HƯỚNG DẪN GIẢI.

Vấn đề 6. TỈ SỐ THỂ TÍCH

Bài 1

1. a. Ta có $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{6}SA.AB.AC=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$

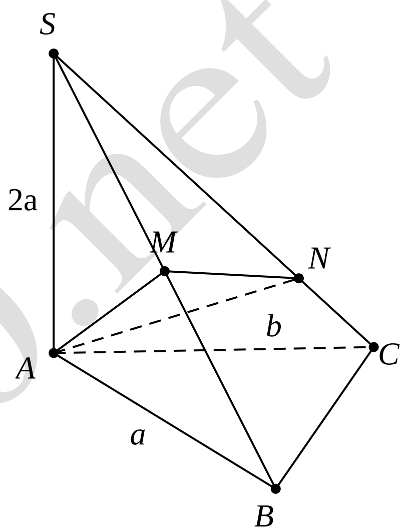
Ap dụng công thức tỉ số thể tích

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA.AM.SN}{SA.SB.SC}=\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}=\frac{2x}{3}$$

Do đó: $V_{S.AMN}=\frac{2x}{3}V_{S.ABC}=\frac{2xa^3\sqrt{3}}{9}$.

b. Mặt phẳng (AMN) chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau

$$\Leftrightarrow \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{2x}{3}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{3}{4}.$$



2. Vì $(AHK)\perp SC\Rightarrow AH\perp SC$, nhưng $BC\perp(SAB)\Rightarrow AH\perp BC$ do đó ta có $AH\perp(SBC)\Rightarrow AH\perp SB$.

Tam giác vuông SAB với đường cao AH

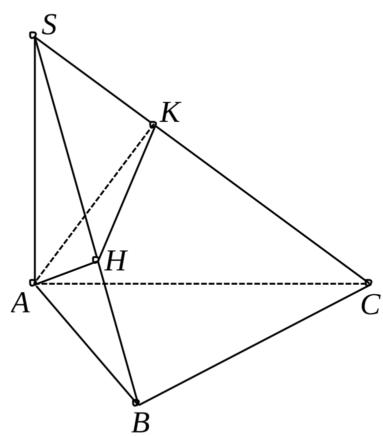
nên $\frac{SH}{SB}=\frac{SH.SB}{SB^2}=\frac{SA^2}{SB^2}$

hay $\frac{SH}{SB}=\frac{SA^2}{SA^2+AB^2}=\frac{4}{5}$.

Tương tự ta có $\frac{SK}{SC}=\frac{SA^2}{SA^2+AB^2+CB^2}=\frac{2}{3}$.

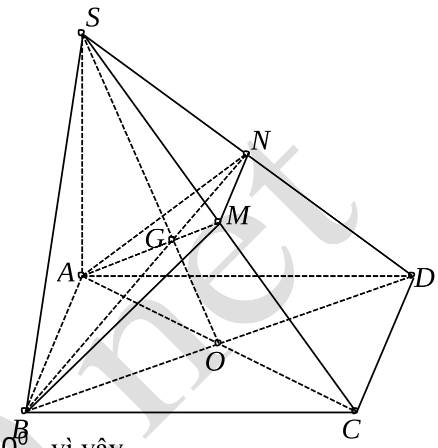
Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V=\frac{a^3}{3}$.

Vì thế $\frac{V_{S.AHK}}{V}=\frac{SH}{SB}.\frac{SK}{SC}=\frac{8}{15}\Rightarrow V_{S.AHK}=\frac{8}{45}a^3$.



Bài 2

Vì G là trọng tâm tam giác SAC nên $AG \cap SC = M$ là trung điểm của SC. Mặt khác ta có $AB // CD$ nên N là trung điểm của SD. Do đó



$$\frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SC} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{V_{S.ANM}}{V_{S.ADC}} = \frac{SM}{SC} \cdot \frac{SN}{SD} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{V_{S.ABMN}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.ABM}}{2V_{S.ABC}} + \frac{V_{S.ANM}}{2V_{S.ADC}} = \frac{3}{8}$$

Góc hợp bởi AN và mặt phẳng đáy là $NAD = 30^0$, vì vậy

$$AD = SA.\cot 30^0 = a\sqrt{3} \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{3}a^3$$

$$V_{S.ABMN} = \frac{\sqrt{3}}{8}a^3 \Rightarrow V_{MNABCD} = V_{S.ABCD} - V_{S.ABMN} = \frac{5\sqrt{3}}{24}a^3.$$

Bài 3

1. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}SA.AB.AD = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$$

$$V_{S.ABC} = V_{S.ACD} = \frac{1}{2}V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$$

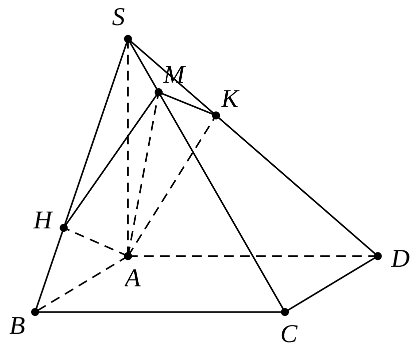
Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

Mặt khác $AH \perp SB$ nên suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$.

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh

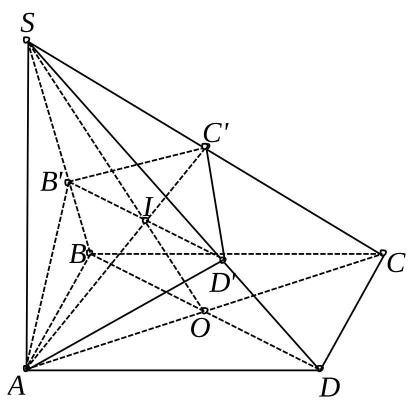
được $AK \perp SC$



Từ đó, suy ra $SC \perp (AHK)$ nên $SC \perp AM$.
Ap dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:
$$\frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{3a^2}{4a^2} = \frac{3}{4};\ \frac{SK}{SD} = \frac{SA^2}{SA^2 + AD^2} = \frac{3}{7};$$
$$\frac{SM}{SC} = \frac{SA^2}{SA^2 + AC^2} = \frac{3}{8}$$
Sử dụng công thức tỉ số thể tích ta có được:
$$\frac{V_{S.AHM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SH}{SB}.\frac{SM}{SC} = \frac{9}{32} \Rightarrow V_{S.AHM} = \frac{9}{32}V_{S.ABC} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{32}$$
$$\frac{V_{S.AKM}}{V_{S.ADC}} = \frac{SK}{SD}.\frac{SM}{SC} = \frac{9}{56} \Rightarrow V_{S.AKM} = \frac{9}{56}V_{S.ABC} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{56}$$
Vậy $V_{S.AHMK} = V_{S.AHM} + V_{S.AKM} = \dfrac{33a^3\sqrt{3}}{224}$.

Chú ý Ta có thể tính thể tích khối chóp $S.AHMK$ theo cách sau:
$V_{S.AHMK} = \dfrac{1}{3}SM.S_{AHMK}$.

2. Gọi O là giao của hai đường chéo của hình thoi và $I = SO \cap AC'$. Khi đó $B'D'$ qua I và song song với BD. Ta có $\dfrac{SB'}{SB} = \dfrac{SD'}{SD} = \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3}$ (vì I là trọng tâm tam giác SAC).



Suy ra $\dfrac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SB'}{SB}.\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{3}$

và $\dfrac{V_{S.AD'C'}}{V_{S.ADC}} = \dfrac{SD'}{SD}.\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{1}{3}$.

Vậy $\dfrac{V_{S.AB'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{V_{S.AD'C'}}{2V_{S.ADC}} + \dfrac{V_{S.AD'C'}}{2V_{S.ADC}} = \dfrac{1}{3}$.

Mà $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{2}{3}SA.S_{ABD} = \dfrac{1}{3}a.a.a.\sin 60^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a^3$

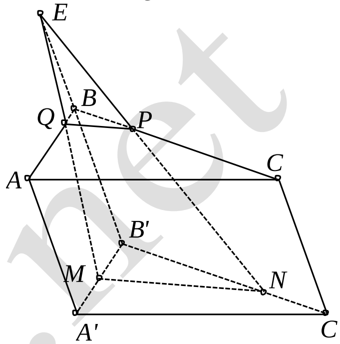
nên $V_{S.AB'C'D'} = \dfrac{1}{3}V_{S.ABCD} = \dfrac{\sqrt{3}}{18}a^3$.

Bài 4

$NP \cap B'B = E, EM \cap AB = Q$

$$\frac{EB}{EB'} = \frac{EQ}{EM} = \frac{EP}{EN} = \frac{BP}{B'N} = \frac{1}{2}$$

Mặt phẳng (MNP) chia khối lăng trụ thành hai phần, phần chứa điểm B có thể tích là V_1, phần còn lại có thể tích là V_2. Gọi thể tích của khối lăng trụ là V.



Ta có

$d(E,(A'B'C')) = 2.d(B,(A'B'C'))$,

$\frac{S_{B'MN}}{S_{A'B'C'}} = \frac{B'M}{B'A'}.\frac{B'N}{B'C'} = \frac{1}{3}$

nên $V_{E.MB'N} = \frac{1}{3}.2.d(B,(A'B'C')).\frac{1}{3}S_{A'B'C'} = \frac{2}{9}V$.

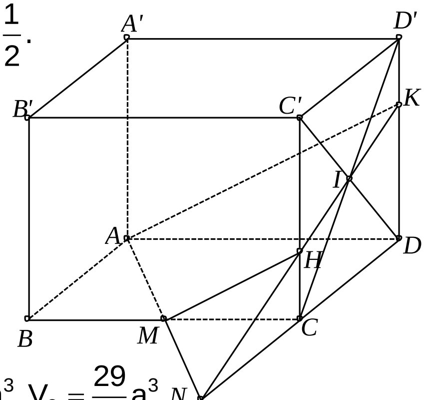
$\frac{V_{E.QBP}}{V_{E.MB'N}} = \left(\frac{EB}{EB'}\right)^3 = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow V_1 = V_{E.MB'N} - V_{E.QBP} = \frac{7}{8}.\frac{2}{9}V = \frac{7}{36}V$

$\Rightarrow V_2 = V - V_1 = \frac{29}{36}V \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{7}{29}$.

Bài 5

$AM \cap DC = N, NI$ cắt CC', DD' lần lượt tại H, K. Mặt phẳng (AMI) chia khối lập phương thành hai khối đa diện. Khối đa diện chứa điểm D có thể tích là V_1, khối đa diện còn lại có thể tích là V_2. Thể tích của khối lập phương là $V = a^3$.



Ta có $\frac{HC}{KD} = \frac{NC}{ND} = \frac{NM}{NA} = \frac{NH}{NK} = \frac{MC}{AD} = \frac{1}{2}$.

Nên $V_{N.ADK} = \frac{1}{3}.ND.S_{ADK}$

$\Rightarrow V_{N.ADK} = \frac{2}{9}a^3$.

$\frac{V_{N.MCH}}{V_{N.ADK}} = \left(\frac{NC}{ND}\right)^3 = \frac{1}{8}$

Do đó

$V_1 = V_{N.ADK} - V_{N.MCH} = \frac{7}{8}V_{N.ADK} = \frac{7}{36}a^3, V_2 = \frac{29}{36}a^3$.

Bài 6

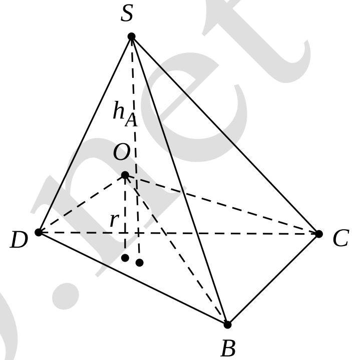
1.

$$\frac{V_{O.BCD}}{V_{ABCD}}=\frac{\frac{1}{3}r.S_{BCD}}{\frac{1}{3}h_A.S_{BCD}}=\frac{r}{h_A},\frac{V_{O.CAD}}{V_{ABCD}}=\frac{r}{h_B},\frac{V_{O.ABD}}{V_{ABCD}}=\frac{r}{h_C},\frac{V_{O.ABC}}{V_{ABCD}}=\frac{r}{h_D}$$

Suy ra: $\frac{r}{h_A}+\frac{r}{h_B}+\frac{r}{h_C}+\frac{r}{h_D}$

$=\frac{V_{O.ABC}+V_{O.ABD}+V_{O.ACD}+V_{O.BCD}}{V_{ABCD}}=1$

Do đó: $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_A}+\frac{1}{h_B}+\frac{1}{h_C}+\frac{1}{h_D}$.



2. Ta có $V_{S.KMN}+V_{S.KML}=V_{S.NLM}+V_{S.NLK}$ (1)

Vì ABCD là hình bình hành nên

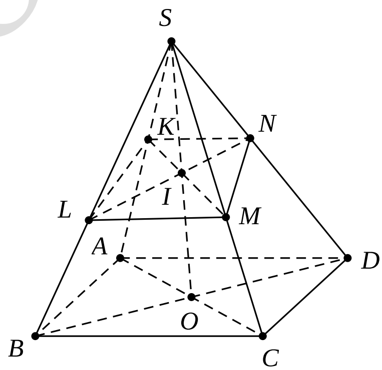
$S_{ACD}=S_{ACB}=S_{ABD}$

$=S_{CBD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$

Do đó $V_{S.ACD}=V_{S.ACB}=V_{S.ABD}$

$=V_{S.CBD}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}$

Vậy từ (1) ta suy ra:



$$\frac{V_{S.KMN}}{V_{S.ACD}}+\frac{V_{S.KML}}{V_{S.ABC}}=\frac{V_{S.NLM}}{V_{S.DBC}}+\frac{V_{S.NLK}}{V_{S.DBA}}.$$

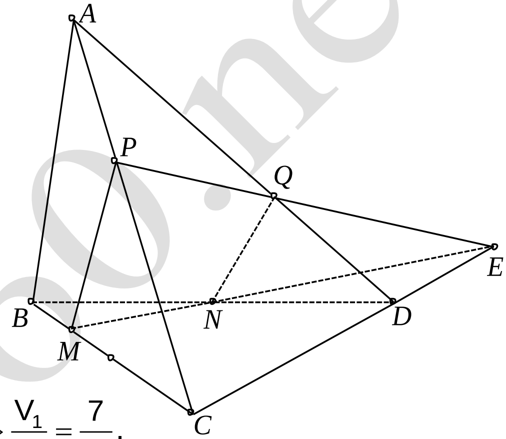
$$\Rightarrow\frac{SK.SM.SN}{SA.SC.SD}+\frac{SK.SM.SL}{SA.SB.SC}=\frac{SN.SL.SM}{SD.SB.SC}+\frac{SN.SL.SK}{SD.SB.SA}$$

$$\Leftrightarrow\frac{SK.SL.SM.SN}{SA.SB.SC.SD}\left(\frac{SB}{SL}+\frac{SD}{SN}\right)=\frac{SK.SL.SM.SN}{SA.SB.SC.SD}\left(\frac{SA}{SK}+\frac{SC}{SM}\right)$$

$\Leftrightarrow \frac{SA}{SK}+\frac{SC}{SM}=\frac{SB}{SL}+\frac{SD}{SN}$ (đpcm).

3. Gọi E là giao điểm của MN và CD. Điểm Q chính là giao điểm của AD và PE. Ta có $\frac{ED}{EC}=\frac{MB}{MC}.\frac{ND}{NB}=\frac{1}{3}$ nên $\frac{QA}{QD}=\frac{PA}{PC}.\frac{EC}{ED}=\frac{3}{2}$, do đó $\frac{AQ}{AD}=\frac{3}{5}$.

Gọi V, V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối tứ diện $ABCD$, khối đa diện chứa điểm A và khối đa diện chứa điểm D khi chia khối tứ diện bởi mặt phẳng (MNP) chia khối tứ diện.



Ta có $V_1=V_{ABMN}+V_{AMPN}+V_{APQN}$

Vì $\frac{S_{BMN}}{S_{BCD}}=\frac{BM.BN}{BC.BD}=\frac{1}{8}$

và $\frac{S_{MNC}}{S_{BCD}}=\frac{3}{8},\frac{S_{DNC}}{S_{BCD}}=\frac{1}{2}$

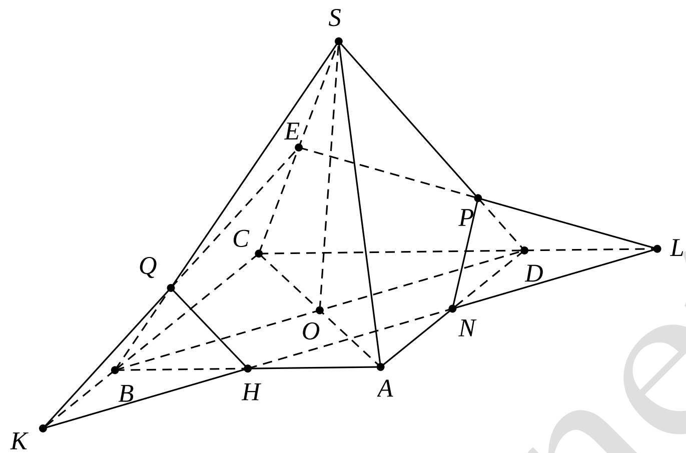
nên $V_{ABMN}=\frac{1}{8}V, V_{AMPN}=\frac{1}{3}V$

$V_{APQN}=\frac{1}{3}.\frac{3}{5}V_{ADNC}=\frac{1}{10}V$

$V_1=\frac{7}{20}V \Rightarrow V_1=\frac{7}{20}V, V_2=\frac{13}{20}V \Rightarrow \frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{13}$.

Bài 7

1. Đường thẳng MN cắt BC và CD tại K và L; EL cắt SD tại P; EK cắt SB tại Q. Mặt phẳng (MNE) cắt hình chóp theo mặt cắt là ngũ giác NMPEQ.



Đặt $AB = a, SO = h$. Ta có $KB = DL = \frac{a}{2}$.

Hạ $EH // SO \Rightarrow EH$ là đường trung bình của ΔSOC nên $EH = \frac{h}{2}$.

$$S_{\Delta CKL} = \frac{1}{2}CK.CL = \frac{1}{2}\frac{3a}{2}\frac{3a}{2} = \frac{9a^2}{8};$$

$$V_{ECKL} = \frac{1}{3}EH.S_{CKL} = \frac{1}{3}.\frac{h}{2}.\frac{9a^2}{8} = \frac{3a^2h}{16}$$

Ta có Q là trung điểm của EK nên

$$\frac{V_{KBQM}}{V_{KCEL}} = \frac{KB.KQ.KM}{KC.KE.KL} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3} = \frac{1}{18} \Rightarrow V_{KBQM} = \frac{1}{18}V_{KCEL} = \frac{a^2h}{96}$$

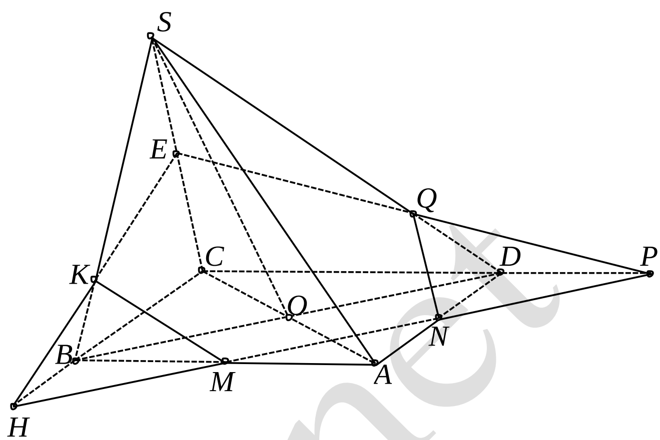
Tương tự $V_{LNDP} = \frac{a^2h}{96}$

$$V_1 = V_{BCDNMQEP} = V_{ECKL} - [V_{KBMQ} + V_{LDNP}] = \frac{3a^2h}{16} - \frac{a^2h}{48} = \frac{a^2h}{6}$$

Gọi V_2 là phần thể tích $SEQMANP$ ta có:

Suy ra $V_2 = V_{SABCD} - V_1 = \frac{a^2h}{3} - \frac{a^2h}{6} = \frac{a^2h}{6}$. Vậy $\frac{V_1}{V_2} = 1$.

2. MN cắt CB, CD tại H, P. Nối E với H, P ta có thiết diện là ngũ giác EKMNQ.



Gọi V, V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối chóp $S.ABCD$, khối đa diện chứa điểm C và khối đa diện chứa điểm A khi chia khối chóp bởi (MNE).

Dễ dàng tính được

$\frac{HM}{HP} = \frac{HB}{HC} = \frac{1}{3}$,

$\frac{PN}{PH} = \frac{PD}{PC} = \frac{1}{3}$,

$\frac{HK}{HE} = \frac{PQ}{PE} = 1$

$$\frac{V_{C.EHP}}{V_{C.SBD}} = \frac{CE}{CS} \cdot \frac{CH}{CB} \cdot \frac{CP}{CD} = \frac{9}{8} \Rightarrow V_{C.EHP} = \frac{9}{16}V$$

$$\frac{V_{H.KBM}}{V_{H.ECP}} = \frac{HK}{HE} \cdot \frac{HB}{HC} \cdot \frac{HM}{HP} = \frac{1}{18}, \frac{V_{P.DNQ}}{V_{P.CHE}} = \frac{PD}{PC} \cdot \frac{PN}{PH} \cdot \frac{PQ}{PE} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow V_1 = V_{H.ECP} - V_{H.KBM} - V_{P.DNQ} = \frac{8}{9}V_{C.EHP} = \frac{1}{2}V$$

Vậy tỉ số thể tích của hai phần là $\frac{V_1}{V_2} = 1$.

Bài 8

1. *(Bạn đọc tự vẽ hình)*

a) Ta có $\frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC}$.

Tam giác SAB vuông tại A có đường cao AM nên $\frac{SM}{SB} = \frac{SM.SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2}$.

$$SB^2 = SA^2 + AB^2, \frac{SM}{SB} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{a^2}{a^2 + b^2}.$$

$$\frac{SN}{SC} = \frac{SA^2}{SA^2 + AC^2} = \frac{a^2}{a^2 + c^2} \Rightarrow \frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}} = \frac{a^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{a^2}{a^2 + c^2} = \frac{a^4}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}.$$

Vậy tỉ số thể tích của hai khối chóp $S.AMN$ và $S.ABC$ không phụ thuộc vào độ lớn của góc α.

b) Mặt phẳng (AMN) chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau, tức là $\frac{V_{SAMN}}{V_{SABC}}=\frac{1}{2}$, do đó $\frac{a^4}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}=\frac{1}{2}$. Hay

$$2a^4=(a^2+b^2)(a^2+c^2)\Leftrightarrow a^4-(b^2+c^2)a^2-b^2c^2=0$$

$$\Leftrightarrow a^2=\frac{b^2+c^2\pm\sqrt{(b^2+c^2)^2+4b^2c^2}}{2}$$

Vì $a>0,a^2>0$ nên $a=\sqrt{\frac{b^2+c^2+\sqrt{(b^2+c^2)^2+4b^2c^2}}{2}}$.

c) Diện tích ΔABC là $S_{ABC}=\frac{1}{2}.AB.AC.\sin BAC=\frac{1}{2}bc.\sin\alpha.$

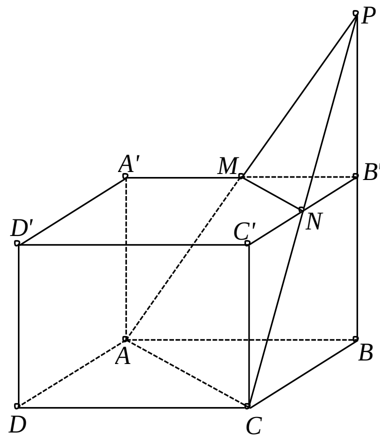
Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{ABC}=\frac{1}{6}abc.\sin\alpha.$

Thể tích khối chóp $S.AMN$ là

$$V_{SAMN}=\frac{a^4}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}.V_{SABC}=\frac{a^5bc.\sin\alpha}{6(a^2+b^2)(a^2+c^2)}.$$

Bài 9

1. Gọi M là trung điểm của $A'B'$. Mặt phẳng (ACM) chia khối hộp chữ nhật thành hai phần (hình vẽ), phần chứa điểm B' có thể tích V_1 và phần còn lại có thể tích V_2.



Ta có $\frac{PB'}{PB}=\frac{PN}{PC}=\frac{PM}{PA}=\frac{MB'}{AB}=\frac{1}{2}$.

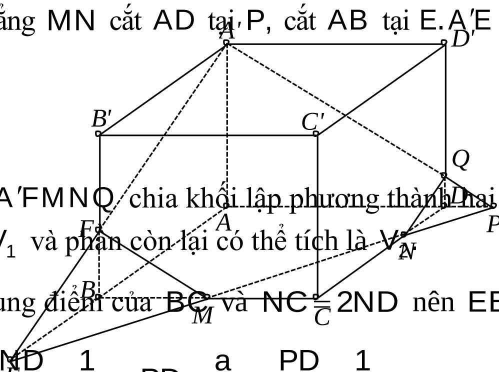
$V_{P.ACB}=\frac{1}{3}PB.S_{ABC}=\frac{1}{3}abc.$

$\frac{V_{P.MNB'}}{V_{P.ACB}}=\frac{PB'}{PB}.\frac{PN}{PC}.\frac{PM}{PA}=\frac{1}{8}$

do đó $V_1=V_{P.ACB}-V_{P.MNB'}=\left(1-\frac{1}{8}\right).V_{P.ACB}=\frac{7}{8}.\frac{1}{3}abc=\frac{7}{24}abc.$

Vậy $V_1 = \dfrac{7}{24}abc, V_2 = abc - \dfrac{7}{24}abc = \dfrac{17}{24}abc.$

2. Đường thẳng MN cắt AD tại P, cắt AB tại $E.A'E \cap BB' = F$, $A'P \cap DD' = Q.$



Thiết diện $A'FMNQ$ chia khối lập phương thành hai phần, phần chứa điểm A có thể tích là V_1 và phần còn lại có thể tích là V_2.

Vì M là trung điểm của BC và $NC = 2ND$ nên $EB = CN = \dfrac{2a}{3}$ nên $\dfrac{EB}{EA} = \dfrac{2}{5}$;

$$\dfrac{DP}{MC} = \dfrac{ND}{NC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow PD = \dfrac{a}{4} \Rightarrow \dfrac{PD}{PA} = \dfrac{1}{5}.$$

Ta có $V_{A'.AEP} = \dfrac{1}{3}AA'.S_{AEP} = \dfrac{1}{6}AA'.AE.AP = \dfrac{1}{6}a.\dfrac{5a}{3}.\dfrac{5a}{4} = \dfrac{25}{72}a^3.$

Nhưng $\dfrac{V_{E.FBM}}{V_{E.A'AP}} = \left(\dfrac{EB}{EA}\right)^3 = \dfrac{8}{125}, \dfrac{V_{P.QDN}}{V_{P.A'AE}} = \left(\dfrac{PD}{PA}\right)^3 = \dfrac{1}{125}$ nên suy ra

$$V_1 = V_{E.A'AP} - V_{E.FBM} - V_{P.QDN} = \left(1 - \dfrac{8}{125} - \dfrac{1}{125}\right)V_{P.A'AE}$$

$$\Rightarrow V_1 = \dfrac{116}{125}.\dfrac{25}{72}a^3 = \dfrac{29}{90}a^3, V_2 = V - V_1 = \dfrac{61}{90}a^3.$$

3. Thiết diện được dựng như hình vẽ.

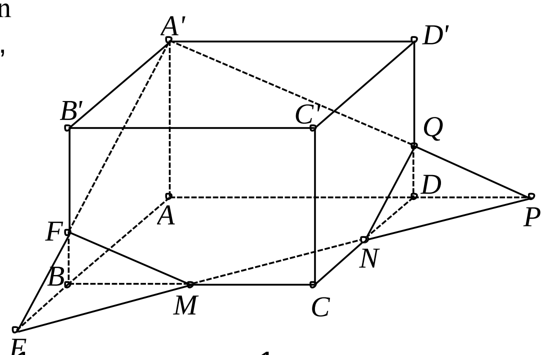
Gọi V là thể tích khối hộp. Khối hộp được chai thành hai phần, phần chứa điểm A có thể tích là V_1, phần còn lại là V_2.

Ta có $V_2 = V - V_1$.

Dễ thấy

$$\dfrac{EB}{EA} = \dfrac{EM}{EP} = \dfrac{EF}{EA'} = \dfrac{1}{3},$$

$$\dfrac{PD}{PA} = \dfrac{PN}{PE} = \dfrac{PQ}{PA'} = \dfrac{1}{3}$$



Nên suy ra $V_{A'AEP} = \dfrac{3}{8}V, V_{EBMF} = \dfrac{1}{27}V_{A'AEP}, V_{PQDN} = \dfrac{1}{27}V_{A'AEP}.$

Do đó $V_1 = V_{A'AEP} - V_{EBMF} - V_{PQDN} = \dfrac{25}{27}V_{A'AEP} = \dfrac{25}{72}V.$

Vậy $V_1=\frac{25}{72}V \Rightarrow V_2=\frac{47}{72}V \Rightarrow \frac{V_1}{V_1}=\frac{25}{47}$.

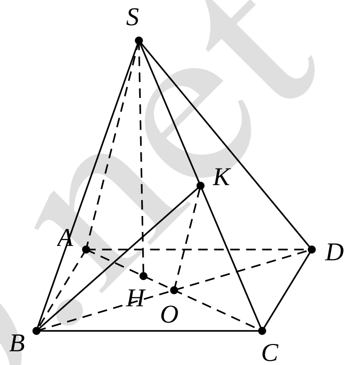
Bài 10

1. Ta có $V_{A.SBC}=\frac{1}{3}d(A,(SBC)).S_{BCS}$ nên $d(A,(SBC))=\frac{3V_{A.SBC}}{S_{BCS}}$.

Vì $(SAC)\perp(ABC)$ nên gọi H là hình chiếu của S trên cạnh AC thì $SH\perp(ABC)$, hình chiếu của SA trên mặt phẳng $(ABCD)$ là AH nên $(SA,(ABCD))=SAH=\alpha$.

Ta có $ASC=90^0$ nên

$SA=AC.\cos\alpha=\sqrt{2}.a.\cos\alpha$,



Do đó $SH=SA.\sin\alpha=\sqrt{2}.a.\cos\alpha\sin\alpha$

Nên $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{ABC}=\frac{\sqrt{2}}{6}.a^3.\cos\alpha\sin\alpha$.

Gọi K là trung điểm của SC thì OK là đường trung bình của tam giác SAC nên

$OK//SA\Rightarrow OK\perp SC$. Mà $BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp SC$ nên $BK\perp SC$.

Ta có $SC=AC.\sin\alpha=\sqrt{2}.a.\sin\alpha$ nên

$BK=\sqrt{BC^2-CK^2}=a\sqrt{\frac{2-\sin^2\alpha}{2}}$

$\Rightarrow S_{BCS}=\frac{1}{2}a^2\sin\alpha.\sqrt{2-\sin^2\alpha}$.

Vậy khoảng cách cần tìm là:

$$d(A,(SBC))=\frac{3.\frac{\sqrt{2}}{6}.a^3.\cos\alpha\sin\alpha.}{\frac{1}{2}a^2\sin\alpha.\sqrt{2-\sin^2\alpha}}=\frac{\sqrt{2}.a.\cos\alpha}{\sqrt{2-\sin^2\alpha}}.$$

2. Vì $CB\perp BA, CB\perp AS$ nên $CB\perp(SAB)\Rightarrow\varphi=CSB$.

Trong tam giác vuông SBC ta có $SB = BC.\cot\varphi = a.\cot\varphi$.

$$SA^2 = SB^2 - AB^2 = a^2(\cot^2\varphi - 1) = \frac{a^2\cos 2\varphi}{\sin^2\varphi} \Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{\cos 2\varphi}}{\sin\varphi}.$$

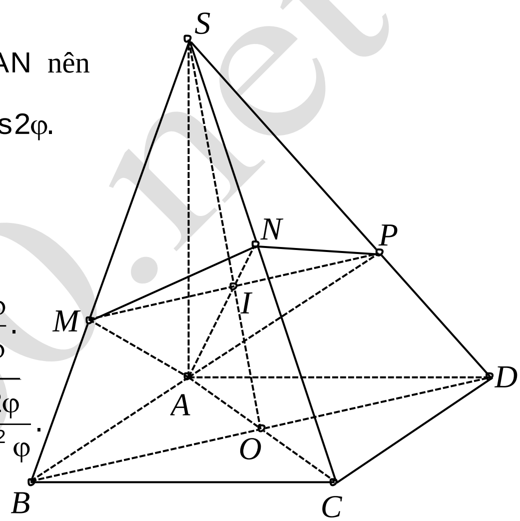
Do đó $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{\cos 2\varphi}}{3\sin\varphi}$.

Vì mặt phẳng (SAC) là mặt phẳng đối xứng của khối chóp,

nên $\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{2V_{S.AMN}}{2V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}$.

Tam giác SAC vuông tại A với đường cao AN nên

$$\frac{SN}{SC} = \frac{SN.SC}{SC^2} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AC^2} = \cos 2\varphi.$$



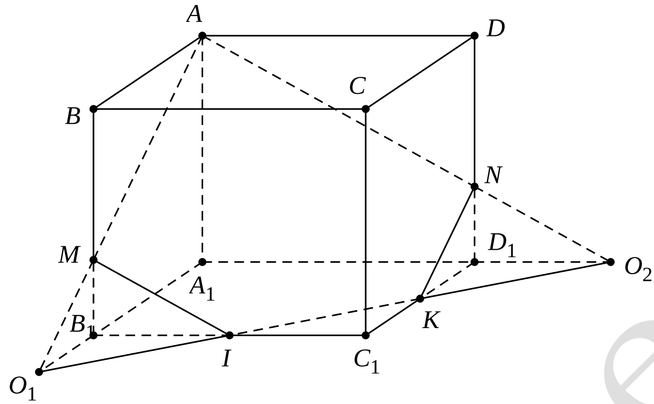
Vì $SC \perp MA, CB \perp MA$ nên AM là đường cao của tam giác vuông SAB nên

$$\frac{SM}{SB} = \frac{SM.SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{\cos 2\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

$$\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{\cos^2 2\varphi}{\cos^2\varphi} \Rightarrow V_{S.AMNP} = \frac{a^3.\sqrt{\cos^5 2\varphi}}{3\sin\varphi.\cos^2\varphi}.$$

Bài 11

1. Đường thẳng AM cắt A_1B_1 tại O_1, AN cắt A_1D_1 tại O_2. Đường thẳng O_1O_2 cắt B_1C_1, C_1D_1 lần lượt tai I và K. Mặt phẳng (AMN) cắt hình lập phương theo giao thiết diện là ngũ giác AMIKN.



Do $MB_1 = ND_1 = \frac{a}{3}$ nên ta tính được $O_1B_1 = B_1I = KD_1 = D_1O_2 = \frac{a}{2}$

Do đó $V_{AA_1O_1O_2} = \frac{1}{3}AA_1\left(\frac{1}{2}A_1O_1.A_1O_2\right) = \frac{3a^3}{8}$,

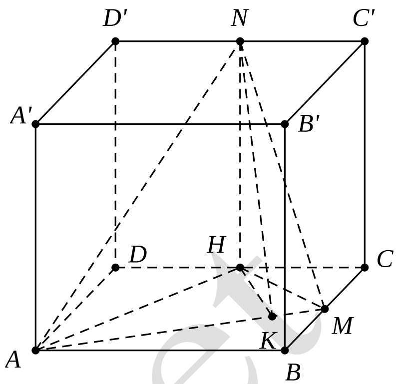
$V_{MB_1O_1I} = V_{ND_1KO_2} = \frac{1}{3}.\frac{a}{3}\left(\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}\right) = \frac{a^3}{72}$.

Đặt $V_1 = V_{A_1B_1AMIKN}$

$\Rightarrow V_1 = V_{AA_1O_1O_2} - \left[V_{MB_1O_1I} + V_{ND_1KO_2}\right] = \frac{3a^3}{8} - 2.\frac{a^3}{72} = \frac{25a^3}{72}$.

$V_2 = V_{C_1BCDAMIKN} = a^3 - V_1 = \frac{47a^3}{72}$ và $k = \frac{V_1}{V_2} = \frac{25}{47}$.

2. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{x}, \overrightarrow{AB} = \vec{y}, \overrightarrow{AD} = \vec{z}$.



Ta có tam giác ABD là tam giác đều

$\vec{x}.\vec{y} = \vec{x}.\vec{z} = 0, \vec{y}.\vec{z} = |\vec{y}||\vec{z}|.\cos 60^0 = \dfrac{a^2}{2}$.

$\overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \vec{x} + \vec{y} - \vec{z}$.

M, N là trung điểm của $BC, C'D'$ nên

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'N}$

$\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{C'D'} = \dfrac{1}{2}\vec{z} + \vec{x} - \dfrac{1}{2}\vec{y}$.

$MN \perp B'D$ nên $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DB'} = \vec{0}$

Do đó

$$(\vec{x} + \vec{y} - \vec{z})\left(\dfrac{1}{2}\vec{z} + \vec{x} - \dfrac{1}{2}\vec{y}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{1}{2}.\dfrac{a^2}{2} - \dfrac{1}{2}.a^2 - \dfrac{1}{2}.a^2 + \dfrac{1}{2}.\dfrac{a^2}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Ta có: $d(D,(AMN)) = \dfrac{3V_{D.AMN}}{S_{AMN}}$. Dễ thấy

$$S_{AMD} = \dfrac{1}{2}S_{ABCD} = S_{ABD} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Gọi H là trung điểm của DC thì $NH \perp (ABCD), NH = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$ nên

$$V_{D.AMN} = V_{N.AMD} = \dfrac{1}{3}NH.S_{AMD} = \dfrac{\sqrt{6}}{24}a^3.$$

Kẻ $HK \perp AM$ ta có $NK \perp AM$. Theo định lí hàm số cosin

$$AM^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA.BC.\cos 120^0 = \dfrac{7}{4}a^2 \Rightarrow AM = \dfrac{\sqrt{7}}{2}a.$$

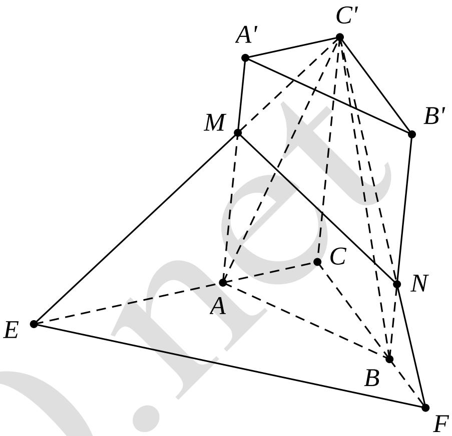
Ta có $S_{AHM} = S_{ABCD} - (S_{ADH} + S_{CHM} + S_{ABM}) = \dfrac{3}{8}S_{ABCD} = \dfrac{3\sqrt{3}}{16}a^2$

Nên $HK = \dfrac{2S_{AHM}}{AM} = \dfrac{3\sqrt{21}}{28}a \Rightarrow NK = \sqrt{NH^2 + HK^2} = \dfrac{\sqrt{231}}{14}a$.

Suy ra $S_{AMN} = \dfrac{1}{2}NK.AM = \dfrac{\sqrt{33}}{8}a^2$, do đó $d(D,(AMN)) = \dfrac{\sqrt{22}}{11}a$.

Vậy khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (AMN) là $\frac{\sqrt{22}}{11}a.$

3. Ta có $V_{ABC.A'B'C'} = a^3$.



a) Do $V_{C'.ABC} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$,

$V_{C'ABB'A'} = \frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{2a^3}{3}$

Mặt khác $S_{ABNM} = S_{A'B'NM}$

$\Rightarrow V_{C'A'B'NM} = \frac{1}{2}V_{C'ABB'A'} = \frac{a^3}{3}$

Suy ra $V_{C'CABNM} = \frac{2a^3}{3}$.

Vậy $\frac{V_{C'A'B'NM}}{V_{C'CABNM}} = \frac{1}{2}$.

b) Ta có: $\frac{S_{\Delta CEF}}{S_{\Delta CAB}} = \frac{\frac{1}{2}CE.CF.\sin ECF}{\frac{1}{2}CA.CB.\sin ACB} = \frac{CE.CF}{CA.CB}$

Mà $\frac{EA}{EC} = \frac{MA}{CC'} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{CE}{CA} = 3$, $\frac{BF}{BC} = \frac{BN}{CC'} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{3}{2}$.

Do đó $\frac{S_{\Delta CEF}}{S_{\Delta CAB}} = \frac{9}{2}$

Suy ra $C_{C'CEF} = \frac{9}{2}V_{C'CAB} = \frac{3a^3}{2}$.

4. Đường thẳng NP cắt $B'B$ tại E, cắt $B'C'$ tại $K, ME \cap AB = F$, $MK \cap A'C' = H$. Thiết diện là ngũ giác $MHPNF$ chia khối lăng trụ thành hai phần. Gọi V, V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối lăng trụ, khối đa diện chứa đỉnh A, khối đa diện chứa đỉnh B (chia bởi mặt phẳng (MNP)). Vì $NP // BC', NP = \frac{1}{2}BC'$ nên $EB = CP = \frac{1}{2}BB'$ suy ra $\frac{FB}{MB'} = \frac{EB}{EB'} = \frac{EF}{EM} = \frac{1}{3}$ và $C'K = CN = \frac{1}{2}B'C' \Rightarrow \frac{KP}{KE} = \frac{KC'}{KB'} = \frac{1}{3}$.

Trong tam giác $A'B'C'$ ta dễ dàng tính được $\dfrac{KH}{KM}=\dfrac{1}{2}$.

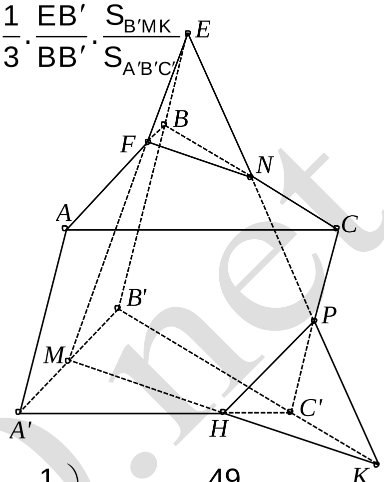
Ta có: $\dfrac{V_{E.B'MK}}{V}=\dfrac{\frac{1}{3}d(E,(A'B'C')).S_{B'MK}}{d(B,(A'B'C')).S_{A'B'C'}}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{EB'}{BB'}.\dfrac{S_{B'MK}}{S_{A'B'C'}}$

hay $\dfrac{V_{E.B'MK}}{V}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{2}.\dfrac{1.3}{2.2}=\dfrac{3}{8}$

$\Rightarrow V_{E.B'MK}=\dfrac{3}{8}V$

Mà $\dfrac{V_{E.BFN}}{V_{E.B'MK}}=\dfrac{EB}{EB'}.\dfrac{EF}{EM}.\dfrac{EN}{EK}=\dfrac{1}{27}$,

$\dfrac{V_{K.C'PH}}{V_{K.B'EM}}=\dfrac{KC'}{KB'}.\dfrac{KP}{KE}.\dfrac{KH}{KM}=\dfrac{1}{18}$.



$\Rightarrow V_1=V_{E.B'MK}-V_{E.BFN}-V_{K.C'PH}=\left(1-\dfrac{1}{27}-\dfrac{1}{18}\right)V_{E.B'MK}=\dfrac{49}{54}V_{E.B'MK}$

$\Rightarrow V_1=\dfrac{49}{54}V_{E.B'MK}=\dfrac{49}{54}.\dfrac{3}{8}V=\dfrac{49}{144}V\Rightarrow\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{49}{95}$.

Vậy tỉ số thể tích hai phần được chia bởi mặt phẳng (MNP) là $\dfrac{49}{95}$.

Bài 12

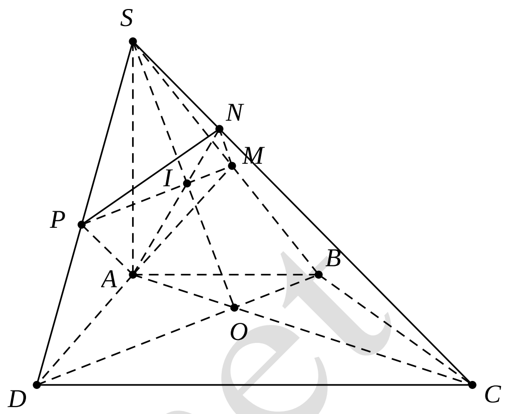
1. a) Xét hình thang $ABCD$ có BD là phân giác trong góc ADC nên tam giác ABD cân tại A. Do đó $AB=AD=BC=3cm$. Mặt khác $BD\perp BC$ nên đặt $BDC=\alpha$ thì: $BCD=ADC=2\alpha$, suy ra $2\alpha+\alpha=90^0\Rightarrow\alpha=30^0$. Vì thế $DC=2BC=6cm$.

Chiều cao của hình thang là y thì: $y = BC.\sin 60^0 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích của hình thang:

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD).y = \frac{27\sqrt{3}}{4}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

$V = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{9\sqrt{3}}{4}x.$



Ta có $\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{1}{3}$, $S_{ACD} = 2S_{ACB} = \frac{2}{3}S_{ABCD}$, do đó

$$V = V_{S.ABCD} = 3V_{S.ACB} = \frac{3}{2}V_{S.ACD}.$$

$$\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{V_{S.ANM}}{V} + \frac{V_{S.ANP}}{V} = \frac{V_{S.ANM}}{3V_{S.ACB}} + \frac{2V_{S.ANP}}{3V_{S.ACD}}$$
$$= \frac{1}{3}\left(\frac{SN}{SC}.\frac{SM}{SB} + 2\frac{SN}{SC}.\frac{SP}{SD}\right) = \frac{1}{3}.\frac{SN}{SC}\left(\frac{SM}{SB} + 2\frac{SP}{SD}\right).$$

Gọi $O = AC \cap BD$ và $I = SO \cap AN$. Mặt phẳng (α) song song với BD nên M, P là giao của đường thẳng qua I, song song với BD và các cạnh SB, SD.

Do đó : $\frac{SM}{SB} = \frac{SP}{SD} = \frac{SI}{SO}$. Đặt $\frac{NS}{NC} = b \Rightarrow \frac{SN}{SC} = \frac{b}{b+1}$.

Xét tam giác SOC và đường thẳng AN ta có $\frac{AO}{AC}.\frac{NC}{NS}.\frac{IS}{IO} = 1$, do đó

$\frac{IS}{IO} = 3b \Rightarrow \frac{SI}{SO} = \frac{3b}{3b+1} \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SP}{SD} = \frac{3b}{3b+1}$.

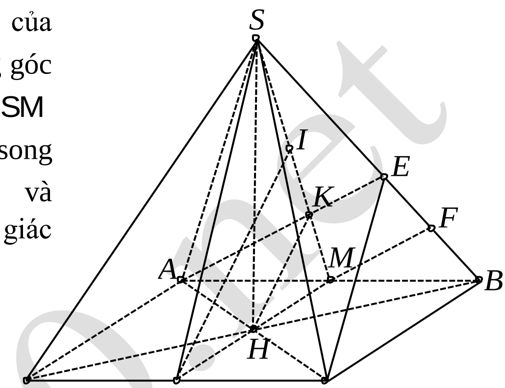
Vậy $\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{3}.\frac{b}{b+1}\left(\frac{3b}{3b+1} + 2.\frac{3b}{3b+1}\right) = \frac{3b^2}{(b+1)(3b+1)}$.

Với $\frac{NS}{NC} = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{3}$ nên $\frac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{S.AMNP} = \frac{9\sqrt{3}}{32}x.$

b) Mặt phẳng (α) chia khối chóp thành hai phần có thể tích bằng nhau khi

$\dfrac{V_{S.AMNP}}{V_{S.ABCD}} = \dfrac{1}{2}$, hay $\dfrac{3b^2}{(b+1)(3b+1)} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 3b^2 - 4b - 1 = 0$. Giải ra và kết hợp với điều kiện ta có $b = \dfrac{2+\sqrt{7}}{3}$, hay $\dfrac{NS}{NC} = \dfrac{2+\sqrt{7}}{3}$ và điểm N nằm trên cạnh SC.

2. Gọi M, N, H lần lượt là trung điểm của AB, CD, BD. Mặt phẳng (SMN) vuông góc với $AB \Rightarrow (SMN) \perp (SAB)$. Hạ $NJ \perp SM$ thì $NJ \perp (SAB)$, nên (α) chứa AC và song song với NJ. Kẻ $HK \perp SM$ và $AK \cap SB = E$ thì thiết diện là tam giác ACE.



Gọi $V = V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABC}$,

$V_1 = V_{ABCE}, V_2 = V - V_1$.

Ta có $SMH = \varphi$ nên chiều cao của khối chóp $SH = HM.\tan\varphi = \dfrac{a}{2}.\tan\varphi$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \dfrac{1}{6}a^3.\tan\varphi$.

Để tính V_1, V_2 ta tính tỉ số giữa $\dfrac{V_1}{V}$. Ta có $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{V_1}{2V_{S.ABC}} = \dfrac{BE}{2BS}$.

Kẻ $MF // AE$, ta có

$$\frac{EB}{ES} = \frac{EB}{EF}.\frac{EF}{ES} = \frac{AB}{AM}.\frac{KM}{KS} = 2.\frac{HK.\cot\varphi}{HK.\tan\varphi} = \frac{2\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{BE}{BS} = \frac{2\cos^2\varphi}{2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \frac{2\cos^2\varphi}{1+\cos^2\varphi} \Rightarrow V_1 = \frac{\cos^2\varphi}{1+\cos^2\varphi}V.$$

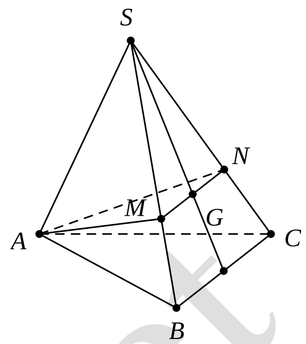
Vì thế $V_1 = \dfrac{a^3\sin 2\varphi}{3(1+\cos^2\varphi)}, V_2 = V - V_1 = \dfrac{a^3\sin\varphi}{6\cos\varphi(1+\cos^2\varphi)}$.

Bài 13

Đặt $x = \dfrac{SM}{SB}$, $y = \dfrac{SN}{SC}$ $\left(0 \le x, y \le 1\right)$. Ta có: $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{SM.SN}{SA.SB} = xy$

$$\frac{S_{\Delta SMN}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{S_{\Delta SMG} + S_{\Delta SNG}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{S_{\Delta SMG}}{2S_{\Delta SBE}} + \frac{S_{\Delta SNG}}{2S_{\Delta SCE}} = \frac{SM.SG}{2SB.SE} + \frac{SN.SG}{2SC.SE}$$

$= \frac{1}{3}\left(x+y\right)$ (1)



Lại có: $\frac{S_{\Delta SMN}}{S\Delta SBC} = \frac{SM.SN}{SA.SB} = xy$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$xy = \frac{1}{3}\left(x+y\right) \Leftrightarrow \left(3x-1\right)y = x$

$\Leftrightarrow y = \frac{x}{3x-1} \quad \left(x \neq \frac{1}{3}\right).$

Vậy $\frac{V_1}{V} = xy = \frac{x^2}{3x-1} = f\left(x\right).$

Từ $\begin{cases} 0 \leq x; y \leq 1 \\ x+y = 3xy \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq 1$. Xét $f\left(x\right) = \frac{x^2}{3x-1}, x \in \left[\frac{1}{2};1\right]$

Ta tìm được $\max\limits_{[\frac{1}{2};1]} f\left(x\right) = \frac{1}{2}$ khi $x = \frac{1}{2} \cup x = 1$; $\min\limits_{[\frac{1}{2};1]} f\left(x\right) = \frac{4}{9}$ khi $x = \frac{2}{3}$.

Vậy $\min \frac{V_1}{V} = \frac{4}{9}; \max \frac{V_1}{V} = \frac{1}{2}$.