CHỦ ĐỀ: CỰC TRỊ TRONG KHÔNG GIAN

Để tìm cực trị trong không gian chúng ta thường sử dụng hai cách làm:

Cách 1: Sử dụng phương pháp hình học

Cách 2: Sử dụng phương pháp đại số.

Bài toán 1: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(x_A;\ y_A;\ z_A), B(x_B;\ y_B;\ z_B)$ và mặt phẳng $(P):\ ax+by+cz+d=0.$ Tìm điểm $M\in(P)$ sao cho

1. $MA+MB$ nhỏ nhất.

2. $\left|MA-MB\right|$ lớn nhất với $d(A,\ (P))\neq d(B,\ (P)).$

Phương pháp:

- Xét vị trí tương đối của các điểm $A,\ B$ so với mặt phẳng $(P).$

- Nếu $(ax_A+by_A+cz_A+d)(ax_B+by_B+cz_B+d)>0$ thì hai điểm $A,\ B$ cùng phía với mặt phẳng $(P).$

- Nếu $(ax_A+by_A+cz_A+d)(ax_B+by_B+cz_B+d)<0$ thì hai điểm $A,\ B$ nằm khác phía với mặt phẳng $(P).$

1. $MA+MB$ nhỏ nhất.

- Trường hợp 1: Hai điểm $A,\ B$ ở khác phía so với mặt phẳng $(P).$

Vì $A,\ B$ ở khác phía so với mặt phẳng (P) nên $MA+MB$ nhỏ nhất bằng AB khi và chỉ khi $M=(P)\cap AB.$

- Trường hợp 2: Hai điểm $A,\ B$ ở cùng phía so với mặt phẳng $(P).$

Gọi A' đối xứng với A qua mặt phẳng (P), khi đó A' và B ở khác phía (P) và $MA=MA'$ nên $MA+MB=MA'+MB\geq A'B.$

Vậy $MA+MB$ nhỏ nhất bằng $A'B$ khi $M=A'B\cap(P).$

2. $\left|MA-MB\right|$ lớn nhất.

- Trường hợp 1: Hai điểm A, B ở cùng phía so với mặt phẳng (P).

Vì A, B ở cùng phía so với mặt phẳng (P) nên $|MA - MB|$ lớn nhất bằng AB khi và chỉ khi $M = (P) \cap AB$.

- Trường hợp 2: Hai điểm A, B ở khác phía so với mặt phẳng (P).

Gọi A' đối xứng với A qua mặt phẳng (P), khi đó A' và B ở cùng phía (P) và

$MA = MA'$ nên $|MA - MB| = |MA' - MB| \leq A'B$.

Vậy $|MA - MB|$ lớn nhất bằng $A'B$ khi $M = A'B \cap (P)$.

Bài toán 2: Lập phương trình mặt phẳng (P) biết

1. (P) đi qua đường thẳng Δ và khoảng cách từ $A \notin \Delta$ đến (P) lớn nhất

2. (P) đi qua Δ và tạo với mặt phẳng (Q) một góc nhỏ nhất

3. (P) đi qua Δ và tạo với đường thẳng d một góc lớn nhất.

Phương pháp:

Cách 1: Dùng phương pháp đại số

1. Giả sử đường thẳng $\Delta: \dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$ và $A(x_0; y_0; z_0)$

Khi đó phương trình (P) có dạng: $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$

Trong đó $Aa + Bb + Cc = 0 \Rightarrow A = -\dfrac{bB + cC}{a}$ $(a \neq 0)$ **(1)**

Khi đó $d(A,(P)) = \dfrac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ **(2)**

Thay (1) vào (2) và đặt $t = \dfrac{B}{C}$, ta được $d(A,(P)) = \sqrt{f(t)}$

Trong đó $f(t) = \dfrac{mt^2 + nt + p}{m't^2 + n't + p'}$, khảo sát hàm $f(t)$ ta tìm được $\max f(t)$.

Từ đó suy ra được sự biểu diễn của A, B qua C rồi cho C giá trị bất kì ta tìm được A, B.

2. và **3**. làm tương tự

Cách 2: Dùng hình học

1. Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của A lên Δ và (P), khi đó ta có:

$d(A,(P)) = AH \le AK$, mà AK không đổi. Do đó $d(A,(P))$ lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv K$

Hay (P) là mặt phẳng đi qua K, nhận $\overrightarrow{AK}$ làm VTPT.

2. Nếu $\Delta \perp (Q) \Rightarrow \left((P),(Q)\right) = 90^0$ nên ta xét Δ và (Q) không vuông góc với nhau.

- Gọi B là một điểm nào đó thuộc Δ, dựng đường thẳng qua B và vuông góc với (Q). Lấy điểm C cố định trên đường thẳng đó. Hạ $CH \perp (P)$, $CK \perp d$. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) là BCH.

Ta có $\sin BCH = \dfrac{BH}{BC} \ge \dfrac{BK}{BC}$.

Mà $\dfrac{BK}{BC}$ không đổi, nên BCH nhỏ nhất khi $H \equiv K$.

- Mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (BCK). Suy ra $\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{u_\Delta}, \left[\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{n_Q}\right]\right]$ là VTPT của (P).

3. Gọi M là một điểm nào đó thuộc Δ, dựng đường thẳng d' qua M và song song với d. Lấy điểm A cố định trên đường thẳng đó. Hạ $AH \perp (P)$, $AK \perp d$. Góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d' là AMH. Ta có $\cos AMH = \dfrac{HM}{AM} \ge \dfrac{KM}{AM}$.

Mà $\dfrac{KM}{AM}$ không đổi, nên AMH lớn nhất khi $H \equiv K$.

- Mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (d',Δ). Suy ra $\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{u_\Delta}, \left[\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{u_{d'}}\right]\right]$ là VTPT của (P).

Ví dụ 1. 8 Trong không gian với hệ toạ độ đề các vuông góc $Oxyz$ cho $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{2}$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A lên d và viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất.

Lời giải.

- Đường thẳng d có $\overrightarrow{u_d}=(2;1;2)$ là VTCP.

Gọi H là hình chiếu của A lên $d\Rightarrow H(1+2t;t;2+2t)\Rightarrow\overrightarrow{AH}=(2t-1;t-5;2t-1)$.

Do $AH\perp d\Rightarrow\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow 2(2t-1)+t-5+2(2t-1)=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow H(3;1;4)$.

- Gọi H' là hình chiếu của A lên $mp(P)$.

Khi đó, ta có: $AH'\le AH\Rightarrow d(A,(P))$ lớn nhất $\Leftrightarrow H\equiv H'\Leftrightarrow(P)\perp AH$

Suy ra $\overrightarrow{AH}=(1;-4;1)$ là VTPT của (P) và (P) đi qua H.

Vậy phương trình $(P): x-4y+z-3=0$.

Ví dụ 2.8 Trong không gian với hệ toạ độ đề các vuông góc $Oxyz$ cho bốn điểm $A(1;0;0)$, $B(1;1;0)$, $C(0;1;0)$, $D(0;0;m)$ với $m\neq 0$ là tham số.

1. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BD khi $m=2$;

2. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên BD. Tìm các giá trị của tham số m để diện tích tam giác OBH đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(0;1;0)$, $\overrightarrow{CD}=(0;-1;m)$

1. Với $m=2$ ta có: $\overrightarrow{CD}=(0;-1;2)$ và $\overrightarrow{AC}=(-1;1;0)$

Do đó $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]=(2;0;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right].\overrightarrow{AC}=-2$

Vậy $d(AB,CD)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]\right|}=\dfrac{2}{2}=1$.

2. Đặt $x=OH\Rightarrow BH=\sqrt{OB^2-OH^2}=\sqrt{2-x^2}$

Suy ra $S_{\Delta OBH} = \frac{1}{2}x.\sqrt{2-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2(2-x^2)} \le \frac{1}{4}(x^2+2-x^2) = \frac{1}{2}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow OH = 1 \Leftrightarrow d(O, BD) = 1$

Ta có: $\overrightarrow{BD} = (-1;-1;m)$, $\overrightarrow{OB} = (1;1;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{OB}\right] = (-m;m;0)$

Do đó $d(O, BD) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{OB}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{BD}\right|} = \frac{m\sqrt{2}}{\sqrt{2+m^2}} = 1 \Leftrightarrow 2m^2 = 2 + m^2$

$\Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$

Vậy $m = \pm\sqrt{2}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3.8 Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;9;4)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C (khác gốc tọa độ) sao cho:

1. M là trực tâm của tam giác ABC;

2. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (α) là lớn nhất;

3. $OA = OB = OC$;

4. $8OA = 12OB + 16 = 37OC$ và $x_A > 0, z_C < 0$.

Lời giải.

Giả sử mặt phẳng (α) cắt các trục tọa độ tại các điểm khác gốc tọa độ là $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a, b, c \ne 0$.

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;9;4)$ nên $\frac{1}{a} + \frac{9}{b} + \frac{4}{c} = 1$ (1).

1. Ta có: $\overrightarrow{AM}(1-a;9;4), \overrightarrow{BC}(0;-b;c), \overrightarrow{BM}(1;9-b;4), \overrightarrow{CA}(a;0;-c)$.

Điểm M là trực tâm tam giác ABC khi và chỉ khi $\begin{cases} M \in (\alpha) \\ \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CA} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{9}{b} + \frac{4}{c} = 1 \\ 9b = 4c \\ a = 4c \end{cases} \Rightarrow a = 98; b = \frac{98}{9}; c = \frac{49}{2}.$$

Phương trình mặt phẳng (α) cần tìm là $x + 9y + 4z - 98 = 0$.

2.

Cách 1: Ta có: $d(O,(\alpha)) = \dfrac{|-1|}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}}$.

Bài toán trở thành, tìm giá trị nhỏ nhất của $T = \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$ với các số thực

$a,b,c \neq 0$ thỏa mãn $\dfrac{1}{a}+\dfrac{9}{b}+\dfrac{4}{c}=1$ (1).

Ap dụng bđt Bunhiacopski ta có:

$$\left(1.\frac{1}{a}+9.\frac{1}{b}+4.\frac{1}{c}\right)^2 \leq (1^2+9^2+4^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).$$

Nên suy ra $T \geq \dfrac{1}{98}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} 1:\dfrac{1}{a}=9:\dfrac{1}{b}=4:\dfrac{1}{c} \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{9}{b}+\dfrac{4}{c}=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=9b=4c=98.$$

Phương trình mặt phẳng (α) cần tìm là $x+9y+4z-98=0$.

Cách 2: Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (α).

Vì mặt phẳng (α) luôn đi qua điểm cố định M nên

$d(O,(\alpha)) = OH \leq OM = \sqrt{98}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $H \equiv M$, khi đó (α) là mặt phẳng đi qua M và có véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{OM}(1;9;4)$ nên phương trình (α) là

$$1.(x-1)+9(y-9)+4.(z-4)=0 \Leftrightarrow x+9y+4z-98=0.$$

3. Vì $OA=OB=OC$ nên $|a|=|b|=|c|$, do đó xảy ra bốn trường hợp sau:

- Trường hợp 1: $a=b=c$.

Từ (1) suy ra $\dfrac{1}{a}+\dfrac{9}{a}+\dfrac{4}{a}=1 \Leftrightarrow a=14$, nên phương trình (α) là:

$x+y+z-14=0$.

- Trường hợp 2: $a=b=-c$. Từ (1) suy ra $\dfrac{1}{a}+\dfrac{9}{a}-\dfrac{4}{a}=1 \Leftrightarrow a=6$, nên phương trình (α) là $x+y-z-6=0$.

• Trường hợp 3: $a=-b=c$. Từ (1) suy ra $\frac{1}{a}-\frac{9}{a}+\frac{4}{a}=1 \Leftrightarrow a=-4$, nên phương trình (α) là $x-y+z+4=0$.

• Trường hợp 4: $a=-b=-c$. Từ (1) có $\frac{1}{a}-\frac{9}{a}-\frac{4}{a}=1 \Leftrightarrow a=-12$, nên phương trình (α) là $x-y-z+12=0$.

Vậy có bốn mặt phẳng thỏa mãn là $x+y+z-14=0$, và các mặt phẳng

$$x+y-z-6=0, x-y+z+4=0,\ x-y-z+12=0.$$

4. Vì $x_A>0, z_C<0$ nên $a>0, c<0$, do đó

$$8OA=12OB+16=37OC \Leftrightarrow 8a=12\left|b\right|+16=-37c.$$

• Nếu $b>0 \Rightarrow c=-\frac{8}{37}a, b=\frac{2a-4}{3}, a>2$ nên từ (1) ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{27}{2a-4}-\frac{37}{2a}=1 \Leftrightarrow a^2+2a-35=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=5 \\ a=-7 \end{array}\right.$$

Vì $a>2$ nên $a=5 \Rightarrow b=2; c=-\frac{40}{37}$, phương trình mặt phẳng cần tìm là

$$(\alpha): 8x+20y-37z-40=0.$$

• Nếu $b<0 \Rightarrow c=-\frac{8}{37}a, b=\frac{4-2a}{3}, a>2$ nên từ (1) ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{27}{4-2a}-\frac{37}{2a}=1 \Leftrightarrow a^2+29a-35=0 \Leftrightarrow a=\frac{-29\pm 3\sqrt{109}}{2}$$

Vì $a>2$ nên không có giá trị thỏa mãn.

Vậy phương trình mặt phẳng $(\alpha): 8x+20y-37z-40=0$.

Ví dụ 4.8 Cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x+2y+z+7=0$

1. Chứng minh rằng mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định tâm và tìm bán kính của đường tròn đó;

2. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(3;5;-2)$ và (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$, bán kính $R=5$.

1. Ta có $d(I,(\alpha)) = \dfrac{|2+2+1+7|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = 4 < R$, suy ra (α) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn tâm H bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2(I,(\alpha))} = 3$

H là hình chiếu của I lên mặt phẳng (α), suy ra phương trình của HI là:

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+2t \\ z = 1+t \end{cases}$$

Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+2t \\ z = 1+t \\ 2x+2y+z+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = -\dfrac{5}{3} \\ z = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Vậy tâm $H\left(-\dfrac{5}{3};-\dfrac{5}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$.

2. Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;6;-4)$ nên phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+3t \\ y = 2-2t \end{cases}$

Vì $IA < R$ nên mặt phẳng (P) đi qua AB luôn cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có bán kính $r = \sqrt{25 - d^2(I,(P))}$.

Do đó r nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I,(P))$ lớn nhất.

Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của I lên AB và (P), ta luôn có $IH \le IK$ nên suy ra $d(I,(P))$ lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv K$

Do $H \in AB \Rightarrow H(1+t;-1+3t;2-2t) \Rightarrow \overrightarrow{IH} = (t;3t-2;1-2t)$

Vì $IH \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow t + 3(3t-2) - 2(1-2t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{4}{7}$

$\Rightarrow \overrightarrow{IH} = \left(\dfrac{4}{7};-\dfrac{2}{7};-\dfrac{1}{7}\right)$

Vậy phương trình $(\alpha): 4x - 2y - z - 4 = 0$.

Ví dụ 5.8 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P): 2x - y + 2z - 14 = 0$ và mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$

1. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 3;

2. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) lớn nhất.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;-1)$ và bán kính $R=3$.

1.Trục Ox có phương trình: $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow$ phương trình (Q): $ay+bz=0$.

Mặt cầu (S) cắt (Q) theo một đường tròn có bán kính $r=3=R$

$\Rightarrow I \in (Q) \Rightarrow a-2b=0$, chọn $b=1 \Rightarrow a=2$.

Vậy phương trình mp(Q): $2x+y=0$.

2. Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với mp(P) . Suy ra phương trình của Δ : $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$

Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A,B .

Khi đó nếu $d(A,(P))>d(B,(P)) \Rightarrow d(M,(P))$ lớn nhất $\Leftrightarrow M \equiv A$.

Tọa độ giao điểm của Δ và mặt cầu (S) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0 \\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+1}{2} \end{cases}.$$

Giải hệ này ta được hai giao điểm $A(-1;-1;-3)$, $B(3;-3;1)$.

Ta có: $d(A,(P))=7>d(B,(P))=1$.

Vậy $d(M,(P))$ lớn nhất $\Leftrightarrow M(-1;-1;-3)$.

Ví dụ 6.8 Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-6=0$ và hai điểm $A(5;-2;6)$, $B(3;-2;1)$. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho:

1. $MA+MB$ nhỏ nhất

2. $|MA-MB|$ lớn nhất

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có $\overrightarrow{n_P}=(2;-1;2)$ là VTPT

Thay tọa độ hai điểm A,B vào vế trái phương trình của (P) ta được 18 và 4 nên hai điểm A,B nằm về cùng một phía so với (P).

1. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P), khi đó A' và B ở khác phía so với (P) và với mọi điểm $M \in (P)$, ta có $MA = MA'$.

Do đó $\forall M \in (P): MA + MB = A'M + MB \geq A'B$, mà $A'B$ không đổi và đẳng thức xảy ra khi $M = A'B \cap (P)$, suy ra $MA + MB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M = A'B \cap (P)$.

Ta có: $AA' \perp (P) \Rightarrow AA': \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 6 + 2t \end{cases}$

Tọa độ giao điểm H của AA' và (P) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 6 + 2t \\ 2x - y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \Rightarrow H(1; -1; 2) \\ z = 2 \end{cases}$$

H là trung điểm của $AA' \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = -3 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = 2 \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = -2 \end{cases} \Rightarrow A'(-3; 2; -2)$

Suy ra $\overrightarrow{A'B} = (6; -4; 3)$, phương trình $A'B: \begin{cases} x = -3 + 6t \\ y = 2 - 4t \quad , t \in \mathbb{R} \\ z = -2 + 3t \end{cases}$

Tọa độ M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = -3 + 6t \\ y = 2 - 4t \\ z = -2 + 3t \\ 2x - y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{21}{11} \\ y = -\dfrac{14}{11} \\ z = \dfrac{5}{11} \end{cases}$

Vậy $M\left(\dfrac{21}{11}; -\dfrac{14}{11}; \dfrac{5}{11}\right)$ là điểm cần tìm.

2. Vì A, B nằm về cùng một phía so với (P) nên với mọi $M \in (P)$ ta luôn có

$$\left|AM - MB\right| \le AB \text{, đẳng thức xảy ra khi } M = AB \cap (P).$$

Phương trình $AB:\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -2 \\ z = 6 - 5t \end{cases}$

Tọa độ $M:\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -2 \\ z = 6 - 5t \\ 2x - y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{17}{7} \\ y = -2 \\ z = -\dfrac{3}{7} \end{cases}$. Vậy $M\left(\dfrac{17}{7}; -2; -\dfrac{3}{7}\right)$.

Ví dụ 7.8 Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1;-1;1)$, đường thẳng Δ có phương trình : $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$

1. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng Δ và khoảng cách từ A đến (Q) lớn nhất;

2. Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa Δ và tạo với (P) một góc nhỏ nhất;

3. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa hai điểm $M(1;1;1), N(-1;2;-1)$ và tạo với đường thẳng Δ một góc lớn nhất.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có $\overrightarrow{n_P} = (2;-1;2)$ là VTPT

Đường thẳng Δ đi qua $B(1;0;-1)$ và có $\vec{u} = (2;1;-1)$ là VTCP.

1. Cách 1: Giả sử $\vec{n} = (a;b;c)$ là VTPT của (Q), suy ra phương trình của (Q) có dạng: $a(x-1) + by + c(z+1) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz - a + c = 0$ (1)

Do $\Delta \subset (Q)$ nên $2a + b - c = 0 \Rightarrow c = 2a + b$.

Do đó:

$$d(A,(Q)) = \frac{\left|2c - b\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\left|4a + b\right|}{\sqrt{5a^2 + 4ab + 2b^2}} = \sqrt{\frac{16a^2 + 8ab + b^2}{5a^2 + 4ab + 2b^2}}$$

Nếu $b = 0 \Rightarrow d(A,(Q)) = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

Nếu $b \neq 0$ thì ta đặt $t = \frac{a}{b}$, ta có: $\frac{16a^2 + 8ab + b^2}{5a^2 + 4ab + 2b^2} = \frac{16t^2 + 8t + 1}{5t^2 + 4t + 2} = f(t)$

Xét hàm số $f(t)$ với $t \in \mathbb{R}$ ta có:

$f'(t) = \frac{24t^2 + 54t + 12}{(5t^2 + 4t + 2)^2}$, $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -2, t = -\frac{1}{4}$

Suy ra $\max f(t) = f(-2) = \frac{7}{2}$, do đó $\max d(A,(Q)) = \frac{\sqrt{14}}{2}$, đạt được khi $a = -2b$

Chọn $b = -1$ ta tìm được $a = 2, c = 3$.

Vậy phương trình $(Q): 2x - y + 3z + 1 = 0$.

Cách 2: Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của A lên Δ và (Q), khi đó $d(A,(Q)) = AH \leq AK$, mà AK không đổi nên $d(A,(Q))$ lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv K$

Dẫn tới (Q) là mặt phẳng đi qua K và nhận $\overrightarrow{AK}$ làm VTPT.

Vì $K \in \Delta \Rightarrow K\left(1 + 2t; t; -1 - t\right) \Rightarrow \overrightarrow{AK} = \left(2t; t + 1; -t - 2\right)$

$AK \perp \Delta \Rightarrow \overrightarrow{AK}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow 4t + t + 1 + t + 2 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow K\left(0; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), \overrightarrow{AK} = \left(-1\right.$

Vậy phương trình $(Q): 2x - y + 3z + 1 = 0$.

2. Cách 1: Tương tự như trên ta có $(Q): ax + by + (2a + b)z + a + b = 0$

Gọi $\alpha = \left((P),(R)\right)$, $0^0 \leq \alpha \leq 90^0$.

Ta có: $\cos\alpha = \frac{|2a - b + 2(2a + b)|}{3\sqrt{a^2 + b^2 + (2a + b)^2}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2 + 12ba + 36a^2}{2b^2 + 4ab + 5a^2}}$.

Nếu $a = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3\sqrt{2}}$

Nếu $a \neq 0$, đặt $t = \frac{b}{a}$ thì ta có: $\frac{b^2 + 12ba + 36a^2}{2b^2 + 4ab + 5a^2} = \frac{t^2 + 12t + 36}{2t^2 + 4t + 5} = f(t)$

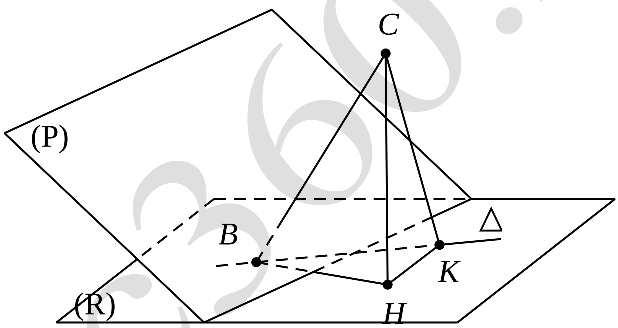
Khảo sát hàm số $f(t)$ ta tìm được $\max f(t) = f(-\frac{7}{10}) = \frac{53}{6}$

Suy ra $\max\{\cos\alpha\}$ đạt được khi $\frac{b}{a} = -\frac{7}{10}$, chọn $b = -7 \Rightarrow a = 10$

Vậy phương trình $(R): 10x - 7y + 13z + 3 = 0$.

Cách 2: Gọi d là đường thẳng đi qua B và vuông góc với (P)

Ta có phương trình $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$, lấy $C(3;-1;1) \in d$, $C \neq B$



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của C lên (R) và Δ, khi đó $\alpha = BCH$ và

$$\sin\alpha = \sin BCH = \frac{BH}{BC} \geq \frac{BK}{BC}.$$

Mà $\frac{BK}{BC}$ không đổi, nên suy ra α nhỏ nhất $\Leftrightarrow H \equiv K$ hay (R) là mặt phẳng đi qua Δ và vuông góc với mặt phẳng (BCK).

Mặt phẳng (BCK) đi qua Δ và vuông góc với (P) nên $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{u}\right] = (-1;6;4)$ là VTPT của (BCK).

Do (R) đi qua Δ và vuông góc với (BCK) nên $\overrightarrow{n_R} = \left[\overrightarrow{n_1}, \vec{u}\right] = (10;-7;13)$ là VTPT của (R), suy ra phương trình của $(R): 10x - 7y + 13z + 3 = 0$.

3. Cách 1: Giả sử phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $ax + by + cz + d = 0$

Do $M, N \in (\alpha)$ nên $\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ -a+2b-c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -\dfrac{3}{2}b \\ c = -a + \dfrac{1}{2}b \end{cases}$

Ta viết lại dạng phương trình của (α) như sau: $2ax + 2by + (b-2a)z - 3b = 0$

Suy ra $\overrightarrow{n_\alpha} = (2a; 2b; b-2a)$ là VTPT của (α). Gọi $\varphi = (\Delta, (\alpha))$

Ta có:

$$\sin\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{n_\alpha}.\vec{u}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|.\left|\vec{u}\right|} = \frac{|4a+2b-b+2a|}{\sqrt{6}.\sqrt{4a^2+4b^2+(b-2a)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{b^2+12ab+36a^2}{5b^2-4ab+8a^2}}$$

Nếu $a = 0 \Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, với $a \neq 0$, đặt $t = \dfrac{b}{a}, t \in \mathbb{R}$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2+12t+36}{5t^2-4t+8}$ ta tìm được $\max f(t) = f\left(\dfrac{5}{8}\right) = \dfrac{53}{9}$.

Do đó $\varphi_{max} \Leftrightarrow \sin\varphi_{max} \Leftrightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{5}{8}$, chọn $b = 5, a = 8$

Vậy phương trình của $(\alpha): 16x + 10y - 11z - 15 = 0$.

Cách 2: Ta có: $\overrightarrow{NM} = (2;-1;2)$ là VTCP của MN, suy ra phương trình đường thẳng $MN: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1-t \\ z = 1+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$. Gọi d là đường thẳng đi qua M, song song với Δ. Suy ra phương trình $d: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+t \\ z = 1-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Trên d ta lấy điểm $A(3;2;0)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên (α) và MN, khi đó $((\alpha),\Delta) = ABH$.

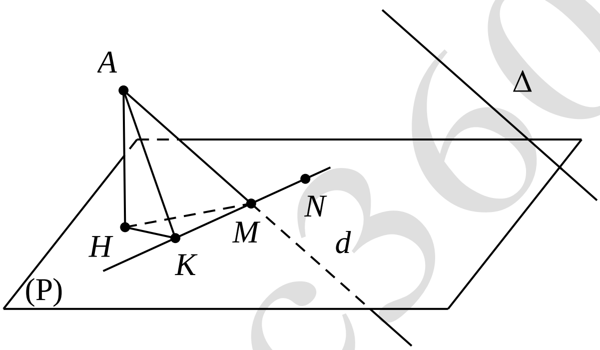
Ta có: $\cos ABH = \dfrac{BH}{BA} \geq \dfrac{BK}{BA}$, mà $\dfrac{BK}{BA}$ không đổi nên ABH lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv K$

Hay (α) là mặt phẳng đi qua MN và vuông góc với mặt phẳng $(\beta) \equiv (MN, d)$

Ta có: $\overrightarrow{n_\beta} = \left[\overrightarrow{NM}, \vec{u}\right] = (-1;6;4)$ là VTPT của (β)

Suy ra $\overrightarrow{n_\alpha} = \left[\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{n_\beta}\right] = (-16;-10;11)$ là VTPT của (α)

Vậy phương trình của $(\alpha): 16x + 10y - 11z - 15 = 0$.



Ví dụ 8.8 Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 3 = 0$ và điểm $A(1;2;3)$. Lập phương trình đường thẳng Δ nằm trong (α) và
1. Δ đi qua $M(1;1;1)$ và khoảng cách từ A đến Δ lớn nhất, nhỏ nhất;
2. Δ đi qua M và khoảng cách giữa Δ và $d: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{-1}$ lớn nhất.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có $\vec{n} = (1;1;1)$ là VTPT

Gọi $\vec{u} = (a;b;c)$ là VTCP của Δ, do $\Delta \subset (P) \Rightarrow a + b + c = 0 \Rightarrow c = -a - b$ (1)

1. Ta có: $\overrightarrow{AM} = (0;-1;-2) \Rightarrow \left[\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right] = (c + 2b; 2a; -a)$

Do đó: $d(A,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{AM}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\sqrt{\dfrac{(c+2b)^2+5a^2}{a^2+b^2+c^2}}=\sqrt{\dfrac{(b-a)^2+5a^2}{a^2+b^2+(a+b)^2}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{b^2-2ab+6a^2}{b^2+2ab+b^2}}$

Nếu $a=0\Rightarrow d(A,\Delta)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, với $a\neq 0$ đặt $t=\dfrac{b}{a},t\in\mathbb{R}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-2t+6}{t^2+t+1}$, khảo sát hàm số $f(t)$ ta tìm được

$\max f(t)=f(-\dfrac{2}{3})=10,\quad \min f(t)=f(4)=\dfrac{2}{3}$

- Khoảng cách từ A đến Δ lớn nhất khi $t=-\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\dfrac{b}{a}=-\dfrac{2}{3}$, chọn $b=-2\Rightarrow a=3,\ c=-1$, suy ra phương trình đường thẳng $:\Delta:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$

- Khoảng cách từ A đến Δ nhỏ nhất khi $t=4\Leftrightarrow\dfrac{b}{a}=4$, chọn $b=4\Rightarrow a=1,\ c=-5$, suy ra phương trình đường thẳng $:\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-5}$.

2. Đường thẳng d đi qua $N(2;0;0)$ và có $\overrightarrow{u_1}=(1;2;-1)$ là VTCP

$\overrightarrow{MN}=\left(1;-1;-1\right),\ \left[\vec{u},\overrightarrow{u_1}\right]=(2a+b;-b;2a-b)\Rightarrow\left[\vec{u},\overrightarrow{u_1}\right].\overrightarrow{MN}=3b$

Do đó

$$d(\Delta,d)=\frac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{u_1}\right].\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{u_1}\right]\right|}=\frac{3|b|}{\sqrt{(2a+b)^2+b^2+(2a-b)^2}}=3\sqrt{\frac{b^2}{4a^2+3b^2}}\leq\sqrt{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=0\Rightarrow c=-b\Rightarrow\vec{u}=b(0;1;-1)$

Vậy phương trình $\Delta:\begin{cases}x=1\\ y=1+t\\ z=1-t\end{cases}$.

Ví dụ 9.8 Lập phương trình đường thẳng d đi qua $A(0;\,-1;\,2)$ và cắt đường thẳng $d':\ \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ sao cho:

1. Khoảng cách từ $B(2;\,1;1)$ đến đường thẳng d là lớn nhất, nhỏ nhất;

2. Khoảng cách giữa d và $\Delta:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{1}$ là lớn nhất.

Lời giải.

Giả sử d cắt d' tại điểm M thì $M(-1+2t;\,t;\,2-t),\ t\in\mathbb{R}$.

$\overrightarrow{AM}=(2t-1;\,t+1;\,-t)$ là VTCP của đường thẳng d.

1. Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;\,2;\,-1)$ nên $\left[\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AM}\right]=(1-t;\,1;\,4-2t)$.

Khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng d là

$$d(B,\,d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AM}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AM}\right|}=\sqrt{\frac{5t^2-18t+18}{6t^2-2t+2}}=\sqrt{f(t)}$$

Ta có $f(t)=\dfrac{5t^2-18t+18}{6t^2-2t+2}$ nên $f'(t)=\dfrac{98t(t-2)}{(6t^2-2t+2)^2}$.

Từ đó ta tìm được $\max f(t)=f(0)=18,\ \min f(t)=f(2)=\dfrac{1}{11}$.

Do đó:

- $\min d(B,\,d)=\dfrac{1}{\sqrt{11}}$ đạt được khi $t=2\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(3;\,3;\,-2)$ nên phương trình đường thẳng cần tìm $d:\ \dfrac{x}{3}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{-2}$.

- $\max d(B,\,d)=3\sqrt{2}$ đạt được khi $t=0\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(-1;1;-1)$ nên phương trình đường thẳng cần tìm $d:\ \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

2. Δ đi qua $N(5;\ 0;\ 0)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta} = (2;\ -2;\ 1)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{u_\Delta},\ \overrightarrow{AM}\right] = (t-1;\ 4t-1;\ 6t)$, $\overrightarrow{AN} = (5;\ 1;\ -2)$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng là:

$$d(\Delta; d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_\Delta},\ \overrightarrow{AM}\right].\overrightarrow{AN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_\Delta},\ \overrightarrow{AM}\right]\right|} = \frac{|-6-3t|}{\sqrt{(t-1)^2+(4t-1)^2+(6t)^2}}$$

$$= 3.\sqrt{\frac{(2+t)^2}{53t^2-10t+2}} = 3.\sqrt{f(t)},\ f(t) = \frac{(2+t)^2}{53t^2-10t+2}.$$

Vì $f'(t) = \dfrac{6(t+2)(4-37t)}{(53t^2-10t+2)^2}$ nên $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -2,\ t = \dfrac{4}{37}$.

Từ đó ta tìm được $\max f(t) = f\left(\dfrac{4}{37}\right)$, khi đó $\overrightarrow{AM} = -\dfrac{1}{37}\left(29;\ -41;\ 4\right)$.

Vậy đường thẳng d có phương trình là $d:\ \dfrac{x}{29} = \dfrac{y+1}{-41} = \dfrac{z-2}{4}$.

CÁC BÀI TOÁN DÀNH CHO HỌC SINH ÔN THI ĐẠI HỌC

Bài 1

1. Trong không gian $Oxyz$ cho 2 điểm $A(-1;3;-2), B(-3;7;-18)$ và mặt phẳng $(P):\ 2x-y+z+1=0$.

a) Viết phương trình mặt phẳng chứa AB và vuông góc với (P).

b) Tìm toạ độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất.

2. Trong không gian với hệ tọa độ Đề Các vuông góc $Oxyz$ cho tứ diện $ABCD$ với $A(2;3;2)$, $B(6;-1;-2)$, $C(-1;-4;3)$, $D(1;6;-5)$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD. Tìm tọa độ M trên CD sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất.

3. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $x-2y+2z-5=0$ và hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$. Trong các đường thẳng đi qua A và song song với (P), hãy viết phương trình đường thẳng mà khoảng cách từ B đến đường thẳng đó là nhỏ nhất.

4. Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;4;9)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác gốc tọa độ) sao cho

a) Thể tích khối tứ diện $OABC$ có giá trị nhỏ nhất.
b) $OA + OB + OC$ đạt giá trị nhỏ nhất.
5. Cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-8}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ và các điểm $A(-3;\ 4;\ 1)$, $B(1;\ 6;\ -1)$, $C(1;\ 10;\ 3)$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho
a) $MA + MB$ nhỏ nhất.
b) $MA + MC$ nhỏ nhất.
Bài 2
1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ, $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;b)$ với $(a>0, b>0)$. Gọi M là trung điểm của CC'.
a) Tính thể tích của khối tứ diện $BDA'M$.
b) Cho $a+b=4$. Tìm $\max V_{A'BDM}$.
2. Cho các điểm $A(3;-1;0), B(2;1;-1), C(3;2;6)$.
a) Tìm điểm D thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $ABCD$ là tứ diện có các cặp cạnh đối vuông góc.
b) Tìm điểm M trên trục hoành sao cho tam giác ABM có diện tích nhỏ nhất.
3. Cho hai điểm $A(5;2;3), B(-1;-2;-1)$.
a) Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại M. Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số nào?
b) Tìm tọa độ điểm N trên mặt phẳng (Oxz) sao cho $NA + NB$ có giá trị nhỏ nhất.
c) Cho điểm K có các thành phần tọa độ bằng nhau. Xác định K biết rằng $2KA^2 - 3KB^2$ đạt giá trị lớn nhất
4. Cho $A(1;\ -1;\ 2)$, mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-4}{-3}$. Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm A đồng thời
a) $d // (P)$ và khoảng cách giữa d và Δ là lớn nhất.
b) $d // (P)$ và góc giữa d và Δ là lớn nhất, bé nhất.
c) d vuông góc với đường thẳng $d': \begin{cases} x = -1+t \\ y = 3+t \\ z = -1+t \end{cases}$ $(t \in R)$ và khoảng cách từ điểm $B(-1;\ 1;\ -1)$ đến đường thẳng d là lớn nhất, bé nhất.

Bài 3 Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$ và ba điểm $A(3;2;-1)$, $B(1;-2;1)$, $C(2;1;3)$. Tìm $M \in \Delta$ sao cho:

1. $MA + MB$ nhỏ nhất **2.** $MA + MC$ nhỏ nhất.

Bài 4 Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua $M\left(1;4;9\right)$ sao cho (α) cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại 3 điểm A, B, C thỏa:

1. M là trọng tâm tam giác ABC;
2. Tứ diện $OABC$ có thể tích lớn nhất;
3. Khoảng cách từ O đến (ABC) lớn nhất;
4. $OA + OC = 4OB$ và $OA = OB + 9$.

Bài 5 Cho $A\left(a;0;0\right)$, $B\left(0;b;0\right)$, $C\left(0;0;c\right)$ với $a,b,c > 0$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$

1. Tìm tâm và bán kính R mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Tìm giá trị nhỏ nhất của bán kính R.

2. Gọi r là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{4} < r \le \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}$.

Bài 6 Cho các điểm $A(1;\ 0;-1), B(2;\ -2;\ 1), C(0;\ -1;\ 0)$.

1. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 6 = 0$ sao cho :$\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2. Tìm M thuộc mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \frac{57}{2}$ sao cho : $\left|2\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 7

1. Cho mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 12y + 12z + 72 = 0$ và mặt cầu $(S_2):\ x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0.$ Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường nối tâm của hai mặt cầu (S_1) và (S_2), tiếp xúc với hai mặt cầu đó và có bán kính lớn nhất

2. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm điểm $\mathrm{A}(3;-2;1)$ và cắt đường thẳng $d: \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$ sao cho

a) Khoảng cách từ $B(2;1;-1)$ đến Δ là lớn nhất, bé nhất.

b) Khoảng cách giữa Δ và $\Delta': \begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=-1+2t \end{cases} \quad (t \in R)$ lớn nhất.

c) Góc giữa Δ và mặt phẳng $(P): 5x+2y-3z+8=0$ lớn nhất.

Bài 8. Cho $d: \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-1}$ và $d': \frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$, $(Q): x+2y+2z-3=0$. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và

1. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) nhỏ nhất.

2. Góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d' lớn nhất.

Bài 9 Trong không gian cho hai điểm $A(1;4;2)$, $B(-1;2;4)$ và đường thẳng: $d: \frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$.

1. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất.

2. Viết phương trình (Q) chứa d vào tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc nhỏ nhất.

3. Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa d và tạo với Oy một góc lớn nhất.

Bài 10

Cho các điểm $A(1;-1;2)$, $B(-2;1;0)$, $C(2;0;1)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $2x-y-z+3=0$. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho

1. $MA+MB$ có giá trị nhỏ nhất

2. $|MA-MC|$ có giá trị lớn nhất.

3. $MA+MC$ có giá trị nhỏ nhất

4. $|MA-MB|$ có giá trị lớn nhất.

Bài 11.

1. Cho $O(0;\ 0;\ 0)$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{1}$, đường thẳng $d': \dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$. Lập phương trình đường thẳng d qua O, vuông góc với Δ và cách d' khoảng lớn nhất.

2. Cho các điểm $A(4;\ 1;\ 2)$, $B(1;\ 4;\ 2)$, $C(1;\ 1;\ 5)$ và đường tròn (C) là giao của mặt phẳng $(P): x+y+z-7=0$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z-3=0$. Tìm tọa độ điểm $M\in(C)$ sao cho $MA+MB+MC$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 12. Cho các điểm A,B,C lần lượt nằm trên các trục $Ox,\ Oy,\ Oz$ (khác gốc tọa độ). Lập phương trình mặt phẳng (ABC) biết

1. Điểm $G(-2;3;1)$ là trọng tâm của tam giác ABC.

2. Điểm $H(5;-3;-2)$ là trực tâm của tam giác ABC.

3. Mặt phẳng (ABC) qua $M(1;-2;3)$ và $d(O,(ABC))$ lớn nhất.

4. Mặt phẳng (ABC) qua $N(1;2;3)$ và $OA=OB=OC$.

5. Mặt phẳng (ABC) qua $P(3;2;1)$, điểm A có hoành độ bằng -2 đồng thời $OB=1+2OC$.

Bài 13. Cho mặt phẳng $(P): x-y+z+1=0$ và ba điểm $A(1;1;1)$, $B(0;1;2), C(-2;0;1)$.

1. Tìm tọa độ điểm M có tung độ bằng 1, nằm trong mặt phẳng (P) và thỏa mãn $MA=MB$.

2. Tìm điểm N thuộc mặt phẳng (P) sao cho $2NA^2+NB^2+NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 14.

1. Cho mặt phẳng $(P): x+2y-z-1=0$ và các điểm $A(1;\ 0;0)$, $B(0;\ 2;\ -3)$. Lập phương trình đường thẳng d nằm trong (P), đi qua A và cách B một khoảng lớn nhất, nhỏ nhất?.

2. Lập phương trình đường thẳng d đi qua $A(1;\ -1;\ 2)$, song song với mặt phẳng $(Q):\ 2x-y-z+3=0$, đồng thời d tạo với đường thẳng $d': \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{2}$ một góc nhỏ nhất, lớn nhất?.

3. Lập phương trình đường thẳng d đi qua $A(-1;\,0;\,-1)$ và cắt đường thẳng $d':\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{-1}$ sao cho góc giữa đường thẳng d và đường thẳng $\Delta:\ \frac{x-3}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{2}$ là lớn nhất, nhỏ nhất?

Bài 15. Cho đường thẳng $d:\ \frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$ và điểm $A(1;\,4;\,2)$, $B(-1;\,2;\,4)$. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và

1. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) là lớn nhất.

2. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (xOy) là nhỏ nhất.

3. Góc giữa mặt phẳng (P) và trục Oy là lớn nhất.

Chú ý: Trong không gian cho n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$.

1. Tìm M sao cho $P=\alpha_1 MA_1^2+\alpha_2 MA_2^2+...+\alpha_n MA_n^2$

a) Nhỏ nhất khi $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n>0$

b) Lớn nhất khi $\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n<0$

2. Tìm M sao cho $P=\left|\alpha_1\overrightarrow{MA_1}+\alpha_2\overrightarrow{MA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{MA_n}\right|$ nhỏ nhất hoặc lớn nhất , trong đó $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$.

Phương pháp giải:

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\alpha_1\overrightarrow{IA_1}+\alpha_2\overrightarrow{IA_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$ điểm I tồn tại và duy nhất nếu $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\neq 0$. Khi đó :

1. $P=\alpha_1\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_1}\right)^2+\alpha_1\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_2}\right)^2+...+\alpha_1\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA_n}\right)^2$

$$=(\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n)IM^2+\sum_{i=1}^{n}\alpha_1 IA_i^2$$

Do $\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 IA_i^2$ không đổi nên:

- Nếu $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n > 0$ thì P nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất
- Nếu $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n < 0$ thì P lớn nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất

2. $P = \left|\alpha_1\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1}\right) + \alpha_2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2}\right) + ... + \alpha_n\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n}\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right|.MI$

Do đó P nhỏ nhất hoặc lớn nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất hoặc lớn nhất.

• Nếu M thuộc đường thẳng Δ (hoặc mặt phẳng (P)) thì MI lớn nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên Δ (hoặc (P)).

• Nếu M thuộc mặt cầu (S) và đường thẳng đi qua I và tâm của (S), cắt (S) tại hai điểm A, B ($IA > IB$) thì MI nhỏ nhất (lớn nhất) $\Leftrightarrow M \equiv B$ ($M \equiv A$).

Ví dụ 10.8 Cho $(P): x - y + z + 1 = 0$ và ba điểm $A(1;1;1), B(0;1;2)$, $C(-2;0;1)$.

1. Tìm tọa độ điểm $M \in (P)$ sao cho $MA = MB$ và $y_M = 1$;

2. Tìm $N \in (P)$ sao cho $S = 2NA^2 + NB^2 + NC^2$ nhỏ nhất.

Lời giải.

1. Gọi $M(x;1;z) \in (P)$, ta có: $x - 1 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -z$

Suy ra

$MA = MB \Leftrightarrow (x-1)^2 + (z-1)^2 = x^2 + (z-2)^2 \Leftrightarrow -2x - 2z + 2 = -4z + 4$

$\Leftrightarrow z = \frac{1}{2}; x = -\frac{1}{2}$. Vậy $M(-\frac{1}{2};1;\frac{1}{2})$.

2. Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ (*)

Ta có:

$2\overrightarrow{IA} = (2-2x;2-2y;2-2z)$, $\overrightarrow{IB} = (-x;1-y;2-z)$, $\overrightarrow{IC} = (-2-x;-y;1-z)$

Nên $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} -4x = 0 \\ 3 - 4y = 0 \\ 5 - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0, y = \frac{3}{4}, z = \frac{5}{4}$. Suy ra $I\left(0;\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$

Khi đó: $2\overrightarrow{NA}^2 = 2\left(\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 = 2NI^2 + 2IA^2 + 4\overrightarrow{NI}.\overrightarrow{IA}$

$\overrightarrow{NB}^2 = NI^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{NI}.\overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{NC}^2 = NI^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{NI}.\overrightarrow{IC}$

Do đó

$S = 4NI^2 + 2IA^2 + IB^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{NI}\left(2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right) = 4NI^2 + 2IA^2 + IB^2 + IC^2$

Do $2IA^2 + IB^2 + IC^2$ không đổi nên S nhỏ nhất khi và chỉ khi NI nhỏ nhất hay N là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

Gọi $N(x;y;z) \Rightarrow \overrightarrow{IN} = \left(x; y - \frac{3}{4}; z - \frac{5}{4}\right)$, $\vec{n} = (1;-1;1)$ là VTPT của (P)

Vì $N \in (P) \Rightarrow x - y + z + 1 = 0$ (1)

Do $IN \perp (P)$ nên $\overrightarrow{IN} = k\vec{n} \Rightarrow \begin{cases} x = k \\ y = \frac{3}{4} + k \\ z = \frac{5}{4} + k \end{cases}$ thay vào (1), ta có được:

$$k - \left(\frac{3}{4} + k\right) + \left(\frac{5}{4} + k\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}, y = -\frac{3}{4}, z = -\frac{1}{4}$$

Vậy $N\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; -\frac{1}{4}\right)$.

Ví dụ 11.8 Trong không gian cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(-1;0;-3)$, $C(2;-3;-1)$

1. Tìm M thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - 2z - 1 = 0$ sao cho biểu thức sau nhỏ nhất $S = 3MA^2 + 4MB^2 - 6MC^2$;

2. Tìm M thuộc đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$ sao cho biểu thức sau lớn nhất: $P = \left|\overrightarrow{MA} - 7\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC}\right|$;

3. Tìm M thuộc mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-8)^2 = 36$ sao cho biểu thức $F = MA^2 - 4MB^2 + 2MC^2$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

1. Cách 1:

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn: $3\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}-6\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}=6\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$ (*)

Mà $\overrightarrow{IA}=(1-x;2-y;3-z),6\overrightarrow{AC}=(6;-30;-24),4\overrightarrow{AB}=(-8;-8;-24)$

Do đó (*) $\Leftrightarrow\begin{cases}1-x=6+8\\2-y=-30+8\\3-z=-24+24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-13\\y=24\\z=3\end{cases}\Rightarrow I(-13;24;3)$

Khi đó:

$S=3\overrightarrow{MA}^2+4\overrightarrow{MB}^2-6\overrightarrow{MC}^2=3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2-6\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$=IM^2+2\overrightarrow{MI}\left(3\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}-6\overrightarrow{IC}\right)+3IA^2+4IB^2-6IC^2$

$=IM^2+3IA^2+4IB^2-6IC^2.$

Do $3IA^2+4IB^2-6IC^2$ không đổi nên S nhỏ nhất $\Leftrightarrow IM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình

chiếu của I lên (α). Ta có $IM\perp(\alpha)\Rightarrow IM:\begin{cases}x=-13+2t\\y=24+t\\z=3-2t\end{cases}$

Tọa độ của M là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x=-13+2t\\y=24+t\\z=3-2t\\2x+y-2z-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-11\\y=25\\z=1\end{cases}$

Vậy $M(-11;25;1)$ là điểm cần tìm.

Cách 2: Gọi $M(a;b;c)\in(\alpha)\Rightarrow 2a+b-2c-1=0$

Suy ra: $3MA^2=3a^2+3b^2+3c^2-6a-12b-18c+42$

$4MB^2=4a^2+4b^2+4c^2+8a+24c+40$

$6MC^2=6a^2+6b^2+6c^2-24a+36b+12c+84$

Suy ra $S=a^2+b^2+c^2+26a-48b-6c-2$

$$= (a+11)^2 + (b-25)^2 + (c-1)^2 + 4a + 2b - 4c - 749$$

$\geq 2(2a+b-2c-1) - 747 \geq -747$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = -11, b = 25, c = 1$ hay $M(-11;25;1)$ là điểm cần tìm

2. Cách 1: Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn:

$$\overrightarrow{IA} - 7\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -7\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC} \quad (*)$$

Mà $\overrightarrow{IA} = \left(1-x; 2-y; 3-z\right)$, $-7\overrightarrow{AB} = (14;14;42)$, $5\overrightarrow{AC} = (5;-25;-20)$

Nên $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = 14+5 \\ 2-y = 14-25 \\ 3-z = 42-20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -18 \\ y = 13 \\ z = -19 \end{cases} \Rightarrow I(-18;13;-19)$

Khi đó: $P = \left|\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} - 7\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) + 5\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)\right| = MI$

Do đó P nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên Δ

$M \in \Delta \Rightarrow M\left(1+2t; -1+3t; 1-t\right) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (2t+19; 3t-14; -t+20)$

Vì $IM \perp \Delta \Rightarrow 2(2t+19) + 3(3t-14) - (-t+20) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{12}{7}$

Vậy $M\left(\frac{31}{7}; \frac{29}{7}; -\frac{5}{7}\right)$ là điểm cần tìm.

Cách 2: Ta có $M \in \Delta \Rightarrow M\left(1+2t; -1+3t; 1-t\right)$

Suy ra $\overrightarrow{MA} = \left(-2t; 3-3t; 2+t\right)$, $-7\overrightarrow{MB} = \left(14+14t; -7+21t; 28-7t\right)$

$5\overrightarrow{MC} = \left(5-10t; -10-15t; -10+5t\right)$

Do đó $\overrightarrow{MA} - 7\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC} = \left(2t+19; 3t-14; -t+20\right)$

Nên $P^2 = (2t+19)^2 + (3t-14)^2 + (t-20)^2 = 14t^2 - 48t + 957$

$= 14\left(t - \frac{12}{7}\right)^2 + \frac{6411}{7} \geq \frac{6411}{7}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow t = \frac{12}{7}$. Vậy $M\left(\frac{31}{7};\frac{29}{7};-\frac{5}{7}\right)$ là điểm cần tìm.

3. Gọi $E(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn:

$\overrightarrow{EA} - 4\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{EA} = 2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}$

Ta tìm được $E\left(10;-2;16\right)$.

Khi đó $F = -EM^2 + EA^2 - 4EB^2 + 2EC^2$

Vì $EA^2 - 4EB^2 + 2EC^2$ không đổi nên F lớn nhất, nhỏ nhất khi và chỉ khi EM nhỏ nhất, lớn nhất.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;2;8)$, $\overrightarrow{IE} = \left(8;-4;8\right) \Rightarrow IE: \begin{cases} x = 2+8t \\ y = 2-4t \\ z = 8+8t \end{cases}$

Tọa độ các giao điểm của IE với mặt cầu (S) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 2+8t \\ y = 2-4t \\ z = 8+8t \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-8)^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow 8^2t^2 + 4^2t^2 + 8^2t^2 = 36 \Leftrightarrow t = \pm\frac{1}{2}.$$

- $t = \frac{1}{2} \Rightarrow M\left(6;0;12\right) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (2;-2;4) \Rightarrow MI = 2\sqrt{6}$
- $t = -\frac{1}{2} \Rightarrow N\left(-2;4;4\right) \Rightarrow \overrightarrow{IN} = (-4;2;4) \Rightarrow NI = 6$

Do $NI > MI$ nên ta có được:

- F lớn nhất khi và chỉ khi $E \equiv M \Rightarrow E\left(6;0;12\right)$
- F nhỏ nhất khi và chỉ khi $E \equiv N \Rightarrow E\left(-2;4;4\right)$.

CÁC BÀI TOÁN DÀNH CHO HỌC SINH ÔN THI ĐẠI HỌC

Bài 1 Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;3;1)$, $B(-1;-2;0)$, $C(1;2;-2)$.

1. Lập phương trình mặt phẳng (ABC);
2. Tìm a,b để mặt phẳng $(\alpha):(2a+b)x+(3a+2b)y-1z+1=0$ song song với (ABC);
3. Tìm $M\in(\beta):3x+y-z+1=0$ sao cho $S=2MA^2+4MB^2-3MC^2$ nhỏ nhất;
4. Tìm $N\in(\gamma):3x+3y-z-29=0$ sao cho $P=\left|3\overrightarrow{NA}-5\overrightarrow{NB}+7\overrightarrow{NA}\right|$ nhỏ nhất.

Bài 2 Cho các điểm $A(-2;3;1)$, $B(5;-2;7)$, $C(1;8;-1)$. Tìm tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn

1. $MA^2+MB^2=MC^2$ **2**. $\left|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}\right|$

Bài 3 Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1;\ 4;\ 5)$, $B(0;\ 3;\ 1)$, $C(2;\ -1;\ 0)$ và mặt phẳng $(P):\ 3x-3y-2z-15=0$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho

1. $MA^2+MB^2+MC^2$ có giá trị nhỏ nhất.

2. $MA^2+2MB^2-4MC^2$ có giá trị lớn nhất.

Bài 4 Cho $A(1;\ 4;\ 2), B(-1;\ 2;\ 4)$ và $\Delta:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{2}$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho

1. MA^2+MB^2 nhỏ nhất

2. $\left|3\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{AM}-4\overrightarrow{BM}\right|$ nhỏ nhất.

3. Diện tích tam giác MAB nhỏ nhất.

Bài 5 Cho tam giác ABC có $\mathrm{A}(3;-2;5)$, $\mathrm{B}(-2;1;-3)$, $\mathrm{C}(5;1;-1)$. Điểm M có các thành phần tọa độ bằng nhau.
1. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác nhọn.
2. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{\mathrm{MA}}+3\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

3. Tìm điểm M sao cho $2\mathrm{MA}^2+\mathrm{MB}^2-4\mathrm{MC}^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 6. Cho ba điểm $\mathrm{A}(1;2;-3),\mathrm{B}(2;4;5),\mathrm{C}(3;6;7)$ và mặt phẳng $(\mathrm{P}):x+y+z-3=0$.

1. Tìm tọa độ hình chiếu trọng tâm G của tam giác ABC trên mặt phẳng (P).

2. Tìm tọa độ điểm G' đối xứng với điểm G qua mặt phẳng (P).

3. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho biểu thức T có giá trị nhỏ nhất với $T = MA^2 + MB^2 + MC^2$.

Bài 7.

1. Cho các điểm $A(1;\ 0;\ -1), B(0;\ 2;\ 3),\ C(-1;\ 1;\ 1)$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{2}$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho

a) $MA^2 + 2MB^2 - 4MC^2$ lớn nhất.

b) $\left|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC}\right|$ nhỏ nhất.

Bài 8. Cho đường thẳng $\Delta_m : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = (1-m)t \quad (t \in \mathbb{R}), \\ z = -2 + mt \end{cases}$ m là tham số.

Tìm giá trị của m sao cho

1. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến Δ_m là lớn nhất, nhỏ nhất.

2. Δ_m tạo với mặt phẳng (xOy) một góc lớn nhất.

3. Khoảng cách giữa Δ_m và trục Oy lớn nhất.