BÀI 4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Đường tiệm cận ngang

ĐỊNH NGHĨA

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên một khoảng vô hạn (là khoảng dạng $(a;+\infty),(-\infty;b)$ hoặc $(-\infty;+\infty)$). Đường thẳng $y = y_0$ là đường **tiệm cận ngang** (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_0,\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0.$$

Nhận xét: Như vậy để tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số ta chỉ cần tính giới hạn của hàm số đó tại vô cực.

2. Đường tiệm cận đứng

ĐỊNH NGHĨA

Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường **tiệm cận đứng** (hay tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty.$$

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

1. Một vài quy tắc về giới hạn vô cực

a) Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x)g(x)$

Nếu $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ (hoặc $-\infty$) thì $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$ được tính theo quy tắc cho trong bảng sau:

$\lim_{x\to x_0} f(x)$	$\lim_{x\to x_0} g(x)$	$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

b) Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L>0$	0	$+$	$+\infty$
		$-$	$-\infty$
$L<0$		$+$	$-\infty$
		$-$	$+\infty$

(Dấu của $g(x)$ xét trên một khoảng K nào đó đang tính giới hạn, với $x \neq x_0$)

CHÚ Ý

Các quy tắc trên vẫn đúng cho các trường hợp $x \to x_0^{+}, x \to x_0^{-}, x \to +\infty$ và $x \to -\infty$.

Ví dụ 1. Tìm $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^3 - 2x)$.

Giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^3 - 2x) = \lim\limits_{x\to -\infty} x^3\left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right) = -\infty$.

Vì $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3 = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right) = 1 > 0$.

Ví dụ 2. Tìm $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3 - 5x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$.

Giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3 - 5x^2 + 1}{x^2 - x + 1} = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(x.\dfrac{2 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}\right) = +\infty$.

Vì $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ và $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = 2 > 0$.

Ví dụ 3. Tìm $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-3}{x-1}$.

Giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0, x-1>0$ với mọi $x>1$ và $\lim\limits_{x\to 1^+}(2x-3)=-1<0$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-3}{x-1}=-\infty$.

Ví dụ 4. Tìm $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-3}{x-1}$.

Giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0, x-1<0$ với mọi $x<1$ và $\lim\limits_{x\to 1^+}(2x-3)=-1<0$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-3}{x-1}=+\infty$.

2. **Sử dụng máy tính cầm tay để tính giới hạn**

Ý tưởng giả sử cần tính $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ta dùng chức năng CALC để tính giá trị của $f(x)$ tại các giá trị của x rất gần *a*.

a) Giới hạn của hàm số tại một điểm

+ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x=a+10^{-9}$.

+ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x=a-10^{-9}$.

+ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x=a+10^{-9}$ hoặc $x=a-10^{-9}$.

b) Giới hạn của hàm số tại vô cực

+ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x=10^{10}$.

+ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ thì nhập $f(x)$ và CALC $x=-10^{10}$.

Ví dụ 1. Tìm $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$.

Giải.

Nhập biểu thức $\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$.

Ấn `r` máy hỏi X? ấn `1+10^p9=` máy hiện 4.

Nên $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}=4$.

Ví dụ 2. Tìm $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-3}{x-1}$.

Nhập biểu thức $\dfrac{2x-3}{x-1}$.

Ấn `r` máy hỏi X? ấn `1+10^p9=` máy hiện -999999998.

Nên $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-3}{x-1}=-\infty$.

Ví dụ 3. Tìm $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2x-3}{x-1}$.

Nhập biểu thức $\dfrac{2x-3}{x-1}$.

Ấn `r` máy hỏi X? ấn `1p10^p9=` máy hiện 999999998.

Nên $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-3}{x-1}=+\infty$.

Ví dụ 4. Tìm $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2+2x-3}{x^2+1}$.

Giải.

Nhập biểu thức $\dfrac{2x^2+2x-3}{x^2+1}$.

Ấn `r` máy hỏi X? ấn `10^10=` máy hiện 2.

Nên $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^2+2x-3}{x-1}=2$.

Ví dụ 5. Tìm $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}+2x}{x+1}$.

Giải.

Nhập biểu thức $\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}+3x}{x+1}$.

Ấn `r` máy hỏi X? ấn `10^10=` máy hiện 3.

Nên $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+2x-3}{x-1}=2$.

Ví dụ 6. Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}+2x+1}{x+1}$.

Giải.

Nhập biểu thức $\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}+2x+1}{x+1}$.

Ấn r máy hỏi X? ấn p10^10= máy hiện 1.

Nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}+2x+1}{x+1}=1$.

Ví dụ 7. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$.

Giải.

Nhập biểu thức $\dfrac{2x-1}{x+2}$.

Ấn r máy hỏi X? ấn p10^10= máy hiện 2.

Ấn r máy hỏi X? ấn 10^10= máy hiện 2.

Nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{x+2}=2, \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x+2}=2$.

Do đó đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của (C).

Ví dụ 7. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$.

Giải.

Nhập biểu thức $\dfrac{x+1}{x-2}$.

Ấn r máy hỏi X? ấn 2+10^p9= máy hiện 3000000001.

Ấn r máy hỏi X? ấn 2p10^p9= máy hiện -2999999999.

Nên $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2x-1}{x+2}=+\infty, \lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2x-1}{x+2}=-\infty$.

Do đó đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của (C).

ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

C. BÀI TẬP

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 1. Đồ thị hàm số $y=\frac{2x-3}{x-1}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là:

A. $x=1$ và $y=2$

B. $x=2$ và $y=1$

C. $x=1$ và $y=-3$

D. $x=-1$ và $y=2$

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận

Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x-3}{x-1}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x-3}{x-1}=+\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x-3}{x-1}=2$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=2$

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập biểu thức $\frac{2x-3}{x-1}$.

Ấn CALC $x=1+10^{-9}$. Ấn = được kết quả bằng -999999998 nên $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x-3}{x-1}=-\infty$.

Ấn CALC $x=1-10^{-9}$. Ấn = được kết quả bằng 999999998 nên $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{2x-3}{x-1}=+\infty$.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$

Ấn CALC $x=10^{10}$. Ấn = được kết quả bằng 2 nên $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x-3}{x-1}=2$.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=2$

Câu 2. Đồ thị hàm số $y=\frac{1-3x}{x+2}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là:

A. $x=-2$ và $y=-3$

B. $x=-2$ và $y=1$

C. $x=-2$ và $y=3$ D. $x=2$ và $y=1$

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận

Ta có $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\frac{1-3x}{x+2}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\frac{1-3x}{x+2}=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-2$

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1-3x}{x+2}=-3$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=-3$

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập biểu thức $\frac{1-3x}{x+2}$.

Ấn CALC $x=-2+10^{-9}$. Ấn = được kết quả bằng 6999999997 nên $\lim\limits_{x\to(-2)^+}\frac{1-3x}{x+2}=+\infty$.

Ấn CALC $x=-2-10^{-9}$. Ấn = được kết quả bằng -7000000003 nên $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\frac{1-3x}{x+2}=-\infty$.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-2$

Ấn CALC $x=10^{10}$. Ấn = được kết quả bằng -2,999999999 nên $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1-3x}{x+2}=-3$.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=-3$

Câu 3. Đồ thị hàm số $y=\frac{2x-3}{x^2-3x+2}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là:

A. $x=1,\ x=2$ và $y=0$ B. $x=1,\ x=2$ và $y=2$

C. $x=1$ và $y=0$ D. $x=1,\ x=2$ và $y=-3$

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận

Ta có $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{2x-3}{x^2-3x+2}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{2x-3}{x^2-3x+2}=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là

$x=1$. Tính tương tự với $x=2$

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}=0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$

Phương pháp tự luận

Nhập biểu thức $\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}$.

Xét tại $x=1$: Ấn CALC $x=1+10^{-9}$. Ấn = được kết quả bằng 999999998 nên $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}=+\infty$.

Ấn CALC $x=1+10^{-9}$. Ấn = được kết quả bằng -1,000000002 nên $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}=-\infty$.

Tương tự xét với $x=2$

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=1$ và $x=2$

Ấn CALC $x=10^{10}$. Ấn = được kết quả bằng 2.10^{-10} nên $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}=0$.

$\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$

Câu 4. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-3x^2}{x^2-6x+9}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là:

A. $x=3$ và $y=-3$ B. $x=3$ và $y=0$

C. $x=3$ và $y=1$ D. $y=3$ và $x=-3$

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận

$\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{1-3x^2}{x^2-6x+9}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{1-3x^2}{x^2-6x+9}=-\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=3$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-3x^2}{x^2-6x+9}=-3$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=-3$

Phương pháp trắc nghiệm

Tương tự câu 3,4 nên tự tính kiểm tra

Câu 5. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x^2+x+2}{x^3-8}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là:

A. $x=2$ và $y=0$ B. $y=2$ và $x=0$

C. $x=2$ và $y=3$ D. $y=2$ và $x=3$

Hướng dẫn giải

Tương tự câu 3 .

Câu 6. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-x}{3+2x}$ là:

A. 2 B. 1 C. 0 D. 4

Hướng dẫn giải

Tìm tương tự các câu trên ta được tiệm cận đứng là $x=-\dfrac{3}{2}$ và tiệm cận ngang là

$y=-\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Số đường tiệm cận là 2.

Câu 7. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{3x+2}$ là:

A. 2 B. 3 C. 4 D. 0

Hướng dẫn giải

Tìm tương tự các câu trên ta được tiệm cận đứng là $x=-\dfrac{2}{3}$ và tiệm cận ngang là $y=0$

$\Rightarrow$ Số đường tiệm cận là 2

Câu 8. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2-4}$ là:

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

Hướng dẫn giải

Tìm được tiệm cận đứng là $x=\pm 2$ và tiệm cận ngang là $y=0$

$\Rightarrow$ Số đường tiệm cận là 3

Câu 9. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x^2-3x-4}+x$ là:

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

Hướng dẫn giải

Quy đồng biến đổi hàm số đã cho trở thành $y=\frac{x^3-3x^2-3x}{x^2-3x-4}$

Tìm được tiệm cận đứng là $x=-1, x=4$ và không có tiệm cận ngang (Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\pm\infty$)

$\Rightarrow$ Số đường tiệm cận là 2

Câu 10. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x-3}$ khẳng định nào sau đây là **sai**:

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\setminus\{3\}$

B. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=3$

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=1$

D. Đồ thị hàm số có tâm đối xứng là $I(3;1)$

Hướng dẫn giải

Tìm được tiệm cận đứng là $x=3$ và tiệm cận ngang là $y=1$

Giao điểm của hai đường tiệm cận $I(3;1)$ là tâm đối xứng của đồ thị

$\Rightarrow$ B,C,D đúng và chọn A

Câu 11. Đồ thị hàm số nào sau đây có ba đường tiệm cận ?

A. $y=\frac{1}{4-x^2}$

B. $y=\frac{1-2x}{1+x}$

C. $y=\frac{x+3}{5x-1}$

D. $y=\frac{x}{x^2-x+9}$

Hướng dẫn giải

Đồ thị hàm số $y=\frac{1}{4-x^2}$ có 3 đường tiệm cận .(TCĐ là $x=\pm 2$ và TCN $y=0$)

Câu 12. Cho hàm số $y=\frac{x-9x^4}{\left(3x^2-3\right)^2}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng, có 1 tiệm cận ngang $y=-1$

B. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng, có 1 tiệm cận ngang $y=-3$

C. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng, có tiệm cận ngang.

Hướng dẫn giải

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-9x^4}{\left(3x^2-3\right)^2}$ có hai đường tiệm cận đứng $x=\pm1$ và một tiệm cận ngang $y=-1$

Câu 13. Đồ thị hàm số nào sau đây không có tiệm cận đứng:

A. $y=\dfrac{3x-1}{x^2+1}$ B. $y=\dfrac{-1}{x}$ C. $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x+2}$ D. $y=\dfrac{1}{x^2-2x+1}$

Hướng dẫn giải

Phương trình $x^2+1=0$ vô nghiệm nên không tìm được số x_0 để $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{3x-1}{x^2+1}=\pm\infty$

hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{3x-1}{x^2+1}=\pm\infty$ $\Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng

Các đồ thị hàm số ở B,C,D lần lượt có các TCĐ là $x=0, x=-2, x=1$

Câu 14. Đồ thị hàm số nào sau đây không có tiệm cận ngang:

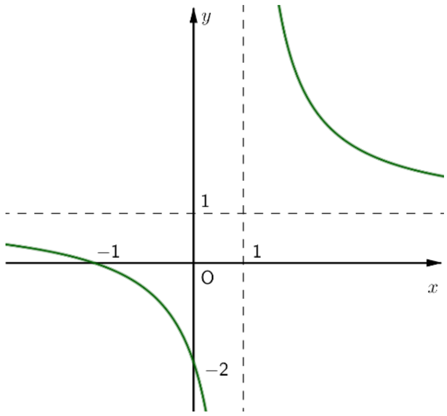
A. $y=\dfrac{\sqrt{x^4+3x^2+7}}{2x-1}$ B. $y=\dfrac{2x-3}{x+1}$ C. $y=\dfrac{3}{x^2-1}$ D. $y=\dfrac{3}{x-2}+1$

Hướng dẫn giải

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+3x^2+7}}{2x-1}=\pm\infty$ $\Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Các đồ thị hàm số ở B,C,D lần lượt có các TCN là $y=2, y=0, y=1$

Câu 15. Đồ thị như hình vẽ là của hàm số nào sau đây :



A. $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ B. $y=\dfrac{3-x}{x-1}$ C. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ D. $y=\dfrac{x-2}{x-1}$

Hướng dẫn giải

Từ đồ thị ta thấy có tiệm cận đứng là $x=1$ và $y=1$ $\Rightarrow$ loại B, C

Xét tiếp thấy giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung là $(0;-2)$ $\Rightarrow$ chọn A.

ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

VẬN DỤNG THẤP

Câu 16. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x-1}{3x+2}$ có đường tiệm cận ngang là

A. $y=1$ B. $x=1$ C. $y=3$ D. $x=3$

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-1}{3x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-1}{3x+2}=1$.

Do đó đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=1$

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập vào máy tính biểu thức $\dfrac{3X-1}{3X+2}$ ấn CALC 10^{12} ta được kết quả là 1.

Tiếp tục CALC -10^{12} ta được kết quả là 1.

Vậy đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=1$

Chọn A.

Câu 17. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2 B. 1

C. 3 D. 0

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{x+2}=2$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=2$.

Lại có $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{2x-1}{x+2}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{2x-1}{x+2}=+\infty$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=-2$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận.

Chọn A.

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập vào máy tính biểu thức $\dfrac{2X-1}{X+2}$ ấn CALC 10^{12} ta được kết quả là 2.

Tiếp tục CALC -10^{12} ta được kết quả là 2.

Vậy đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=2$.

Tiếp tục ấn CALC $-2+10^{-12}$ ta được kết quả là -5.10^{12} , ấn CALC $-2-10^{-12}$ ta được kết quả là 5.10^{12} nên có $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{2x-1}{x+2}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{2x-1}{x+2}=+\infty$.

Do đó ta được $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận.

Chọn A.

Câu 18. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$ là

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=0$.

Do đó đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y=0$.

Lại có $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=+\infty$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng là $x=1; x=2$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Chọn A.

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập vào máy tính biểu thức $\dfrac{2X-1}{X^2+3X+2}$ ấn CALC 10^{12} ta được kết quả là 0.

Tiếp tục CALC -10^{12} ta được kết quả là 0.

Vậy đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=0$.

Tiếp tục ấn CALC $1+10^{-12}$ ta được kết quả là -1.10^{12}, ấn CALC $1-10^{-12}$ ta được kết quả là 1.10^{12} nên có $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=-\infty$ do đó ta được $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Tiếp tục ấn CALC $2+10^{-12}$ ta được kết quả là 3.10^{12}, ấn CALC $1-10^{-12}$ ta được kết quả là -3.10^{12} nên có $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}=+\infty$ do đó ta được $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có ba đường tiệm cận.

Câu 19. Cho hàm số $y=\dfrac{mx+9}{x+m}$ có đồ thị (C). Kết luận nào sau đây đúng ?

A. Khi $m\neq\pm3$ thì (C) có tiệm cận đứng $x=-m$, tiệm cận ngang $y=m$

B. Khi $m=-3$ thì (C) không có đường tiệm cận đứng

C. Khi $m=3$ thì (C) không có đường tiệm cận đứng.

D. Khi $m=0$ thì (C) không có tiệm cận ngang.

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận

Xét phương trình: $mx+9=0$.

Với $x=-m$ ta có: $-m^2+9=0 \Leftrightarrow m=\pm 3$

Kiểm tra thấy với $m=\pm 3$ thì hàm số không có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.

Khi $m\neq \pm 3$ hàm số luôn có tiệm cận đứng $x=m$ hoặc $x=-m$ và tiệm cận ngang $y=m$

Chọn A.

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập vào máy tính biểu thức $\frac{XY+9}{X+Y}$ ấn CALC $X=-3+10^{-10};Y=-3$ ta được kết quả -3.

Tiếp tục ấn CALC $X=-3-10^{-10};Y=-3$ ta được kết quả -3.

Vậy khi $m=-3$ đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

Tương tự với $m=3$ ta cũng có kết quả tương tự.

Vậy các đáp án B và C không thỏa mãn.

Tiếp tục ấn CALC $X=-10^{10};Y=0$ ta được kết quả $9x10^{-10}$, ấn CALC $X=10^{10};Y=0$ ta được kết quả $9x10^{-10}$.

Do đó hàm số có tiệm cận ngang $y=0$.

Vậy đáp án D sai.

Câu 20. Tìm tất cả các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$

A. $y=\pm 1$ B. $x=1$

C. $y=1$ D. $y=-1$

Hướng dẫn giải

Phương pháp tự luận

Vì TXĐ của hàm số là $\mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Lại có $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-1$

Vậy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y=\pm 1$

Chọn A.

Phương pháp trắc nghiệm

Nhập vào máy tính biểu thức $\frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$ ấn CALC 10^{10} ta được kết quả là 1.

Tiếp tục ấn CALC -10^{10} ta được kết quả là -1.

Vậy có hai tiệm cận ngang là $y=\pm 1$.

Câu 21. Với giá trị nào của m thì đồ thị (C): $y=\frac{mx-1}{2x+m}$ có tiệm cận đứng đi qua điểm $M(-1;\sqrt{2})$?

A. $m=2$ B. $m=0$ C. $m=\frac{1}{2}$ D. $m=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Hướng dẫn giải

Để đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng thì $m^2+2\neq 0$ luôn đúng với mọi m.

Khi đó đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=-\frac{m}{2}$.

Vậy để tiệm cận đứng đi qua điểm $M(-1;\sqrt{2})$ thì $-\frac{m}{2}=-1 \Leftrightarrow m=2$

Chọn A.

Câu 22. Cho hàm số $y=\frac{mx+n}{x-1}$ có đồ thị (*C*). Biết tiệm cận ngang của (*C*) đi qua điểm $A(-1;2)$ đồng thời điểm $I(2;1)$ thuộc (*C*). Khi đó giá trị của $m+n$ là

A. $m+n=-1$ B. $m+n=1$ C. $m+n=-3$ D. $m+n=3$

Hướng dẫn giải

Để hàm số có đường tiệm cận ngang thì $m+n\neq 0$

Khi đó tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y=m$ do đó ta có $m=2$

Mặt khác đồ thị hàm số đi qua điểm $I(2;1)$ nên có $2m+n=1 \Rightarrow n=-3$

Vậy $m+n=-1$

Chọn A.

Câu 23. Số tiệm cận của hàm số $y=\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-9}-4}$ là

A. 4 B. 2 C. 3 D. 1

Hướng dẫn giải

Điều kiện xác định $\begin{cases} x^2-9\ge 0 \\ \sqrt{x^2-9}\ne 4 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)\setminus\{\pm 5\}$

Khi đó có: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-9}-4}=0;\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-9}-4}=2$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang.

Mặt khác có $\lim\limits_{x\to-5^{\pm}}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-9}-4}=\mp\infty;\ \lim\limits_{x\to5^{\pm}}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2-9}-4}=\pm\infty$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 4 đường tiệm cận.

Chọn A.

Câu 24. Giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\frac{x-m}{mx-1}$ không có tiệm cận đứng là

A. $m=0;m=\pm1$ B. $m=-1$ C. $m=\pm1$ D. $m=1$

Hướng dẫn giải

Xét $m=0$ thì đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

Xét $m\ne0$ khi đó đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng nếu $ad-bc=0\Leftrightarrow -1+m^2=0 \Leftrightarrow m=\pm1$.

Vậy giá trị của m cần tìm là $m=0;m=\pm1$

Chọn A.

Câu 25. Số tiệm cận của hàm số $y=\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}}{x-1}$ là

A. 3 B. 2 C. 1 D. 4

Hướng dẫn giải

Ta có $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}}{x-1}=\infty$. Vậy đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=1$

Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty} y=2; \lim\limits_{x\to-\infty} y=0$ nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Chọn A.

Câu 26. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}-mx}{x+2}$ có hai đường tiệm cận ngang với

A. $\forall m\in\mathbb{R}$ B. $m=1$ C. $m=0; m=1$ D. $m=0$

Hướng dẫn giải

Xét $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}-mx}{x+2}=-1-m$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}-mx}{x+2}=1-m$

Để hàm số có hai tiệm cận ngang thì $-1-m\neq 1-m$ (thỏa với mọi m) .

Vậy $\forall m\in R$ thì đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.

Chọn A.

Câu 27. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}+mx}{x-1}$ có đường tiệm cận đứng khi

A. $m\neq-1$ B. $\forall m\in R$ C. $m\neq 0$ D. $m\neq 1$

Hướng dẫn giải

Xét phương trình $\sqrt{x^2-x+1}+mx=0$.

Nếu phương trình không có nghiệm $x=1$ thì đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x=1$.

Nếu phương trình có nghiệm $x=1$ hay $m=-1$.

Khi đó xét giới hạn: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-x}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-1}{\sqrt{x^2-x+1}+x}=-\dfrac{1}{2}$ nên trong trường hợp này đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

Vậy $m\neq-1$.

Chọn A.

VẬN DỤNG CAO

Câu 28. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x-4}$ là:

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải.

Điều kiện: $\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x^2-3x-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq -1 \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x \neq -1 \end{cases}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to (-1)^+} y = \lim\limits_{x \to (-1)^+} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x-4} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to (-1)^-} y = \lim\limits_{x \to (-1)^-} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x-4} = +\infty$.

Suy ra đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số khi $x \to (-1)^+$ và $x \to (-1)^-$. Vì $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y$ không tồn tại nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Chọn A.

Câu 29. Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} & \text{neá } x \geq 1 \\ \dfrac{2x}{x-1} & \text{neá } x < 1 \end{cases}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải.

Ta có $\lim\limits_{x \to 1^-} y = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x}{x-1} = -\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{x-1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{1-\dfrac{1}{x}} = 2$ nên đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \to -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}} = 1$ nên đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \to +\infty$.

Chọn A.

Câu 30. Xác định m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2-(2m+3)x+2(m-1)}{x-2}$ không có tiệm cận đứng.

A. $m=-2$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=1$.

Hướng dẫn giải.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2-(2m+3)x+2(m-1)}{x-2}$ không có tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ phương trình $f(x)=x^2-(2m+3)x+2(m-1)=0$ có nghiệm $x=2$

$\Leftrightarrow f(2)=0 \Leftrightarrow 4-2(2m+3)+2(m-1)=0 \Leftrightarrow -2m-4=0 \Leftrightarrow m=-2$.

Chọn A.

Câu 31. Xác định m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{3}{4x^2+2(2m+3)x+m^2-1}$ có đúng hai tiệm cận đứng.

A. $m>-\dfrac{13}{12}$. **B.** $-1<m<1$. **C.** $m>-\dfrac{3}{2}$. **D.** $m<-\dfrac{13}{12}$.

Hướng dẫn giải.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{3}{4x^2+2(2m+3)x+m^2-1}$ có đúng hai tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ phương trình $4x^2+2(2m+3)x+m^2-1=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow (2m+3)^2-4(m^2-1)>0 \Leftrightarrow 12m>-13 \Leftrightarrow m>-\dfrac{13}{12}$.

Chọn A.

Câu 32. Xác định m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ có đúng hai tiệm cận đứng.

A. $m<\dfrac{3}{2}; m\neq 1; m\neq -3$. **B.** $m>-\dfrac{3}{2}; m\neq 1$.

C. $m>-\dfrac{3}{2}$. **D.** $m<\dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ có đúng hai tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow$ phương trình $f(x)=x^2+2(m-1)x+m^2-2=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ f(1)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(m-1)^2-(m^2-2)>0\\ 1+2(m-1)+m^2-2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2m+3>0\\ m^2+2m-3\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<\dfrac{3}{2}\\ m\neq 1\\ m\neq -3\end{cases}.$$

Chọn A.

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x + \sqrt{mx^2 + 1}$ có tiệm cận ngang.

A. $m = 1$. **B.** $m = -1$. **C.** $m > 1$. **D.** $0 < m < 1$

.

Hướng dẫn giải.

- Nếu $m = 0$ thì $y = x + 1$. Suy ra, đồ thị của nó không có tiệm cận ngang.

- Nếu $m < 0$ thì hàm số xác định $\Leftrightarrow mx^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{-m}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{-m}}$.

Do đó, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y$ không tồn tại nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

- Với $0 < m < 1$ thì $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 + \sqrt{m + \frac{1}{x^2}}\right) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(1 - \sqrt{m + \frac{1}{x^2}}\right) = -\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

- Với $m = 1$ thì $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \frac{\left(x^2 + 1\right) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{-x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1\right)} = 0.$$

Suy ra đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \to -\infty$.

- Với $m > 1$ thì $\lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 + \sqrt{m + \frac{1}{x^2}}\right) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} x\left(1 - \sqrt{m + \frac{1}{x^2}}\right) = +\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Chọn A.

Câu 34. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - x + 3} - \sqrt{2x + 1}}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là khẳng định đúng?

A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng và có đúng 1 tiệm cận ngang.

B. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang.

C. Đồ thị hàm số có đúng 3 tiệm cận đứng và 2 tiệm cận ngang.

D. Đồ thị hàm số có đúng 2 tiệm cận đứng và 1 tiệm cận ngang.

Hướng dẫn giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-x+3\ge 0 \\ 2x+1\ge 0 \\ x^3-2x^2-x+2\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2} \\ x\ne 2 \\ x\ne \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{1}{2} \\ x\ne 2 \\ x\ne 1 \end{cases}$.

Với điều kiện trên ta có, $y=\dfrac{\left(x^2-x+3\right)-\left(2x+1\right)}{\left(x^2-3x+2\right)\left(x+1\right)\left(\sqrt{x^2-x+3}+\sqrt{2x+1}\right)}$

$=\dfrac{x^2-3x+2}{\left(x^2-3x+2\right)\left(x+1\right)\left(\sqrt{x^2-x+3}+\sqrt{2x+1}\right)}=\dfrac{1}{\left(x+1\right)\left(\sqrt{x^2-x+3}+\sqrt{2x+1}\right)}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y$; $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}+\sqrt{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)}=0$ nên đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y$ không tồn tại.

Chọn A.

Câu 35. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang.

A. $m>0$.

B. $m<0$.

C. $m=0$.

D. Không có giá trị thực nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Hướng dẫn giải.

Điều kiện: $mx^2+1>0$.

- Nếu $m=0$ thì hàm số trở thành $y=x+1$ không có tiệm cận ngang.

- Nếu $m<0$ thì hàm số xác định $\Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{-m}}<x<\frac{-1}{\sqrt{-m}}$.

Do đó, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y$ không tồn tại nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

- Nếu $m>0$ thì hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Suy ra đường thẳng $y=\frac{1}{\sqrt{m}}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{mx^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{-\sqrt{m+\frac{1}{x^2}}}=-\frac{1}{\sqrt{m}}.$$

Suy ra đường thẳng $y=-\frac{1}{\sqrt{m}}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to-\infty$.

Vậy $m>0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn A.

Câu 36. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\frac{\sqrt{1-x}}{x-m}$ có tiệm cận đứng.

A. $m\le 1$.

B. $m=1$.

C. $m>1$.

D. Không có m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Hướng dẫn giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x\le 1 \\ x\ne m \end{cases}$.

Nếu $m>1$ thì $\lim\limits_{x\to m^+} y$; $\lim\limits_{x\to m^-} y$ không tồn tại nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Nếu $m=1$ thì hàm số trở thành $y=\frac{\sqrt{1-x}}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1^-} y=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1-x}}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-1}{\sqrt{1-x}}=-\infty$$

Suy ra đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số khi $x \to 1^-$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} y$ không tồn tại.

Do đó, $m=1$ thỏa mãn.

- Nếu $m<1$ thì $\lim\limits_{x\to m^+} y = \lim\limits_{x\to m^+} \dfrac{\sqrt{1-x}}{x-m} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to m^-} y = \lim\limits_{x\to m^-} \dfrac{\sqrt{1-x}}{x-m} = -\infty$.

Suy ra đường thẳng $x=m$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số khi $x \to m^+$ và $x \to m^-$.

Vậy $m \le 1$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn A.

Câu 37. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x^3-3x^2-m}$ có đúng một tiệm cận đứng.

A. $\left[\begin{array}{l} m>0 \\ m\le -4 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m>0 \\ m< -4 \end{array}\right.$. **C.** $m\in\mathbb{R}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m\ge 0 \\ m\le -4 \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải.

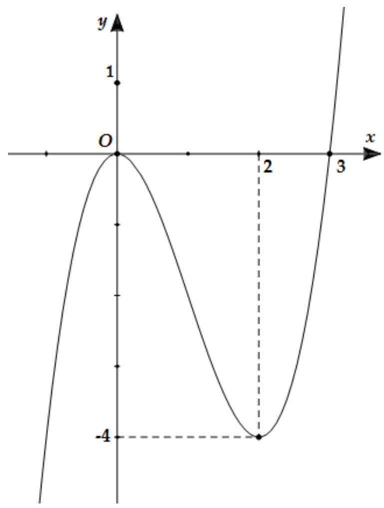
TH1 : Phương trình $x^3-3x^2-m=0$ có một nghiệm đơn $x=-1$ và một nghiệm kép.

Phương trình $x^3-3x^2-m=0$ có nghiệm $x=-1$ nên $(-1)^3-3(-1)^2-m=0 \Leftrightarrow m=-4$.

Với $m=-4$ phương trình trở thành $x^3-3x^2+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$ (thỏa mãn vì $x=2$ là nghiệm kép).

TH2: Phương trình $x^3-3x^2-m=0$ có đúng một nghiệm khác -1 $\Leftrightarrow x^3-3x^2=m$ có một nghiệm khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-4 \\ m>0 \end{array}\right. \\ (-1)^3-3.(-1)^2 \ne m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-4 \\ m>0 \end{array}\right. \\ m\ne -4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-4 \\ m>0 \end{array}\right..$$



Vậy với $\left[\begin{array}{l} m>0 \\ m\le -4 \end{array}\right.$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Chọn A.

Câu 38. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\frac{x^2-mx-2m^2}{x-2}$ có tiệm cận đứng.

A. $\begin{cases} m\neq -2 \\ m\neq 1 \end{cases}$.

B. $\left[\begin{array}{l} m\neq -2 \\ m\neq 1 \end{array}\right.$.

C. $m\in\mathbb{R}$.

D. Không có m thỏa mãn yêu đều đề bài.

Hướng dẫn giải.

Đồ thị của hàm số $y=\frac{x^2-mx-2m^2}{x-2}$ có tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow 2$ không là nghiệm của $f\ x\ = x^2-mx-2m^2$

$\Leftrightarrow f\ 2\ = 4-2m-2m^2\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ m\neq -2 \end{cases}$.

Chọn A.

Câu 39. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=\frac{5x-3}{x^2-2mx+1}$ không có tiệm cận đứng.

A. $-1<m<1$.

B. $\left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1 \end{array}\right.$.

C. $m=-1$.

D. $m=1$.

Hướng dẫn giải.

Đồ thị của hàm số $y=\frac{5x-3}{x^2-2mx+1}$ không có tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow x^2-2mx+1=0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'<0 \Leftrightarrow m^2-1<0 \Leftrightarrow -1<m<1$.

Chọn A.

Câu 40. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi M là một điểm bất kì trên (C). Tiếp tuyến của (C) tại M cắt các đường tiệm cận của (C) tại A và B. Gọi I là giao điểm của các đường tiệm cận của (C). Tính diện tích của tam giác IAB.

A. 4.

B. 12.

C. 2.

D. 6.

Hướng dẫn giải.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Đạo hàm $y'=\frac{-3}{(x-1)^2}, \forall x\neq 1$.

(C) có tiệm cận đứng $x=1$ (d_1) và tiệm cận ngang $y=2$ (d_2) nên $I(1;2)$.

Gọi $M\left(x_0;\dfrac{2x_0+1}{x_0-1}\right)\in(C), x_0\neq 1$.

Tiếp tuyến Δ của (C) tại M có phương trình $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0+1}{x_0-1}$

Δ cắt d_1 tại $A\left(1;\dfrac{2x_0+2}{x_0-1}\right)$ và cắt d_2 tại $B(2x_0-1;2)$.

Ta có $IA=\left|\dfrac{2x_0+2}{x_0-1}-2\right|=\dfrac{4}{|x_0-1|}$; $IB=|(2x_0-1)-1|=2|x_0-1|$.

Do đó, $S=\dfrac{1}{2}IA.IB=\dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{|x_0-1|}.2|x_0-1|=4$.

Chọn A.

Câu 41. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$ là:

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Hướng dẫn giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-1$

Do đó đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y=1$ và $y=-1$.

Chọn A.

Câu 42. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-2}$ là:

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Hướng dẫn giải:

Tập xác định $D=[-1;1]$

Nên không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-2}$.

Do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Chọn A.

Câu 43. Đồ thị hàm số $y = x - \sqrt{x^2 - 4x + 2}$ có tiệm cận ngang là:

A. $y = 2$ **B.** $y = -2$ **C.** $y = \sqrt{2}$ **D.** $x = -2$

Hướng dẫn giải:

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - \sqrt{x^2 - 4x + 2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x-2}{x + \sqrt{x^2 - 4x + 2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4 - \dfrac{2}{x}}{1 + \sqrt{1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{x^2}}} = 2$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x - \sqrt{x^2 - 4x + 2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1 + \sqrt{1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{x^2}}\right) = -\infty$

vì $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 + \sqrt{1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{x^2}}\right) = 2 > 0$

Do đó đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y = 2$.

Chọn A.

Câu 44. Tìm điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng bằng khoảng cách từ M đến trục hoành

A. $M(0;-1), M(4;3)$ **B.** $M(2;1), M(4;3)$

C. $M(0;-1), M(3;2)$ **D.** $M(2;1), M(3;2)$

Hướng dẫn giải:

Do M thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ nên $M\left(x_0; \dfrac{2x_0+1}{x_0-1}\right)$ với $x_0 \neq 1$

Phương trình tiệm cận đứng là $x - 1 = 0 \ (d)$.

Giải phương trình $d(M,d) = d(M,Ox) \Leftrightarrow |x_0 - 1| = \left|\dfrac{2x_0+1}{x_0-1}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 4 \end{array}\right.$.

Câu 45. Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x+2}$ là

A. 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

Hướng dẫn giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Trên TXĐ của hàm số, biến đổi được $y=x-1$.

Do đó đồ thị không có tiệm cận

Chọn A.

Câu 46. Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{(x+2)^2}$ là

A. 2 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 3

Hướng dẫn giải:

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Trên TXĐ của hàm số, biến đổi được $y=\dfrac{x-1}{x+2}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x+2}=1$; $\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x-1}{x+2}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x-1}{x+2}=+\infty$

Do đó đồ thị có 2 tiệm cận

Chọn A.

Câu 47. Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{x-1}$ là

A. 2 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 3

Hướng dẫn giải:

Tập xác định $D=\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{2}{x^2}}}{1-\dfrac{1}{x}}=1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1-\dfrac{2}{x^2}}}{1-\dfrac{1}{x}}=-1$

Do tập xác định $D=\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{x-1};\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sqrt{x^2-2}}{x-1}$

Do đó đồ thị có 2 tiệm cận ngang là $y=1$ và $y=-1$.

Chọn A.

Câu 48. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-3}\,(C)$. Có tất cả bao nhiêu điểm *M* thuộc (*C*) sao cho khoảng cách từ *M* đến tiệm cận ngang bằng 5 lần khoảng cách từ điểm *M* đến tiệm cận đứng.

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 1

Hướng dẫn giải:

Tọa độ điểm M có dạng $M\left(x_0;\dfrac{x_0+2}{x_0-3}\right)$

Phương trình đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang lần lượt là $x-3=0\ (d_1)$, $y-1=0\ (d_2)$.

Giải phương trình $5d(M,d_1)=d(M,d_2)$ tìm x_0

Chọn A.

Câu 49. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{3x+9}$ có đường tiệm cận đứng là $x=a$ và đường tiệm cận ngang là $y=b$. Giá trị của số nguyên *m* nhỏ nhất thỏa mãn $m\ge a+b$ là

A. -2 **B.** -3 **C.** -1 **D.** 0

Hướng dẫn giải:

Ta có đường tiệm cận đứng là $x=-3$ và đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{1}{3}$

Nên $a=-3, b=\dfrac{1}{3}$

Do đó $m\ge a+b \Leftrightarrow m\ge -\dfrac{8}{3} \Rightarrow m=-2$

Chọn A.

Câu 50. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}(C)$. Gọi M là điểm bất kỳ trên (C), *d* là tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị (*C*). Giá trị nhỏ nhất của *d* là

A. 2 **B.** 10 **C.** 6 **D.** 5

Hướng dẫn giải:

Tọa độ điểm M có dạng $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\right)$ với $x_0\neq 2$

Phương trình tiệm cận đứng, ngang lần lượt là $x-2=0\ (d_1)$, $y-2=0\ (d_2)$.

Ta có $d=d(M,d_1)+d(M,d_2)=|x_0-2|+\dfrac{1}{|x_0-2|}\geq 2$

Chọn A.

Câu 51. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}(C)$. Gọi *d* là khoảng cách từ giao điểm của 2 tiệm cận của (*C*) đến một tiếp tuyến bất kỳ của đồ thị (*C*). Giá trị lớn nhất của *d* là

A. 2 **B.** $\sqrt{3}$ **C.** $3\sqrt{3}$ **D.** $\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải:

Tọa độ điểm M bất kì thuộc đồ thị có dạng $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\right)$ với $x_0\neq 2$

Do đó phương trình tiếp tuyến tại M là $y=-\dfrac{x-x_0}{(x_0-2)^2}+\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\ (\Delta)$.

Tính $d(M,\Delta)\leq 2$.

Chọn A.

Câu 52. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}\ (C)$. Gọi *d* là tiếp tuyến bất kì của (*C*), *d* cắt hai đường tiệm cận của đồ thị (*C*) lần lượt tại *A, B.* Khi đó khoảng cách giữa *A* và *B* ngắn nhất bằng

A. 4 **B.** $3\sqrt{2}$ **C.** $2\sqrt{2}$ **D.** $3\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

Tọa độ điểm M bất kì thuộc đồ thị có dạng $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\right)$ với $x_0\neq 2$

Do đó phương trình tiếp tuyến tại M là $y=-\dfrac{x-x_0}{(x_0-2)^2}+\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\ (d)$.

Tìm tọa độ giao của tiệm cận và tiếp tuyến $A\left(2;\dfrac{2x_0-2}{x_0-2}\right), B(2x_0-2;2)$

Từ đó đánh giá $AB\geq 4$

Chọn A.