BA. H, K là hình chiếu của S, C' xuống mặt phẳng

(ABC). $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}, SH = \frac{a\sqrt{15}}{6}$

và thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{a^3\sqrt{5}}{24}$.

Tam giác $C'AB$ cân tại C' và $C'N = \sqrt{C'K^2 + KN^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}a$

nên ta có $S_{ABC'} = \frac{\sqrt{7}}{8}a^2$. Vì thế $d(C,(C'AB)) = \frac{3V_{C.C'AB}}{S_{C'AB}} = \frac{3V}{2S_{C'AB}}$

hay khoảng cách cần tìm là $d(C,(C'AB)) = \frac{a\sqrt{35}}{14}$.

Bài 6

1. *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

Rõ ràng $(SHM) \perp AB$ nên $SMH = 60^0$.

Ta có $MH = \frac{a}{4}$ nên $SH = MH.\tan 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{4}a$.

$S_{ACN} = \frac{1}{2}AD.CN = \frac{1}{4}a^2 \Rightarrow V_{SANC} = \frac{1}{3}SH.S_{ACN} = \frac{\sqrt{3}}{48}a^3$.

Hạ $HK \perp AC \Rightarrow SK \perp AC$.

Tam giác OHK vuông cân tại K nên $HK = \frac{HO}{\sqrt{2}} = \frac{a}{4\sqrt{2}}$

$\Rightarrow SK = \frac{\sqrt{14}}{8}a, S_{ACS} = \frac{\sqrt{7}}{8}a^2$. Ta có $d(N,(SAC)) = \frac{3V_{NACS}}{S_{ACS}}$

nên $d(N,(SAC)) = \frac{\sqrt{21}}{14}a$.

2. *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

Vì M là trung điểm của SC

nên $OM // SA, MS = MC$ do đó:

$$d(SA,BM) = d(SA,(OBM)) = d(S,(OBM)) = d(C,(OBM)) = \frac{3V_{C.OMB}}{S_{OMB}}.$$

Ta có $OC = \frac{1}{2}AC = 2a$ nên $OB = \sqrt{BC^2 - OC^2} = a$

$\Rightarrow S_{OBC} = \frac{1}{2}OB.OC = a^2$.

Gọi N là trung điểm của OC thì $MN // SO$ nên $MN \perp (OBC)$ và

$MN = \frac{1}{2}SO = a\sqrt{2}$. Do đó $V_{M.OBC} = \frac{1}{3}.MN.S_{OBC} = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$.

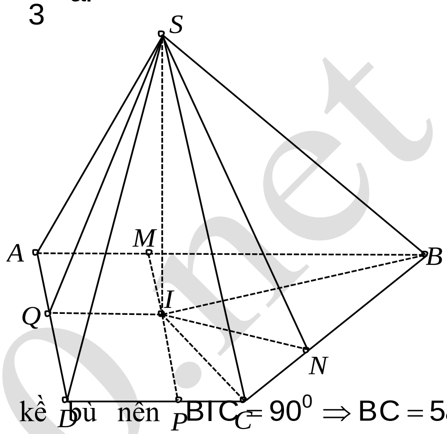
Ta có $SA=\sqrt{SO^2+OA^2}=2\sqrt{3}a$ nên $OM=\sqrt{3}.a.$

Tam giác OMB vuông tại O nên

$$S_{OMB}=\frac{1}{2}.OB.OM=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\Rightarrow d(SA,BM)=\frac{3V_{C.OMB}}{S_{OMB}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}a.$$

Vậy khoảng cách giữa SA và BM là $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}a.$

3.



Vì các mặt bên nghiêng trên đáy một góc φ và chân đường cao I nằm trong hình thang $ABCD$ nên I là tâm đường tròn nội tiếp hình thang. Gọi tiếp điểm của nó với các cạnh là M,N,P,Q (hình vẽ). Ta cũng có

$\widehat{SNI}=\varphi$

nên $SI=IN.\tan\varphi=r.\tan\varphi.$

IB,IC là phân giác của hai góc kề bù nên $\widehat{BIC}=90^0\Rightarrow BC=5a,$

$IN=\dfrac{12a}{5},BN=\dfrac{IB^2}{BC}=\dfrac{16a}{5}$ và $CN=\dfrac{9a}{5}.$

Từ các hình vuông $AMIQ$, $QIPD$ ta có $AD=2r=\dfrac{24}{5}a,$

$AB=\dfrac{28a}{5},DC=\dfrac{21a}{5}\Rightarrow S_{ABCD}=\dfrac{588a^2}{25}\Rightarrow V_{S.ABCD}=\dfrac{2352a^3}{125}\tan\varphi.$

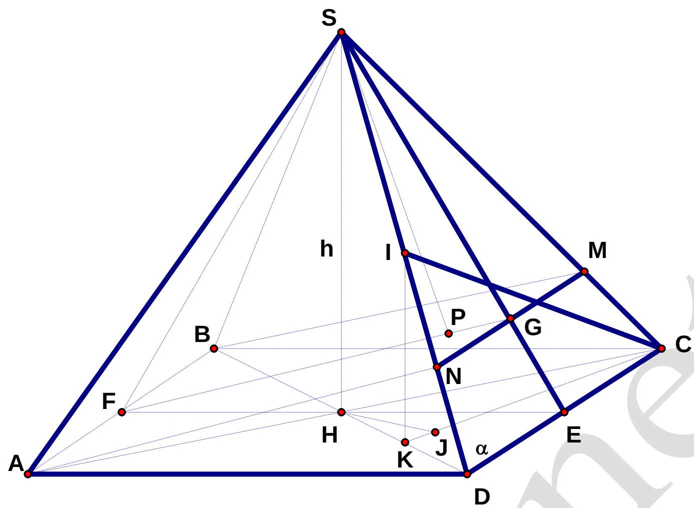
Mà $S_{ACD}=\dfrac{252a^2}{25}$ nên $S_{ACB}=S_{ABCD}-S_{ACD}=\dfrac{336}{25}a^2,$ do đó

$$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{ACB}=\frac{1344}{125}a^3.\tan\varphi.$$

Theo công thức hình chiếu $S_{BCS}=\dfrac{S_{BCI}}{\cos\varphi}=\dfrac{6a^2}{\cos\varphi}$ nên

$d(A,(SBC))=\dfrac{3V_{A.SBC}}{S_{BCS}}=\dfrac{672a.\sin\varphi}{125}.$

Bài 8



1. Tính $S_{xq}, V_{S.ABCD}$

.Đặt cạnh của hình vuông $ABCD$ là $x, x>0$ và gọi E là trung điểm của cạnh CD. Khi đó

Trong tam giác vuông SEC, $SE = DE.\tan SCD = \frac{x}{2}\tan\alpha$ (1).

Trong tam giác vuông SHE, $SE^2 = SH^2 + HE^2 = h^2 + \frac{x^2}{4}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{x^2}{4}\tan^2\alpha = h^2 + \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}\left(\tan^2\alpha - 1\right) = h^2$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{4h^2}{\tan^2\alpha - 1} \Leftrightarrow x = \frac{2h}{\sqrt{\tan^2\alpha - 1}}$.

Diện tích xung quanh của hình chóp $S.ABCD$.

$S_{xq} = 4S_{SCD} = 2CD.SE = 2x.\frac{x}{2}\tan\alpha = x^2\tan\alpha = \frac{4h^2\tan\alpha}{\tan^2\alpha - 1}$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$: $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}x^2h = \frac{4h^3}{3\left(\tan^2\alpha - 1\right)}$.

Bài toán có nghĩa $\Leftrightarrow \tan^2\alpha - 1 > 0 \Leftrightarrow \tan\alpha > 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2.Tính $d\left(SH, CI\right)$**.**

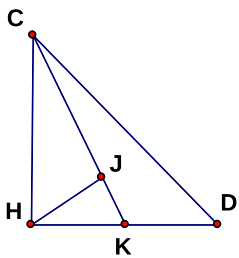
Gọi K là trung điểm của HD, ta có IK là đường trung bình trong tam giác SHD

$\Rightarrow IK \,//\, SH \Rightarrow (CIK) \,//\, SH \Rightarrow d(SH, CI) = d(SH, (CIK)) = d(H, (CIK))$.

Dựng $HJ \perp CK$, $(J \in CK)$, khi đó

$$\begin{cases} HJ \perp CK \\ HJ \perp IK \; (\text{do } IK \,//\, SH \Rightarrow IK \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow HJ \perp (CIK).$$

$\Rightarrow HJ = d(H, (CIK)) = d(SH, CI)$.



Trong tam giác vuông CHK,

$$CK^2 = CH^2 + HK^2 = \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{8} = \frac{5x^2}{8}$$

$$\Rightarrow CK = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

$HJ.CK = CH.HK$

$$\Rightarrow HJ = \frac{CH.HK}{CK} = \frac{\frac{x\sqrt{2}}{2}.\frac{x\sqrt{2}}{4}}{\frac{x\sqrt{10}}{4}} = \frac{x}{\sqrt{10}} = \frac{h\sqrt{10}}{5\sqrt{(\tan^2\alpha - 1)}}.$$

Vậy $d(SH, CI) = \dfrac{h\sqrt{10}}{5\sqrt{(\tan^2\alpha - 1)}}$.

3.Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (MAB)**.**

$$\begin{cases} M \in (MAB) \cap (CSD) \\ AB \,//\, CD \end{cases} \Rightarrow (MAB) \cap (SCD) = MN \,//\, CD \,//\, AB \; (N \in SD).$$

Vậy thiết diện của (MAB) và hình chóp $S.ABCD$ là hình thang $ABNM$.

Gọi G là giao điểm của MN và SE, F là trung điểm của cạnh AB, theo tính chất của hình vuông, ta có $EF \perp AB$ và H là trung điểm của EF.

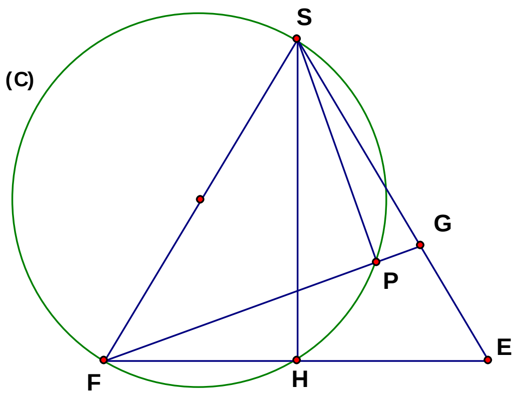
Dựng SP vuông góc với $FG (P \in FG)$, ta có

$$\begin{cases} AB \perp EF \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SEF) \Rightarrow AB \perp SP.$$

$$\begin{cases} SP \perp AB \\ SP \perp FG \end{cases} \Rightarrow SP \perp (MAB).$$

$\Rightarrow P$ là hình chiếu vuông góc của S lên (MAB).

Trong mặt phẳng (SEF), $SPF = 90^0$ nên P thuộc đường tròn (C) đường kính SF chứa trong mặt phẳng (SEF) .

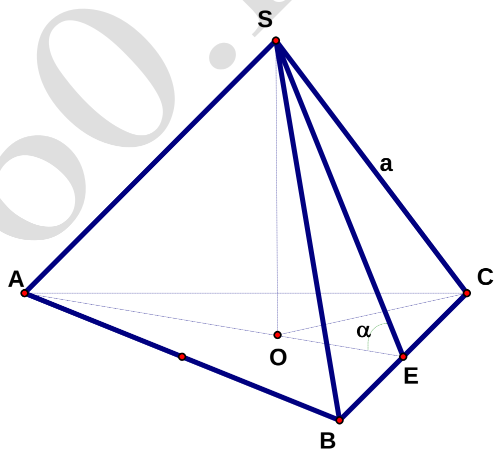


Giới hạn .
Khi M di động trên đoạn SC thì G di động trên đoạn SE .
P là giao điểm thứ hai của FG với (C) do đó
Khi $G \equiv S$ thì $P \equiv S$.
Khi $G \equiv E$ thì $P \equiv H$.
Khi G đi động trên đoạn SE thì P di động trên cung nhỏ SH của (C).
Vậy tập hợp của P là cung nhỏ của đường tròn (C).

Bài 9

1. Thể tích khối chóp $S.ABC$.

Gọi E là trung điểm của cạnh BC và O là tâm của đáy ABC. Theo tính chất của hình chóp đều , ta có $SO \perp (ABC), SE \perp BC, OE \perp BC$, suy ra SO là đường cao của hình chóp và $((SBC),(ABC)) = SEO = \alpha$.



Gọi cạnh của đáy ABC là $x(x>0)$ .Khi đó

$$OE = \frac{1}{3}AE = \frac{1}{3}\frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{6},$$

$$OC = \frac{2}{3}.\frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{3}$$

Trong tam giác vuông SOE (vuông tại O), $SO = OE.\tan\alpha = \frac{x\sqrt{3}}{6}\tan\alpha$ (1) .

Trong tam giác vuông SOC (vuông tại O),

$$SO^2 = SC^2 - OC^2 = a^2 - \left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2 - \frac{x^2}{3} \ (2).$$

Từ (1) và (2) ,ta có : $\frac{x^2}{12}\tan^2\alpha = a^2 - \frac{x^2}{3} \Rightarrow \frac{x^2}{12}\left(\tan^2\alpha + 4\right) = a^2$

$\Rightarrow x^2 = \dfrac{12a^2}{\tan^2\alpha + 4} \Rightarrow x = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{\tan^2\alpha + 4}}$

Thể tích khối chóp S.ABC : $V = \dfrac{1}{3}S_{ABC}.SO = \dfrac{1}{3}.\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{x\sqrt{3}}{6}.\tan\alpha = \dfrac{x^3.\tan\alpha}{24}$

$= \dfrac{24\sqrt{3}.a^3\tan\alpha}{24\sqrt{\left(\tan^2\alpha+4\right)^3}} = \dfrac{a^3\sqrt{3}\tan\alpha}{\sqrt{\left(\tan^2\alpha+4\right)^3}}$

2.Xác định α để V đạt giá trị lớn nhất.

V đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow \dfrac{\tan\alpha}{\sqrt{\left(\tan^2\alpha+4\right)^3}}$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow \dfrac{\tan^2\alpha}{\left(\tan^2\alpha+4\right)^3}$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có: $f(\alpha) = \dfrac{\tan^2\alpha}{\left(\tan^2\alpha+4\right)^3} = \dfrac{1}{4}.\dfrac{\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+4}.\dfrac{2}{\tan^2\alpha+4}.\dfrac{2}{\tan^2\alpha+4}$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương

$\dfrac{\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+2}, \dfrac{2}{\tan^2\alpha+2}, \dfrac{2}{\tan^2\alpha+2}$, ta được

$f(\alpha) \overset{Cauchy}{\leq} \dfrac{1}{4}.\left[\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+4} + \dfrac{2}{\tan^2\alpha+4} + \dfrac{2}{\tan^2\alpha+4}\right)\right]^3 = \dfrac{1}{108}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$\dfrac{\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+2} = \dfrac{2}{\tan^2\alpha+2} \Leftrightarrow \tan^2\alpha = 2 \Leftrightarrow \tan\alpha = \sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha = \arctan 2$.

Vậy $\max V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{\sqrt{108}} = \dfrac{a^3}{6}$ đạt được khi và chỉ khi $\alpha = \arctan 2$.

3.Xác định α để hình chóp S.ABC trở thành tứ diện đều.

Hình chóp tam giác đều S.ABC là tứ diện đều $\Leftrightarrow$ cạnh bên bằng cạnh đáy $\Leftrightarrow a = x \Leftrightarrow a = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{\tan^2\alpha+4}} \Leftrightarrow \tan^2\alpha + 4 = 12 \Leftrightarrow \tan^2\alpha = 8 \Leftrightarrow \tan\alpha = 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \alpha = \arctan\left(2\sqrt{2}\right)$

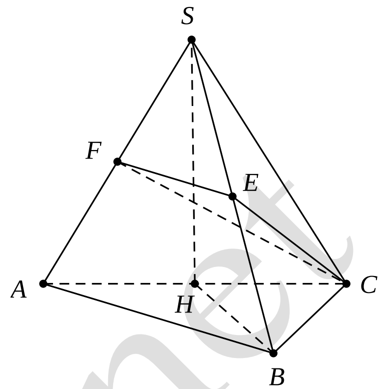
Bài 10

1. • Tính $V_{S.ABC}$

Ta có: $AB = a, BC = a\sqrt{2}$ và

$AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2SA.SC.\cos ASC = 2a^2 + a^2 = 3a^2$

Suy ra ΔABC vuông tại B. Gọi H là trung điểm BC, ta có H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Mà $SA = SB = SC \Rightarrow SH \perp (ABC)$



$SH = \sqrt{SA^2 - \frac{AC^2}{4}} = \frac{a}{2}$,

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ nên ta có:

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}\frac{a}{2}\frac{a^2\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

- Tính $\alpha = \left(AB, CE\right)$ và $d\left(AB, CE\right)$

Gọi F là trung điểm của SA, suy ra $EF // AB \Rightarrow \left(AB, CE\right) = \left(EF, CE\right)$

$AB // (CEF) \Rightarrow d\left(AB, CE\right) = d\left(AB, (CEF)\right) = d\left(A, (CEF)\right) = h$

Ta có: $EF = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$,

$CE = \sqrt{SC^2 - \frac{SB^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, CF = \sqrt{\frac{2(CS^2 + CA^2) - SA^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

Suy ra $\cos CEF = \frac{CE^2 + CF^2 - EF^2}{2CE.CF} = \frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{7a^2}{4}}{2.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{7}}{2}} = -\frac{\sqrt{21}}{14}$

Do đó $\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{14} \Rightarrow \alpha \approx 71^0$

Ta có: $V_{S.CEF} = \frac{1}{4}V_{SABC} \Rightarrow V_{CABEF} = \frac{3}{4}V_{S.ABC}$

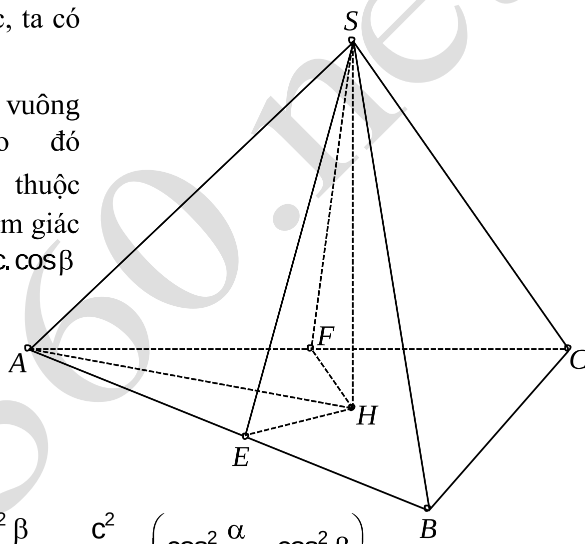
Mặt khác $S_{\Delta AFB} = 2S_{\Delta BFE} \Rightarrow V_{B.CEF} = \frac{1}{3}V_{CABEF} = \frac{1}{4}V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta CEF} = \frac{1}{2}CE.EF.\sin\alpha = \frac{1}{2}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{5\sqrt{7}}{14} = \frac{a^2\sqrt{21}}{112}$$

Vậy $h = \dfrac{3V_{B.CEF}}{S_{\Delta CEF}} = \dfrac{\dfrac{a^3\sqrt{2}}{16}}{\dfrac{a^2\sqrt{21}}{112}} = \dfrac{a\sqrt{42}}{3}$.

2. Gọi H là hình chiếu của S trên mặt đáy. Hạ $HE \perp AB, HF \perp AC$.



Theo định lý ba đường vuông góc, ta có $SE \perp AB, SF \perp AC$.

Vì $SAB = SAC$ nên hai tam giác vuông SAE, SAF bằng nhau, do đó $SE = SK \Rightarrow HE = HF$, hay H thuộc phân giác trong của góc A của tam giác ABC. Ta có $AE = SA.\cos\beta = c.\cos\beta$ nên trong tam giác vuông AHE ta có

$$AH = \frac{AE}{\cos HAE} = \frac{c.\cos\beta}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Xét tam giác vuông SHA ta có

$$SH^2 = SA^2 - AH^2 = c^2 - \frac{c^2.\cos^2\beta}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{c^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\beta\right)$$

$$\Rightarrow SH = \frac{c}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\beta}.$$

Diện tích đáy của khối chóp $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin BAC = \dfrac{1}{2}ab.\sin\alpha.$

Thể tích của khối chóp $S.ABC$

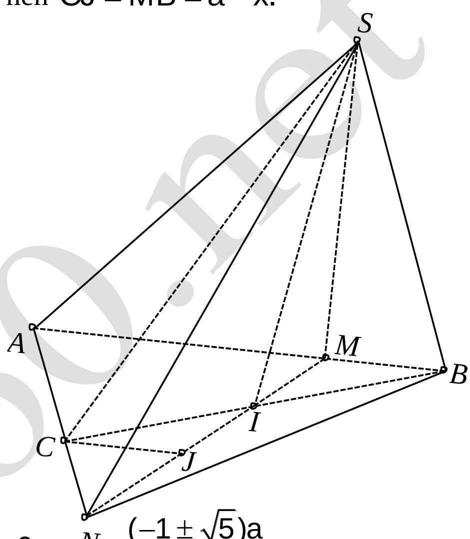
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \frac{1}{6}.ab.\sin\alpha.\frac{c}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\beta}$$

Vậy ta có $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.abc.\sin\dfrac{\alpha}{2}.\sqrt{\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \cos^2\beta}.$

3. Vì $SM \perp (ABC)$ nên ta có $V_{SBMI} = \frac{1}{3}SM.S_{BMI}, V_{SCNI} = \frac{1}{3}SM.S_{CNI}$ và $V_{SABC} = \frac{1}{3}SM.S_{ABC}$, do đó hệ thức điều kiện $V_{SMBI} + V_{SCNI} = V_{SABC}$ trở thành $S_{MBI} + S_{CNI} = S_{ABC}$. Vì $AM = x$ nên $BM = a - x$, do đó

$$\frac{S_{BMI}}{S_{BAC}} = \frac{BM}{BA}.\frac{BI}{BC} = \frac{a-x}{a}.\frac{1}{2} \Rightarrow S_{BMI} = \frac{a-x}{2a}S_{ABC}$$

Kẻ $CJ // AB$. Mà I là trung điểm của BC nên $CJ = MB = a - x$.



$$\frac{NA}{NC} = \frac{AM}{CH} \Leftrightarrow \frac{CA+CN}{CN} = \frac{x}{a-x}$$

$$\Rightarrow \frac{CA}{CN} = \frac{2x-a}{a-x}.$$

Suy ra $\frac{S_{CNI}}{S_{CAB}} = \frac{CN}{CA}.\frac{CI}{CB} = \frac{a-x}{2x-a}.\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow S_{BMI} = \frac{a-x}{2(2x-a)}S_{ABC}$$

Do đó điều kiện

$S_{MBI} + S_{CNI} = S_{ABC}$ trở thành

$$\frac{a-x}{2a}S_{ABC} + \frac{a-x}{2(2x-a)}S_{ABC} = S_{ABC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-x}{2a} + \frac{a-x}{2(2x-a)} = 1 \Leftrightarrow x^2 + ax - a^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{(-1 \pm \sqrt{5})a}{2}$$

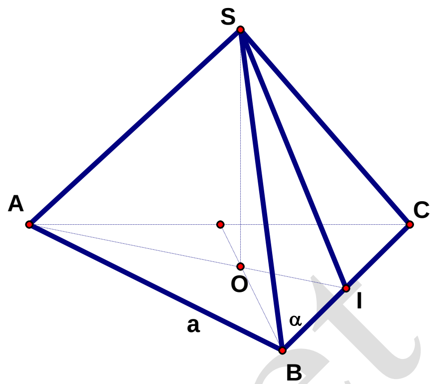
Vì $x > 0$ nên giá trị cần tìm của x là $\frac{(-1+\sqrt{5})a}{2}$.

4. Gọi O là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC), theo tính chất của hình chóp đều thì O là trọng tâm của tam giác ABC.

Gọi I là trung điểm của BC, ta có tam giác SAI là thiết diện của hình chóp $S.ABC$ với mặt phẳng đi qua cạnh bên SA và đường cao SO của hình chóp đã cho.

Vì tam giác SBC cân tại S, I là trung điểm của BC nên tam giác SIB vuông tại I, suy ra

$SI = IB\tan\alpha = \frac{a}{2}\tan\alpha$.



Tam giác ABC là tam giác đều cạnh bằng $a \Rightarrow OI = \frac{1}{3}AI = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Trong tam giác vuông SOI.

$$SO^2 = SI^2 - OI^2 = \frac{a^2}{4}\tan^2\alpha - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{12}\left(3\tan^2\alpha - 1\right)$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{3\tan^2\alpha - 1}.$$

Diện tích của thiết diện SAI.

$$S_{SAI} = \frac{1}{2}SO.AI = \frac{1}{2}\frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{3\tan^2\alpha - 1}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3\tan^2\alpha - 1}}{8}.$$

Lại có :

$$3\tan^2\alpha - 1 = \left(\sqrt{3}\tan\alpha + 1\right)\left(\sqrt{3}\tan\alpha - 1\right) = \left(\sqrt{3}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 1\right)\left(\sqrt{3}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 1\right)$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha\right)\left(\sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha\right)}{\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha\right)}{\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{4\left(\sin\alpha\cos 30^0 + \sin 30^0\cos\alpha\right)\left(\sin\alpha\cos 30^0 - \sin 30^0\cos\alpha\right)}{\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{4\sin\left(\alpha + 30^0\right)\sin\left(\alpha - 30^0\right)}{\cos^2\alpha}.$$

$$\Rightarrow S_{SAI} = \frac{a^2}{4\cos\alpha}\sqrt{\sin\left(\alpha + 30^0\right)\sin\left(\alpha - 30^0\right)}.$$

Bài 10

1. a) Gọi E là trung điểm của BC

$\Rightarrow HE \perp BC$ và $SH \perp BC \Rightarrow \left(SHE\right) \perp BC \Rightarrow \left(SHE\right) \perp \left(SBC\right)$.

Do đó, hạ $IK \perp SE \Rightarrow IK \perp \left(SBC\right) \Rightarrow IK = b$.

Hai tam giác ΔSKI và ΔSHE đồng dạng với nhau suy ra

$$\frac{IK}{HE} = \frac{SK}{SH} \Rightarrow SH = \frac{HE.SK}{IK} = \frac{a}{2b}SK = \frac{b}{2a}\sqrt{SI^2 - IK^2} \Rightarrow SH = \frac{2a}{b}\sqrt{\frac{SH^2}{4} - b^2}$$

$$\Leftrightarrow SH^2\left(1 - \frac{a^2}{16b^2}\right) = -\frac{a^2}{4} \Rightarrow SH = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}$$ và $S_{ABCD} = a^2$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}\frac{2ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}.a^2 = \frac{2a^3b}{3\sqrt{a^2 - 16b^2}}$.

b) Ta có: $\left(\left(SBC\right),\left(ABCD\right)\right) = SEH = \alpha$.

Đặt $BC = x$ thì ta có $OE = \frac{x}{2}, OB = \frac{x\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông SHE ta có $SH = HE.\tan\alpha$, trong tam giác vuông SHB có:

$$SH^2 = SB^2 - HB^2 \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\tan\alpha\right)^2 = h^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{2h}{\sqrt{2 + \tan^2\alpha}}.$$

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}x^2.\frac{x}{2}\tan\alpha = \frac{1}{3}.\frac{4h^2}{2 + \tan^2\alpha}.\frac{h\tan\alpha}{\sqrt{2 + \tan^2\alpha}}$$

$$= \frac{4h^3\tan\alpha}{3\sqrt{\left(2 + \tan^2\alpha\right)^3}}$$

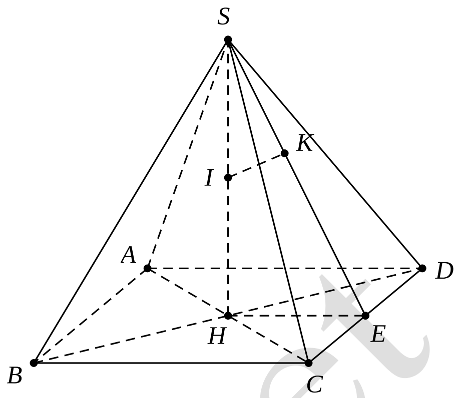
$$\sqrt{\left(2+\tan^2\alpha\right)^3}=\sqrt{\left(1+1+\tan^2\alpha\right)^3}$$

$$\geq\sqrt{\left(3\sqrt[3]{\tan^2\alpha}\right)^3}=3\sqrt{3}\tan\alpha$$

$$V_{S.ABCD}\leq\frac{4\sqrt{3}h^3\tan\alpha}{27\tan\alpha}=\frac{4\sqrt{3}h^3}{27}.$$

Vậy $\max V_{S.ABCD}=\dfrac{4\sqrt{3}h^3}{27}$

$\Leftrightarrow \tan\alpha=1\Leftrightarrow\alpha=45^0$



Bài 11

1. Gọi O là tâm của đáy, ta có $BD\perp(SOA)$ suy ra góc SOA là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và mặt đáy nên $SOA=60^0$.

Trong tam vuông SAO ta có: $SA=AO.\tan 60^0$

$=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\sqrt{3}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

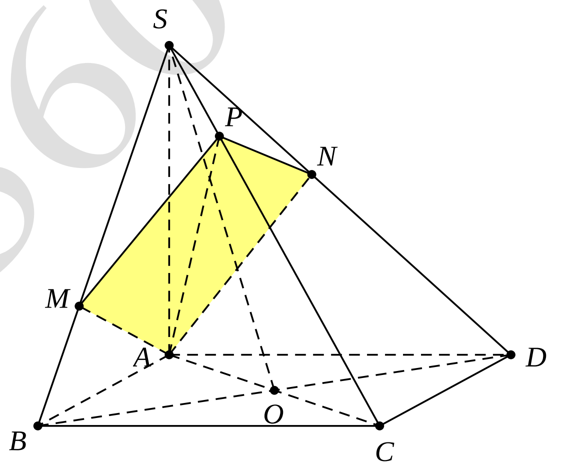
Ta có: $\begin{cases}BC\perp AB\\ BC\perp SA\end{cases}$

$\Rightarrow BC\perp(SAB)$

$\Rightarrow BC\perp AM$

$\Rightarrow AM\perp(SBC)$

$\Rightarrow AM\perp SC$



Tương tự: $AN\perp(SCD)\Rightarrow AN\perp SC$, từ đó suy ra: $SC\perp(AMN)$

Nên AP là đường cao của hình chóp $S.AMPN$

Suy ra: $V_{S.AMPN}=\dfrac{1}{3}AP.S_{AMPN}$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAC ta có:

$$\frac{SP}{SC}=\frac{SP.SC}{SC^2}=\frac{SA^2}{SA^2+AC^2}=\frac{3}{7}\Rightarrow SP=\frac{3}{7}SC=\frac{3a\sqrt{14}}{14}$$

Trong tam giác vuông SAB ta có: $AM = \dfrac{SA.AB}{SB} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$

Do $\Delta SBC \sim \Delta SPM \Rightarrow \dfrac{MP}{BC} = \dfrac{SP}{SB} \Rightarrow MP = \dfrac{SP.BC}{SB} = \dfrac{3a\sqrt{35}}{35}$

Suy ra: $S_{AMPN} = 2S_{\Delta AMP} = AM.MP = \dfrac{a^2\sqrt{21}}{35}$.

Vậy $V_{S.AMPN} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3a\sqrt{14}}{14}.\dfrac{a^2\sqrt{21}}{35} = \dfrac{3a^3\sqrt{6}}{70}$.

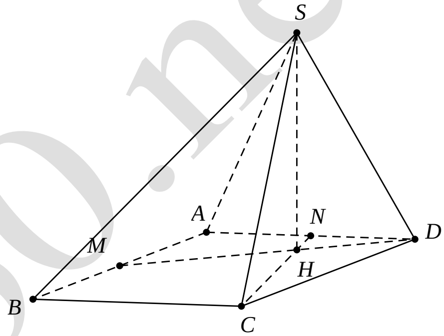
2.

Ta có: $V_{S.CDNM} = \dfrac{1}{3}SH.S_{MNDC}$

$S_{MNDC} = S_{ABCD} - S_{\Delta AMN} - S_{\Delta MBC}$

$= a^2 - \dfrac{a^2}{8} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{5a^2}{8}$.

$V_{S.CDNM} = \dfrac{1}{3}a\sqrt{3}.\dfrac{5a^2}{8} = \dfrac{5\sqrt{3}a^3}{24}$



Lại thấy: $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{CN} = \dfrac{1}{2}\left(2\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}\right).\dfrac{1}{2}\left(2\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}\right) = DA^2 - DC^2 = 0$.

Vậy $CN \perp DM$ từ đó $SC \perp DM$ bởi vậy :

$d(SC; DM) = d(H; SC) = \dfrac{2S_{\Delta HSC}}{SC} = \dfrac{SH.CH}{SC} = \dfrac{SH.CH}{\sqrt{SH^2 + CH^2}}$.

Lại có: $CH = \dfrac{2S_{\Delta CMD}}{DM} = \dfrac{2\left(S_{ABCD} - S_{\Delta AMD} - S_{\Delta CMB}\right)}{DM} = a\sqrt{\dfrac{4}{5}}$

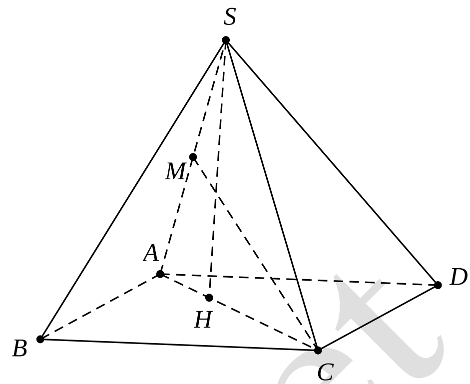
Thay lên trên ta có khoảng cách cần tính là: $2a\sqrt{\dfrac{3}{19}}$.

3. Chứng minh M là trung điểm SA

Ta có: $AH = \dfrac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \dfrac{a\sqrt{14}}{4}$, $HC = \dfrac{3a\sqrt{2}}{4}$

$\Rightarrow SC = \sqrt{SH^2 + CH^2} = a\sqrt{2}$.

Suy ra $SC = AC \Rightarrow \Delta ACS$ cân tại C nên M là trung điểm SA.



- Tính $V_{S.MBC}$?

Vì M là trung điểm SC nên

$S_{SCM} = \frac{1}{2} S_{SAC}$, suy ra

$$V_{SMBC} = \frac{1}{2} V_{SABC} = \frac{1}{6} SH.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3\sqrt{14}}{48}$$

4. Gọi H là hình chiếu của S trên AB, suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Do đó SH là đường cao của hình chóp $S.BMDN$.

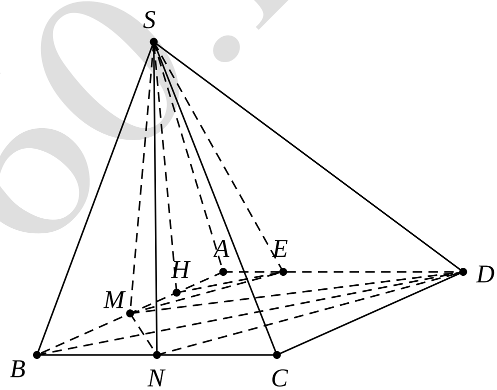
$SA^2 + SB^2 = a^2 + 3a^2 = AB^2$

$\Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại S

$\Rightarrow SM = \frac{AB}{2} = a$.

Do đó tam giác đều,

suy ra $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Diện tích tứ giác $BMDN$ là: $S_{BMDN} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = 2a^2$

Thể tích khối chóp $S.BMDN$: $V = \frac{1}{3} SH.S_{BMDN} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ (đvtt).

Kẻ $ME // DN$ $(E \in AD) \Rightarrow AE = \frac{a}{2}$.

Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng SM và DN. Ta có: $(SM, ME) = \varphi$.

Theo định lý ba đường vuông góc ta có: $SA \perp AE$

$\Rightarrow SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $ME = \sqrt{AM^2 + AE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Do ΔSME cân tại E nên $SME = \varphi$ và $\cos\varphi = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

5. Gọi H là trung điểm của AD. Ta có tam giác SAD đều nên $SH \perp AD$.

Do $(SAD) \perp (ABCD)$

$\Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp BP$ (1)

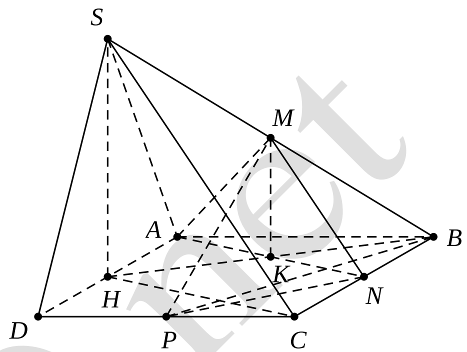
Ta có $ABCD$ là hình vuông nên:

$\Delta CDH = \Delta BCP$

$\Rightarrow BP \perp CH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $BP \perp (SHC)$

Mặt khác: $MN // SC; AN // HC$



$\Rightarrow (AMN) // (SHC) \Rightarrow BP \perp AM$

Gọi $K = BH \cap AN$. Ta có MK là đường trung bình của tam giác SBH

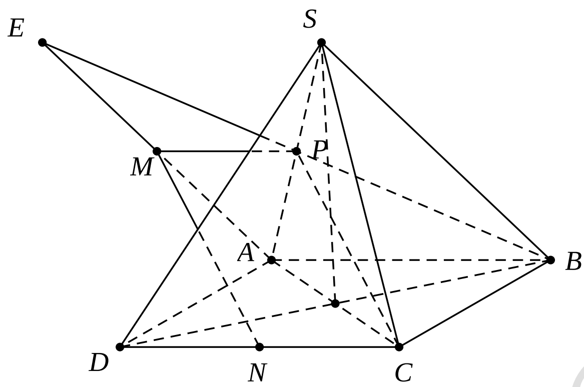
Suy ra $MK // SH \Rightarrow MK \perp (CMN); MK = \dfrac{1}{2}SH = \dfrac{\sqrt{3}a}{4}$.

Diện tích tam giác CMN : $S_{CMN} = \dfrac{1}{2}CM.CN = \dfrac{a^2}{8}$.

Thể tích khối tứ diện $CMNP$: $V_{CMNP} = \dfrac{1}{3}.MK.S_{CMN} = \dfrac{\sqrt{3}a^3}{96}$ (đvtt).

6. Gọi P là trung điểm của SA. Ta có MP là đường trung bình của tam giác $EAD \Rightarrow MP // AD \Rightarrow MP // NC$ và $MN = \dfrac{1}{2}AD = NC$.

Suy ra $MNCP$ là hình bình hành $\Rightarrow MN // CP \Rightarrow MN // (SAC)$.



Ta dễ chứng minh được $BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp MN$

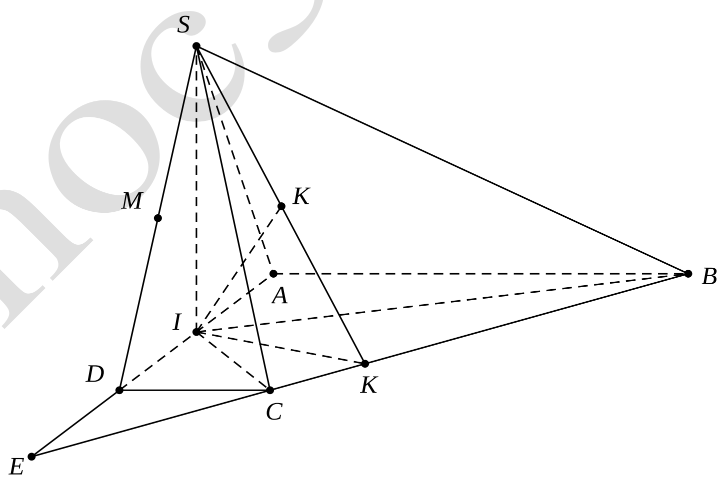
Vì $MN // (SAC)$ nên:

$$d(MN, AC) = d(N, (SAC)) = \frac{1}{2} d(B, (SAC)) = \frac{1}{4} BD = \frac{\sqrt{2}a}{4}.$$

Vậy $d(MN, AC) = \dfrac{\sqrt{2}a}{4}$.

Bài 12

1. a. Tính $V_{S.ABCD}$



Từ giả thiết suy ra $SI \perp (ABCD) \Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SI.S_{ABCD}$

Ta có: $S_{ABCD}=\dfrac{\left(AB+DC\right)AD}{2}=2a^2$

Vẽ $IK\perp BC\Rightarrow BC\perp (SIK)\Rightarrow SKI$ là góc giữa mặt phẳng (SBC) với mặt đáy

Nên $SKI=60^0$

Vì $S_{\Delta IDC}=\dfrac{1}{2}DI.DC=\dfrac{a^2}{4}$, $S_{\Delta IAB}=\dfrac{1}{2}AI.BI=\dfrac{3a^2}{4}$,

suy ra $S_{\Delta BIC}=S_{ABCD}-\left(S_{\Delta ICD}+S_{\Delta IAB}\right)=a^2$

Mặt khác: $BC=\sqrt{\left(AB-CD\right)^2+AD^2}=a\sqrt{5}$ và $S_{\Delta IAB}=\dfrac{1}{2}IK.BC$

Nên suy ra: $IK=\dfrac{2a^2}{a\sqrt{5}}=\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Trong tam giác vuông SIK ta có: $SI=IK\tan 60^0=\dfrac{2a\sqrt{15}}{5}$

Vậy $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{2a\sqrt{15}}{5}.2a^2=\dfrac{4a^3\sqrt{15}}{15}$.

b) Gọi M là trung điểm SD. Tính $d\left(M,(SBC)\right)$.

Gọi E là giao điểm của AD với BC, ta có:

$\dfrac{ED}{EA}=\dfrac{DC}{AB}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow ED=\dfrac{1}{2}AD=ID$

Do đó: $d\left(M,(SBC)\right)=\dfrac{1}{2}d\left(D,(SBC)\right)=\dfrac{1}{4}d\left(I,(SBC)\right)$

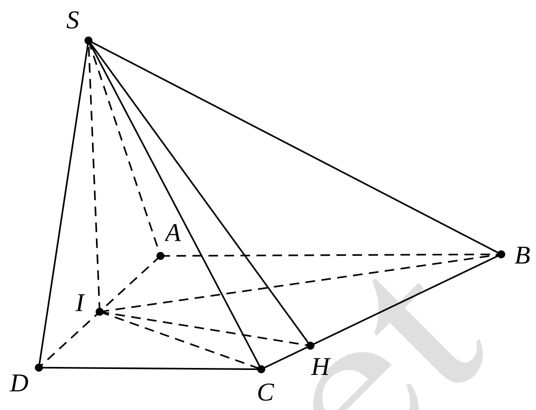
Gọi H là hình chiếu của I lên SK ta có: $d\left(I,(SBC)\right)=IH$

Trong tam giác vuông SIK, ta có:

$$\frac{1}{IH^2}=\frac{1}{SI^2}+\frac{1}{IK^2}=\frac{5}{12a^2}+\frac{5}{4a^2}=\frac{5}{3a^2}\Rightarrow IH=\frac{a\sqrt{15}}{5}$$

Vậy $d\left(M,(SBC)\right)=\dfrac{a\sqrt{15}}{20}$.

2. Vì hai mặt phẳng $\left(SBI\right)$ và $\left(SCI\right)$ cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng đó SI vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ hay là $SI \perp (ABCD)$



$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SI.S_{ABCD}$$

$$S_{ABCD} = \frac{AD(AB+CD)}{2} = 3a^2$$

Gọi H là hình chiếu của I xuống $BC \Rightarrow BC \perp (SIH) \Rightarrow SHI = \left((SBC),(ABCD)\right) = 60^0$.

Ta có: $BC = \sqrt{AD^2 + (AB-DC)^2} = a\sqrt{5}$; $S_{\Delta IDC} = \frac{a^2}{2}$; $S_{\Delta AIB} = a^2$.

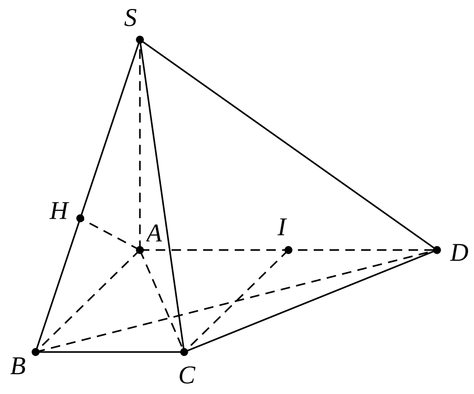
$$\Rightarrow S_{\Delta BCI} = S_{ABCD} - (S_{\Delta IDC} - S_{\Delta ABI}) = \frac{3}{2}a^2$$

$$\Rightarrow IH = \frac{2S_{\Delta IBC}}{BC} = \frac{3a\sqrt{5}}{5} \Rightarrow SI = IH.\tan 60^0 = \frac{3a\sqrt{15}}{5}.$$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SI.S_{ABCD} = \frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$.

3. Gọi I là trung điểm của AD.

Ta có $CI = IA = ID = \frac{AD}{2}$ suy ra ΔACD vuông tại C $\Rightarrow CD \perp AC$. Mà $SA \perp \left(ABCD\right) \Rightarrow SA \perp CD$ nên ta có $CD \perp SD$ hay ΔSCD vuông. Gọi $d_1; d_2$ lần lượt là khoảng cách từ B, H đến $mp(SCD)$



Ta có: $\Delta SAB \sim \Delta SHA \Rightarrow \frac{SA}{SH} = \frac{SB}{SA} \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2}{3}$ mà

$\frac{SH}{SB} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow d_2 = \frac{2}{3}d_1$.

Thể tích khối tứ diện $S.BCD$: $V_{SBCD} = \frac{1}{3}SA.\frac{1}{2}AB.BC = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$.

Ta có: $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a, CD = \sqrt{CI^2 + ID^2} = \sqrt{2}a$

$\Rightarrow S_{SCD} = \frac{1}{2}SC.CD = \sqrt{2}a^2$.

Ta có: $V_{SBCD} = \frac{1}{3}d_1.S_{SCD} \Rightarrow d_1 = \frac{3.\frac{\sqrt{2}a^3}{6}}{\sqrt{2}a^2} = \frac{a}{2}$

Vậy khoảng cách từ H đến $mp(SCD)$ là $d_1 = \frac{a}{3}$.

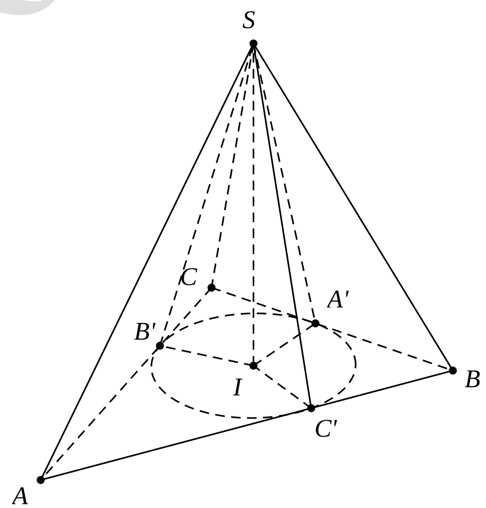
Bài 13

Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên (ABC), A', B', C' lần lượt là hình chiếu của I trên BC, CA, AB.

Từ giả thiết suy ra $SA'I = SB'I = SC'I = 60^0$.

Các tam giác vuông SIA', SIB', SIC' bằng nhau nên $IA' = IB' = IC' \Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Gọi p là nửa chu vi tam giác $ABC \Rightarrow p = \frac{5a + 6a + 7a}{2} = 9a$



$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p - BC)(p - AC)(p - AB)}$

$= \sqrt{9a(9a - 6a)(9a - 7a)(9a - 5a)} = 6\sqrt{6}a^2$

Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ta có :

$$S_{ABC} = pr \Rightarrow r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{6\sqrt{6}a^2}{9a} = \frac{2\sqrt{6}a}{3} \Rightarrow IA' = r = \frac{2\sqrt{6}a}{3}$$

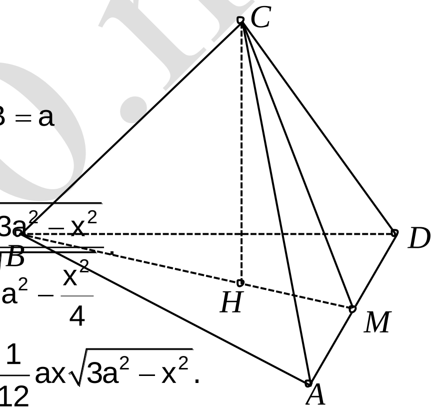
Ta có: $SI = IA'\tan 60^0 = \dfrac{2\sqrt{6}a}{3}\sqrt{3} = 2\sqrt{2}a$

Suy ra $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SI.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}2\sqrt{2}a.6\sqrt{6}a = 8\sqrt{3}a^3$.

Bài 14

1. Ta có: $CA = CB = CD = DA = BD = a$ nên hình chiếu H của C lên mặt phẳng (ABD) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác cân BAD, hay H thuộc trung tuyến BM. Diện tích tam giác BAD

$$S_{ABD} = \frac{1}{2}BM.AD = \frac{1}{2}x.\sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}}.$$



Tam giác MCB có $MC = MB = \sqrt{a^2 - \dfrac{x^2}{4}}, CB = a$

nên $CH = \dfrac{\sqrt{MB^2 - \dfrac{BC^2}{4}}.BC}{MB}$, hay $CH = \dfrac{a\sqrt{3a^2 - x^2}}{2\sqrt{a^2 - \dfrac{x^2}{4}}}$

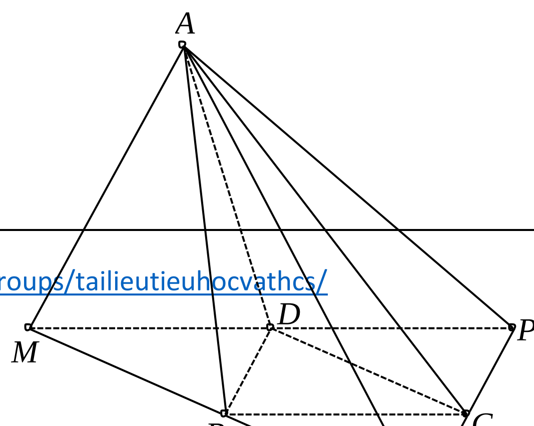
Vậy thể tích khối tứ diện là $V = \dfrac{1}{3}CH.S_{ABD} = \dfrac{1}{12}ax\sqrt{3a^2 - x^2}$.

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $x\sqrt{3a^2 - x^2} \le \dfrac{x^2 + (3a^2 - x^2)}{2} = \dfrac{3a^2}{2}$, nên

$V \le \dfrac{a^3}{8}$. Dấu đẳng thức có khi $x^2 = 3a^2 - x^2 \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}a$.

Vậy thể tích khối tứ diện lớn nhất là $\dfrac{a^3}{8}$, đạt được khi $x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}a$.

2. Trong mặt phẳng (DBC), dựng các đường thẳng qua các đỉnh và song song với cạnh còn lại của tam giác BCD, chúng cắt nhau tại M, N, P. Khi đó B, C, D lần lượt là trung điểm của các đoạn cạnh MN, NP, PM.



Ta có $S_{MNP}=4S_{BCD}$ nên
$V_{AMNP}=4V_{ABCD}$.
Vì $AD=BC$ và BC là đường trung bình
của tam giác NMP nên

$$AD=DM=DP$$

Suy ra tam giác AMP là tam giác vuông tại A.
Tương tự cũng có các tam giác APN, ANM đều vuông tại A.

Vì thế $V_{AMNP}=\frac{1}{6}AM.AN.AP$. Đặt $AM=x, AN=y, AP=z$.

Chú ý $MN^2=4DC^2=4a^2$, nên áp dụng định lý Pitago cho các tam giác AMP, APN, ANM ta có

$$\begin{cases}x^2+y^2=4a^2\\ y^2+z^2=4b^2\\ z^2+x^2=4c^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=4a^2\\ y^2+z^2=4b^2\\ x^2+y^2+z^2=2(a^2+b^2+c^2)\end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2=2(a^2-b^2+c^2), y^2=2(a^2+b^2-c^2), z^2=2(-a^2+b^2+c^2)$$

Vậy $V_{AMNP}=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)(-a^2+b^2+c^2)}$, nên

$$V_{ABCD}=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)(-a^2+b^2+c^2)}.$$

Để ý rằng $(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)=a^4-(b^2-c^2)^2\le a^4$ và hai bất đẳng thức tương tự khác, ta có

$$\left[(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)(-a^2+b^2+c^2)\right]^2\le a^4b^4c^4$$

Hay $V_{ABCD}\le\frac{\sqrt{2}}{12}abc.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$, hay tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều.

3. Trong mặt phẳng (DBC), dựng các đường thẳng qua các đỉnh và song song với cạnh còn lại của tam giác BCD chúng cắt nhau tại M, N, P. Khi đó B, C, D lần lượt là trung điểm của các đoạn cạnh MN, NP, PM.

Ta có $S_{\Delta MNP}=4S_{\Delta BCD}$ nên $V_{AMNP}=4V_{ABCD}$.

Vì $AD=BC$ và BC là đường trung bình của ΔNMP nên:
$AD=DM=DP$
Suy ra tam giác AMP là tam giác vuông tại A.
Tương tự cũng có các tam giác APN, ANM đều vuông tại A.

Vì thế $V_{AMNP}=\frac{1}{6}AM.AN.AP$. Đặt $AM=x, AN=y, AP=z$.

Chú ý $MN^2=4DC^2=4a^2$, nên áp dụng định lý Pitago cho các tam giác AMP, APN, ANM ta có:

$$\begin{cases}x^2+y^2=4a^2\\y^2+z^2=4b^2\\z^2+x^2=4c^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=4a^2\\y^2+z^2=4b^2\\x^2+y^2+z^2=2(a^2+b^2+c^2)\end{cases}$$

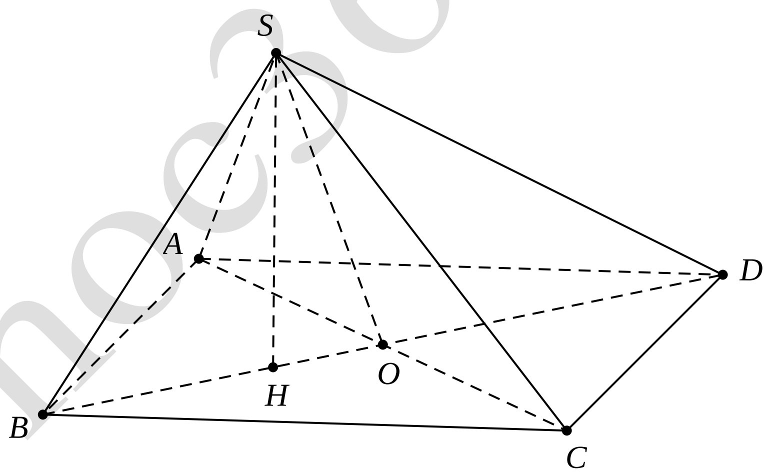
$\Rightarrow x^2=2(a^2-b^2+c^2), y^2=2(a^2+b^2-c^2), z^2=2(-a^2+b^2+c^2)$

Vậy $V_{AMNP}=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)(-a^2+b^2+c^2)}$, nên

$$V_{ABCD}=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)(-a^2+b^2+c^2)}.$$

Bài 15

1.



Gọi H là hình chiếu của S lên mặt đáy, ta suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên H thuộc BD.

Mặt khác $\begin{cases} BD \perp AC \\ SH \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow O = BD \cap AC$ là hình chiếu của A lên mặt phẳng (SBD), mà $AS = AB = AD = a \Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $SBD \Rightarrow \Delta SBD$ vuông tại S. Đặt $SD = x$

Ta có: $SH.BD = SB.SD \Rightarrow SH = \dfrac{SB.SD}{BD}$ và $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD$

Nên $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{SB.SD}{BD}.\dfrac{1}{2}AC.BD = \dfrac{1}{3}AB.SD.OA$

Mà $OA^2 = AB^2 - \dfrac{BD^2}{4} = a^2 - \dfrac{a^2 + x^2}{4} = \dfrac{3a^2 - x^2}{4}$

Do đó: $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{6}.a.x.\sqrt{3a^2 - x^2}$

Ap dụng bđt Cô si ta có: $x\sqrt{3a^2 - x^2} \le \dfrac{x^2 + 3a^2 - x^2}{2} = \dfrac{3a^2}{2}$

Suy ra: $V_{S.ABCD} \le \dfrac{1}{6}.a.\dfrac{3a^2}{2} = \dfrac{a^3}{4}$. Đẳng thức xảy ra

$\Leftrightarrow x^2 = 3a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

Vậy $V_{S.ABCD}$ lớn nhất $\Leftrightarrow SD = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

2. Áp dụng định lí hàm số cô sin cho tam giác SAB ta có:

$AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2SA.SB.\cos\alpha = 2a^2(1 - \cos\alpha) = 4a^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow AB = 2a\cos\frac{\alpha}{2}$

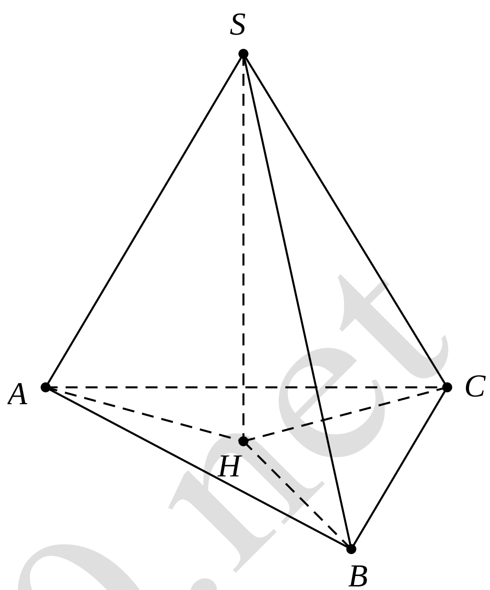
$BC = 2a\cos\frac{\beta}{2},\ CA = 2a\cos\frac{\gamma}{2}$

Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng đáy (ABC), ta có H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

$AH = \frac{AB.BC.CA}{4S},\ S = S_{\Delta ABC}$

suy ra : $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2}$

$= \frac{\sqrt{16a^2S^2 - (AB.BC.CA)^2}}{4S}$



Do đó:

$$V_{SABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{12}\sqrt{16a^2S^2 - 64a^6\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}}$$

Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC, ta có: $p = a\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2}\right)$

Nên $S^2 = p(p-AB)(p-BC)(p-CA)$

$$= a^4\left[\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\right)^2 - \cos^2\frac{\gamma}{2}\right]\left[\cos^2\frac{\gamma}{2} - \left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\beta}{2}\right)^2\right]$$

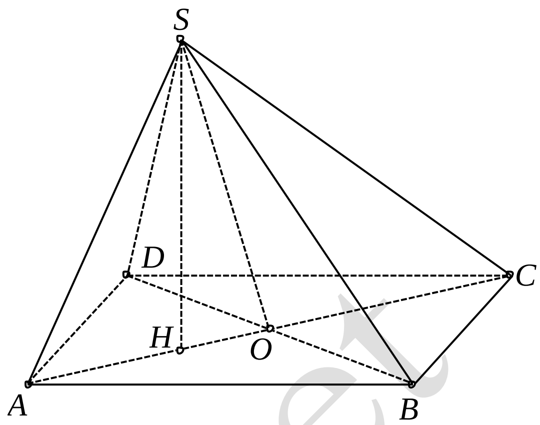
(*)

Vậy $V_{SABC} = \frac{a^3k}{3}$ với

$$k = \sqrt{\left[\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\right)^2 - \cos^2\frac{\gamma}{2}\right]\left[\cos^2\frac{\gamma}{2} - \left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\beta}{2}\right)^2\right] - 4\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}}$$

3. Vì $SA = SB = SD$ nên hình chiếu H của điểm S lên mặt phẳng đáy là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD. Mà tứ giác $ABCD$ có các cạnh bằng nhau nên đó là một hình thoi, do đó $H \in AO$.

Ba tam giác SBD, ABD, CBD có các cạnh tương ứng bằng nhau nên bằng nhau, do đó các trung tuyến SO, AO, CO bằng nhau, suy ra tam giác SAC vuông tại $S \Rightarrow AC = \sqrt{SA^2 + SC^2} = \sqrt{a^2 + x^2}$.



Tam giác vuông SAC có đường cao SH nên $\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SC^2}$

$\Rightarrow SH = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

Ta có $OB^2 + OA^2 = AB^2$ nên

$$OB^2 = AB^2 - \frac{AC^2}{4} = a^2 - \frac{a^2 + x^2}{4} = \frac{3a^2 - x^2}{4} \Rightarrow OB = \frac{\sqrt{3a^2 - x^2}}{2}.$$

Diện tích đáy của khối chóp $S_{ABCD} = AC.OB = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 + x^2)(3a^2 - x^2)}$.

Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{6}.ax\sqrt{3a^2 - x^2}$.

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$36V^2 = a^2x^2(3a^2 - x^2) \le a^2\left[\frac{x^2 + (3a^2 - x^2)}{2}\right]^2$$

$$\Rightarrow 36V^2 \le \frac{9a^6}{4} \Rightarrow V^2 \le \frac{a^6}{16} \Rightarrow V \le \frac{a^3}{4}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x^2 = 3a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $\frac{a^3}{4}$, đạt được khi và chỉ khi $x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.