***Chuyên đề nâng cao 1***

**PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ**

 **BẰNG MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP KHÁC**

**A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

 Chúng ta đã biết ba phương pháp để phân tích một đa thức thành nhân tử là đặt nhân tử chung, dùng hằng đẳng thức, nhóm các hạng tử và phối hợp ba phương pháp đó. Tuy nhiên có những đa thức mặc dù rất đơn giản, nếu chỉ biết dùng ba phương pháp đó thôi thì không thể phân tích thành nhân tử được.

 Chẳng hạn đa thức . Nếu là  thì dùng phương pháp hằng đẳng thức phân tích được dễ dàng nhưng ở đây giữa  và  là dấu +. Một đa thức khác như  cũng vậy. Phương pháp đặt nhân tử chung không dùng được vì cả ba hạng tử không có nhân tử chung. Phương pháp dùng hằng đẳng thức thì không thích hợp vì không thuộc một dạng hằng đẳng thức nào. Còn phương pháp nhóm các hạng tử cũng không dùng được, vì muốn dùng phương pháp này thì đa thức phải có từ bốn hạng tử trở lên.

 Do đó trong chuyên đề này chúng ta sẽ xét thêm một số phương pháp khác để phân tích đa thức thành nhân tử.

**B. MỘT SỐ VÍ DỤ**

**1. Phương pháp tách một hạng tử thành nhiều hạng tử.**

**Ví dụ 28.** Phân tích đa thức A thành nhân tử

A = 

***Giải***

* Cách 1 :

Tách hạng tử cuối thành hai hạng tử rồi nhóm lại và dùng phương pháp hằng đẳng thức để phân tích :

 

 

 

* Cách 2 :

Tách hạng tử -4x thành hai hạng tử rồi nhóm lại và dùng phương pháp đặt nhân tử chung để phân tích.

 

 

Cơ sở của phương pháp tách các hạng tử là tách một hạng tử thành nhiều hạng tử để có thể đặt nhân tử chung theo từng nhóm hoặc dùng hằng đẳng thức :

*Nhận xét :* Trong cách tách thứ hai ta đã tách -4x thành -10x + 6x và được

Ta nhận thấy các hệ số của chúng tỉ lệ với nhau :

  hay 4.(-15) = (-10).6

 Nếu tách hạng tử bậc nhất thành hai hạng tử thoả mãn điều kiện trên, thì sau khi đặt nhân tử chung theo từng nhóm, kết quả lại xuất hiện nhân tử chung và ta tiếp tục phân tích đến kết quả cuối cùng.

 *Tổng quát :* Đối với tam thức bậc hai  ta có thể tách hạng tử bậc nhất bx thành hai hạng tử  và  sao cho :

 

 Khi đó đa thức  có thể phân tích được thành nhân tử bằng cách đặt nhân tử chung theo từng nhóm.

 Điều kiện để đa thức phân tích được thành tích của hai nhị thức bậc nhất là biểu thức là một số chính phương.

Trong ví dụ 28 thì 

**Ví dụ 29**. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :



***Giải***



Trên đây ta đã xét đối với các tam thức bậc hai. Còn đối với đa thức có bậc lớn hơn hai thì tuỳ theo đặc điểm của các hệ số mà lựa chọn cách tách cho phù hợp.

**Ví dụ 30.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

 

***Giải :*** Ta tách hệ số 3 thành -1 + 4 :



 *Cách khác :* Nhẩm nghiệm rồi dùng hệ quả của định lí Bê - du : Dễ thấy x = 1 là nghiệm của đa thức A nên theo hệ quả của định lí Bê-du ta có



Ta sẽ tách các hạng tử với định hướng là sau khi đặt nhân tử chung theo từng nhóm thì nhóm nào cũng xuất hiện nhân tử x - 1. Vì thế ta sẽ tách như sau :

 

 Như vậy nếu một đa thức có nghiệm x = a thì ta có thể phân tích đa thức ấy thành nhân tử bằng phương pháp tách các hạng tử sao cho khi đặt nhân tử chung theo từng nhóm thì nhóm nào cũng có nhân tử x - a.

 Dựa vào các nhận xét sau ta có thể nhẩm được nghiệm nguyên, nghiệm hữu tỉ của đa thức f(x) với hệ số nguyên.

**1.** Nếu đa thức có nghiệm nguyên thì nghiệm nguyên đó phải là ước của hệ số tự do.

 Đặc biệt:

* Nếu tổng các hệ số của đa thức bằng 0 thì x = 1 là nghiệm của đa thức.
* Nếu tổng các hệ số bậc lẻ bằng tổng các hệ số bậc chẵn thì x = -1 là nghiệm của đa thức.

Chẳng hạn đa có :

x = 1 là nghiệm vì tổng các hệ số 1 - 3 - 1 + 3 = 0 ;

x = -1 là nghiêm vì tổng các hệ số bậc lẻ bằng các hệ số bậc chẵn :

 1 + (-1) = (-3) + 3 ;

x = 3 là nghiệm vì 

Hệ số tự do còn có ước là -3, nhưng ta không cần thử với -3 vì một đa thức bậc ba không quá ba nghiệm.

**2**. Nếu đa thức có nghiệm hữu tỉ thì nghiệm đó có dạng  với (p, q) = 1 trong đó p là ước của hạng tử tự do ; q là ước dương của hệ số cao nhất.

 Chẳng hạn đa thức Ta thấy các giá trị nguyênx = ±1 ; x = ±2 đều không phải là nghiệm.

 Thử lại các giá trị hữu tỉ x = ±  (±1 là ước của hạng tử tự do ; 2 là ước dương của hê số cao nhất) ta thấy x = -  không phải là nghiêm còn x =  là nghiệm của đa thức vì

 

Do đó  hay f(x) = (2x - 1) . g(x)

**Ví dụ 32.** Phân tích đa thức sau thành nhân tử



***Giải.***

 Ta sẽ tách các hạng tử với định hướng là sau khi đặt nhân tử chung theo từng nhóm thì nhóm nào cũng xuất hiện nhân tử 2x - 1. Vì thế ta sẽ tách như sau :



**2. Phương pháp thêm bớt cùng một hạng tử**

**Ví dụ 33.** Phân tích đa thức sau thành nhân tử : 

***Giải***

Ta thấy có dạng . Vì vậy có thể thêm bớt hạng tử 2ab để xuất hiện hằng đẳng thức.



**Ví dụ 34.** Phân tích đa thửc sau thành nhân tử : 

 ***Giải.***

 Ta thấy đa thức đã cho là đa thức bậc 5. Đa thức này khuyết các hạng tử bậc 4, bậc 3, bậc 2. Vì vậy có thể chọn thêm bớt hạng tử có bậc bị khuyết. Hợp lí hơn cả là thêm bớt hạng tử bậc 2.



***Nhận xét:*** Có hai cơ sở để thêm bớt cùng một hạng tử :

* Thêm bớt để có thể dùng hằng đẳng thức.
* Thêm bớt các hạng tử bị khuyết trong đa thức để có thể đặt nhân tử chung hoặc dùng hằng đẳng thức.

**3. Phương pháp đổi biến**

**Ví dụ 35.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

  

***Giải***

a) Ta đặt 

Khi đó 

Thay trở lại ta được 

 

b) Ta đặt x - y = a; y - z = b; z - x = c

thì a + b + c = (x - y) + (y - z) + (z - x) = 0.

Ta được  (xem ví dụ 10).

Do đó 

 ***Nhận xét:*** Trong ví dụ trên nếu ta khai triển đa thức, thu gọn rồi phân tích thì sẽ được một đa thức bậc cao khó phân tích. Phương pháp đổi biến như trên đưa một biểu thức phức tạp thành một biểu thức đơn giản dễ phân tích.

**4. Phương pháp đồng nhất hệ số**

**Ví dụ 36**. Phân tích đa thức A thành tích của hai tam thức bậc hai với hệ số nguyên :



***Giải.***

Sau khi phân tích thì A có dạng

 hoặc 

(trường hợp hai hạng tử đầu của mỗi tam thức là  và  thì ta chỉ cần đổi dấu của hai tam thức).

* Xét trường hợp 

Khai triển rồi thu gọn ta được



Vậy với mọi x.

Suy ra 

Từ (1) và (3) ta suy ra a = -5 ; b = 1. Đẳng thức (2) cũng được thoả mãn.

Vậy 

* Xét trường hợp thứ hai: cũng giải như trên ta thấy không có a và b nào thoả mãn. Vậy bài toán chỉ có một đáp số như trên.

**5. Phương pháp xét giá trị riêng của các biến**

**Ví dụ 37.** Phân tích đa thức sáu thành nhân tử

P = xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x)

***Giải.***

 Nếu thay x bởi y thì p = 0 + yz(y - z) + zy(z - y) = 0 Do đó P chứa nhân tử (x - y).

 Tương tự, P cũng chứa các nhân tử (y - z) và (z - x).

 Vậy P = k.(x - y)(y - z)(z - x).

 Ta thấy P là một đa thức bậc ba đối với tập hợp các biến x, y, z.

 Tích (x - y)(y - z)(z - x) cũng có bậc ba đối với tập hợp các biến x, y, z nên k phải là hằng số.

 Đẳng thức xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x) = k(x - yXy - z)(z - x) đúng với mọi X, y, z nên ta gán cho X, y, z các giá trị riêng chẳng hạn x = 1; y = -1; z = 0 ta được

(-1)(1 + 1) = k(2).(-1)(-1) hay 2k = -2, do đó k = -1.

 Vậy P = (-1).(x - y)(y - z)(z - x) hay P = (x - y)(y - z)(x - z).

 Đến đây ta đã có 5 phương pháp khác dể phân tích đa thức thành nhân tử trong đó ba phương pháp đầu (tách các hạng tử, thêm bớt một hạng tử và đổi biến) là những phương pháp hay dùng. Các bạn cố gắng nắm thật vững để vận dụng cho tốt.

**C. BÀI TẬP**

**1.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

 

**2.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :



**3.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) M = ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + 3abc ;

b) N = ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a) + 2abc.

**4.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử



**5.** Tìm tất cả các giá trị tự nhiên của x để biểu thức có giá trị là một số nguyên tố.

 **6.** Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

 

 **7.** Phân tích đa thức sau thành nhân tử



**8.** Cho đa thức 

Hãy phân tích A thành tích của hai tam thức bậc hai với hệ số nguyên và các hệ số cao nhất đều dương.

**9.** Cho đa thức Hãy phân tích B thành tích của hai đa thức với hộ số nguyên : Một đa thức bậc hai và một đa thức bậc ba biết các hệ số cao nhất và thấp nhất đều dương và đa thức bậc ba khuyết hạng tử bậc hai.

**10.** Phân tích đa thức sau thành nhân tử

 Q = bc(b + c) + ac(c - a) - ab(a + b).