BÀI 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Quy tắc tìm cực trị của hàm số.

Quy tắc 1:

- *Tìm TXĐ của hàm số.*

- *Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.*
- *Lập bảng biến thiên.*

- *Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.*

Quy tắc 2:

- *Tìm TXĐ của hàm số.*

- *Tính $f'(x)$. Giải phương trình $f'(x)$ và ký hiệu x_i $(i=1,2,3,...)$ là các nghiệm của nó.*
- *Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.*

- *Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i .*

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

1) Kỹ năng giải nhanh các bài toán cực trị hàm số bậc ba.

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \ (a \neq 0)$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

+) Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow b^2 - 3ac > 0$. Khi đó đường thẳng qua hai điểm cực trị đó là :

$$y = \left(\frac{2c}{3} - \frac{2b^2}{9a}\right)x + d - \frac{bc}{9a} .$$

+) Bấm máy tính tìm ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d - \left(3ax^2 + 2bx + c\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{b}{9a}\right) \xrightarrow{x=i} Ai + B \Rightarrow y = Ax + B$$

Hoặc sử dụng công thức $y - \dfrac{y'.y''}{18a}$.

Ví dụ 1: Tìm đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số: $y = x^3 + 3x^2 - x + 2$

Bấm máy tính: MODE 2

$$x^3 + 3x^2 - x + 2 - \left(3x^2 + 6x - 1\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\right) \xrightarrow{x=i} \frac{7}{3} - \frac{8}{3}i \Rightarrow y = -\frac{8}{3}x + \frac{7}{3}$$

Ví dụ 2: Tìm đường thẳng đi qua hai điểm cực trị (nếu có) của đồ thị hàm số:

$y = x^3 - 3x^2 + m^2x + m$

Bấm máy tính: MODE 2

$$x^3 - 3x^2 + m^2x + m - \left(3x^2 - 6x + m^2\right)\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{3}\right) \xrightarrow{x=i,m=A=1000} \frac{1003000}{3} + \frac{1999994}{3}i$$

Ta có: $\frac{1003000}{3} + \frac{1999994}{3}i = \frac{1000000 + 3000}{3} + \frac{2000000 - 6}{3}i = \frac{m^2 + 3m}{3} + \frac{2m^2 - 6}{3}x$

Vậy đường thẳng cần tìm: $y = \frac{2m^2 - 6}{3}x + \frac{m^2 + 3m}{3}$

+) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số bậc ba là:

$AB = \sqrt{\frac{4e + 16e^3}{a}}$ với $e = \frac{b^2 - 3ac}{9a}$

2) Kỹ năng giải nhanh các bài toán cực trị hàm trùng phương .

Cho hàm số: $y = ax^4 + bx^2 + c\ (a \neq 0)$ có đồ thị là (C).

$y' = 4ax^3 + 2bx$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{array}\right.$$

(C) có ba điểm cực trị $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -\frac{b}{2a} > 0$.

Khi đó ba điểm cực trị là: $A(0;c)$, $B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)$, $C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};-\frac{\Delta}{4a}\right)$ với $\Delta = b^2 - 4ac$

Độ dài các đoạn thẳng: $AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}$, $BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$.

Các kết quả cần ghi nhớ:

+) ΔABC vuông cân

$$\Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow -\frac{2b}{a} = 2\left(\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}\right) \Leftrightarrow \frac{b^4}{16a^2} + \frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a}\left(\frac{b^3}{8a} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{b^3}{8a} + 1 = 0$$

+) ΔABC đều

$$\Leftrightarrow BC^2 = AB^2 \Leftrightarrow -\frac{2b}{a} = \frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a} \Leftrightarrow \frac{b^4}{16a^2} + \frac{3b}{2a} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a}\left(\frac{b^3}{8a} + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{b^3}{8a} + 3 = 0$$

+) $BAC = \alpha$, ta có: $\cos\alpha = \dfrac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} \Leftrightarrow \tan\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{8a}{b^3}$

+) $S_{\Delta ABC} = \dfrac{b^2}{4|a|}\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}$

+) Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC là $R = \dfrac{b^3 - 8a}{8|a|b}$

+) Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC là

$$r = \frac{\dfrac{b^2}{4|a|}\sqrt{-\dfrac{b}{2a}}}{\sqrt{\dfrac{b^4}{16a^2} - \dfrac{b}{2a}} + \sqrt{-\dfrac{b}{2a}}} = \frac{b^2}{4|a| + \sqrt{16a^2 - 2ab^3}}$$

+)Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC là:

$$x^2 + y^2 - \left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a} + c\right)y + c\left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}\right) = 0$$

CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI TẬP

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU (30 câu)

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$.

Câu 3. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và đạt cực đại $x = 0$.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ và đạt cực tiểu tại $x = 0$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ và cực tiểu tại $x = 0$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và cực tiểu tại $x = -2$.

Hướng dẫn giải:

$$y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên ta được hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ và đạt cực tiểu tại $x = 0$

Câu 4. Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có hai cực trị.

B. Hàm số chỉ có đúng 2 điểm cực trị.

C. Hàm số không có cực trị.

D. Hàm số chỉ có đúng một điểm cực trị.

Hướng dẫn giải:

$$y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

$y(0) = 3;\quad y(1) = y(-1) = 2$ nên hàm số có hai cực trị.

Câu 5. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có hai điểm cực trị A, B . Khi đó phương trình đường thẳng AB là:

A. $y = -2x + 1$.

B. $y = 2x - 1$.

C. $y = x - 2$.

D. $y = -x + 2$.

Hướng dẫn giải:

$$y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow A(1;-1), B(-1;3) \Rightarrow$ Phương trình $AB: y = -2x + 1$

Phương pháp trắc nghiệm:

Bấm máy tính:

Bước 1 : Bấm Mode 2 (CMPLX)

Bước 2 : $x^3 - 3x + 1 - \left(3x^2 - 3\right)\left(\frac{x}{3}\right)$

Bước 3 : Cacl $x = i$

Kết quả : $1 - 2i \Rightarrow$ phương trình AB: $y = 1 - 2x$

Câu 6. Gọi M, n lần lượt là giá trị cực đại, giá trị cực tiểu của hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$. Khi đó giá trị

của biểu thức $M^2 - 2n$ bằng:

A. 7. B. 8. C. 9. D. 6.

Hướng dẫn giải:

$$y' = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -3$ và $y_{CD} = -3$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ và $y_{CT} = 1$

$\Rightarrow M^2 - 2n = 7$

Phương pháp trắc nghiệm:

Bấm máy tính:

Bước 1:

$$\left.\frac{d\left(\frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}\right)}{dx}\right|_{x=1000} .\left(100 + 2\right)^2 \to 1004003 = 1000^2 + 4000 + 3 = x^2 + 4x + 3$$

$$y' = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2}$$

Bước 2: Giải phương trình bậc hai : $x^2 + 4x + 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \to A \\ x = -3 \to B \end{array}\right.$

Bước 3: Nhập vào máy tính $\dfrac{x^2+3x+3}{x+2}$

Cacl $x=A\to C$

Cacl $x=B\to D$

Bước 4: Tính $C^2-2D=7$

Câu 7. Cho hàm số $y=x^3+17x^2-24x+8$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $x_{CD}=-12.$ B. $x_{CD}=\dfrac{2}{3}.$ C. $x_{CD}=-3.$ D. $x_{CD}=1.$

Hướng dẫn giải:

$$y'=3x^2+34x-24=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-12\\x=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x=-12$.

Câu 8. Cho hàm số $y=3x^4-6x^2+1$. Kết luận nào sau đây là đúng?

A. $y_{CD}=1.$ B. $y_{CD}=-2.$ C. $y_{CD}=-1.$ D. $y_{CD}=2.$

Hướng dẫn giải:

$$y'=12x^3-12x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=1\end{array}\right.$$

Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $y_{CD}=1$.

Câu 9. Trong các hàm số sau, hàm số nào đạt cực đại tại $x=\dfrac{3}{2}$?

A. $y=\sqrt{-x^2+3x-2}.$ B. $y=\dfrac{1}{2}x^4-x^3+x^2-3x.$

C. $y=\sqrt{4x^2-12x-8}.$ D. $y=\dfrac{x-1}{x+2}.$

Hướng dẫn giải:

Hàm số $y=\sqrt{-x^2+3x-2}$ có $y'=\dfrac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x-2}}$ và y' đổi dấu từ "+" sang "−" khi x chạy qua $\dfrac{3}{2}$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=\dfrac{3}{2}$.

Dùng casio kiểm tra: $\begin{cases} y'\left(\dfrac{3}{2}\right)=0 \\ y''\left(\dfrac{3}{2}\right)<0 \end{cases}$ thì hàm số đạt cực đại tại $\dfrac{3}{2}$.

Câu 10. Trong các hàm số sau, hàm số nào chỉ có cực đại mà không có cực tiểu?

A. $y=-10x^4-5x^2+7.$

B. $y=-17x^3+2x^2+x+5.$

C. $y=\dfrac{x-2}{x+1}.$

D. $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}.$

Hướng dẫn giải:

Hàm số $y=-10x^4-5x^2+7$ có $y'=-40x^3-10x=0 \Leftrightarrow x=0$ và $y''(0)=-10<0$ nên hàm số đạt cực đại tại $x=0$.

Câu 11. Cho hàm số $y=\dfrac{3x^2+13x+19}{x+3}$. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có

phương trình là:

A. $y=6x+13.$

B. $y=3x+13.$

C. $5x-2y+13=0.$

D. $2x+4y-1=0.$

Hướng dẫn giải:

$y'=\dfrac{3x^2+18x+20}{(x+3)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-9+\sqrt{21}}{3} \\ x=\dfrac{-9-\sqrt{21}}{3} \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=6x+13$.

Phương pháp trắc nghiệm:

Tại điểm cực trị của đồ thị hàm số phân thức , ta có: $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$$y = \frac{\left(3x^2 + 13x + 19\right)'}{\left(x+3\right)'} \Leftrightarrow y = 6x + 13$$

Câu 12. Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x}$. Khẳng định nào sau đây là đúng

A. Hàm số không có cực trị.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

C. Hàm số đạt cực đại $x = 2$.

D. Hàm số có hai điểm cực trị.

Hướng dẫn giải:

TXĐ: $D = (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.

$$y' = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x}} = 0 \Leftrightarrow x = 1(l) \ .$$

y' không đổi dấu trên các khoảng xác định nên hàm số không có cực trị.

Câu 13. Cho hàm số $y = x^7 - x^5$. Khẳng định nào sau đây là đúng

A. Hàm số có đúng hai điểm cực trị.

B. Hàm số có đúng 3 điểm cực trị .

C. Hàm số có đúng 1 điểm cực trị.

D. Hàm số có đúng 4 điểm cực trị.

Hướng dẫn giải:

$$y' = 7x^6 - 5x^4 = x^4(7x^2 - 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\frac{5}{7}} \end{array}\right. .$$

y' chỉ đổi dấu khi x chạy qua $\pm\sqrt{\frac{5}{7}}$ nên hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-2)^2(x-3)^3(x+5)^4$. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị?

A. 2

B. 3

C.4

D. 5

Hướng dẫn giải:

$f'(x)$ đổi dấu khi x chạy qua -1 và 3 nên hàm số có 2 điểm cực trị.

Câu 15. Cho hàm số $y = (x^2 - 2x)^{\frac{1}{3}}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số không có điểm cực trị.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

D. Hàm số có đúng 2 điểm cực trị.

Hướng dẫn giải:

TXĐ $D = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$

$$y' = \frac{1}{3}(x^2 - 2x)^{-\frac{2}{3}}(2x - 2)$$

y' không đổi dấu trên các khoảng xác định nên hàm số không có cực trị.

Câu 16. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 6x$. Hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 . Khi đó giá trị của

biểu thức $S = x_1^2 + x_2^2$ bằng:

A. 8. B.-8. C.10. D. -10.

Hướng dẫn giải:

$D = \mathbb{R}$

$y' = -3x^2 + 6x + 6$

Phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và y' đổi dấu khi x chạy qua x_1, x_2 nên hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2.

$$S = x_1^2 + x_2^2 = \left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2 = 8$$

Phương pháp trắc nghiệm:

Bước 1: Giải phương trình bậc hai : $-3x^2 + 6x + 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{3} \to A \\ x = 1 - \sqrt{3} \to B \end{array}\right.$

Bước 2: Tính $A^2 + B^2 = 8$

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì đạo hàm đổi dấu khi x chạy qua x_0 .

B. Nếu $f'(x_0) = 0$ thì hàm số đạt cực trị tại x_0 .

C. Nếu đạo hàm đổi dấu khi x chạy qua x_0 thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0 .

D. Nếu $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ thì hàm số không đạt cực trị tại x_0 .

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì hàm số không có đạo hàm tại x_0 hoặc $f'(x_0) = 0$.

B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại x_0 .

D. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f''(x_0) > 0$ hoặc $f''(x_0) < 0$.

Câu 19. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $[a,b]$ và đạt cực đại, cực tiểu lần lượt tại $x_1, x_2 \in [a,b]$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì hàm số không có đạo hàm tại x_0 hoặc $f'(x_0) = 0$.

B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại x_0 .

D. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f''(x_0) < 0$ hoặc $f''(x_0) > 0$.

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với $a \neq 0$ luôn có cực trị.

B. Nếu hàm số $y = f(x)$ không có cực trị thì phương trình $f'(x) = 0$ vô nghiệm.

C. Hàm số $y = f(x)$ có đúng hai điểm cực trị thì hàm số đó là hàm bậc ba.

D. Nếu hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực đại là M , giá trị cực tiểu là m thì $M > m$.

Câu 21. Hàm số bậc ba có thể có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0 hoặc 2.

B. 1 hoặc 2.

C. 0 hoặc 1 hoặc 2.

D. 0 hoặc 1.

Hướng dẫn giải:

Hàm số bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

$\Delta' = b^2 - 3ac$

Nếu $\Delta' \leq 0$ thì y' không đổi dấu trên $\mathbb{R}$ nên hàm số không có cực trị.

Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và y' đổi dấu khi x chạy qua x_1, x_2 nên hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x) = \left|x^2 - 2x - 4\right|$ có đồ thị như hình vẽ:

Hàm số $y = f(x)$ có mấy cực trị?

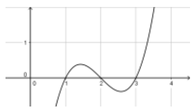
A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Câu 23. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Kết luận nào sau đây là đúng?

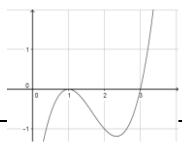
A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị.

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm có một điểm cực trị.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Kết luận nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực tiểu.

B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;1)$.

D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

Câu 25. Cho hàm số $y = |x^3 - 3x - 2|$ có đồ thị như hình vẽ:

Kết luận nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực đại và hai điểm cực tiểu.

B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực tiểu và một điểm cực đại.

C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có bốn điểm cực trị.

D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ chỉ có điểm cực tiểu và không có điểm cực đại.

Câu 26. Hàm số nào sau đây có đúng hai điểm cực trị?

A. $y = x + \dfrac{1}{x+1}$.

B. $y = x^3 + 3x^2 + 7x - 2$.

C. $y = -x^4 - 2x^2 + 3$.

D. $y = x - \dfrac{2}{x+1}$.

Hướng dẫn giải:

Hàm số $y = x + \dfrac{1}{x+1}$ có TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

y' đổi dấu khi x chạy qua -2 và 0 nên hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Câu 27. Hàm số nào sau đây không có cực trị?

A. $y = \dfrac{x+1}{x-2}$.

B. $y = x^3 + 3x^2$.

C. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$.

D. $y = 2x + \dfrac{2}{x+1}$.

Hướng dẫn giải:

Hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ có TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$y' = -\dfrac{3}{(x-2)^2} < 0, \forall x \in D$ nên hàm số không có cực trị

Câu 28. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào sai?

A. Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$ luôn có cực trị.

B. Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a \neq 0)$ luôn có ít nhất một điểm cực trị.

C. Hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}, (ad - bc \neq 0)$ luôn không có cực trị.

D. Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$ có nhiều nhất hai điểm cực trị.

Câu 29. Điểm cực tiểu của hàm số $y = -x^3 + 3x + 4$ là:

A. $x = -1$.

B. $x = 1$.

C. $x = -3$.

D. $x = 3$.

Hướng dẫn giải:

TXĐ $D = \mathbb{R}$

$$y' = -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

y' đổi dấu từ "$-$" sang "$+$" khi x chạy qua -1 nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Câu 30. Hàm số nào sau đây đạt cực đại tại $x = 1$?

A. $y = 2\sqrt{x} - x$.

B. $y = x^4 - 4x + 3$.

C. $y = x + \dfrac{1}{x}$.

D. $y = x^5 - 5x^2 + 5x - 13$.

Hướng dẫn giải:

Hàm số $y = 2\sqrt{x} - x$ có TXĐ $D = [0;+\infty)$

$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) = -\dfrac{1}{2} < 0 \end{cases}$ nên hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

Câu 31. Hàm số nào sau đây có cực trị?

A. $y = x^4 + 3x^2 + 2.$ B. $y = x^3 + 1.$ C. $y = 3x + 4.$ D. $y = \dfrac{2x-1}{3x+2}.$

Hướng dẫn giải:

+ A. Hàm số trùng phương luôn luôn có cực trị.

+ B. $y = x^3 + 1$

Ta có: $y' = 3x^2 \Rightarrow y' \geq 0 \,\forall x \in R$.

Do đó, hàm số luôn đồng biến trên R. Hàm số này không có cực trị.

+ Đối với phương án C và D, đây là hàm số bậc nhất và phân thức hữu tỉ bậc nhất/bậc nhất. Đây là

2 hàm số luôn đơn điệu trên từng khoảng xác định của chúng, do đó 2 hàm số này không có cực trị.

Câu 32. Đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 5$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Hướng dẫn giải:

+ Đây là hàm số trùng phương có $ab = -3 < 0$ nên hàm số này có 3 điểm cực trị. Mặt khác, có $a = 1 > 0$ nên hàm số có 2 điểm cực tiểu và 1 điểm cực đại.

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + (2m-3)x - 3$ đạt cực đại tại

$x = 1$.

A. $m > 3.$ B. $m = 3.$ C. $m \leq 3.$ D. $m < 3.$

Hướng dẫn giải:

+ Để hàm số đạt cực đại $x = 1$ thì:

$\begin{cases} y'(1) = 3.1^2 - 2m.1 + 2m - 3 = 0 \\ y''(1) = 6.1 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$

Câu 34. Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x-1}{4x+7}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Hướng dẫn giải:

+ Hàm phân thức hữu tỉ bậc nhất/ bậc nhất luôn đơn điệu trên các khoảng xác định của chúng, do đó hàm này không có cực trị.

Câu 35. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$ có tọa độ điểm cực tiểu là:

A. $(1;3)$. B. $(-1;-1)$. C. $\left(\frac{1}{3};\frac{85}{27}\right)$. D. $(3;1)$.

Hướng dẫn giải:

+ Ta có: $y' = 3x^2 - 4x + 1$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1 \Rightarrow y_{CT} = 3$

Câu 36. Hàm số $y = x^4 + 2(m-2)x^2 + m^2 - 2m + 3$ có đúng 1 điểm cực trị thì giá trị của m là:

A. $m \ge 2$. B. $m < 2$. C. $m > 2$. D. $m = 2$.

Hướng dẫn giải:

+ Hàm trùng phương có 1 điểm cực trị khi $ab \ge 0 \Leftrightarrow m - 2 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge 2$.

Câu 37. Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 5x - 17$. Gọi hoành độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là x_1, x_2

Khi đó, tích số x_1x_2 có giá trị là:

A. 5. B. -5. C. -4. D. 4.

Hướng dẫn giải:

+ Ta có: $y' = -x^2 + 8x - 5$.

x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 8x - 5 = 0$.

Khi đó, theo định lý Viet, ta có: $x_1x_2 = 5$

Câu 38. Cho hàm số $y = 3x^4 - 4x^3 + 2$. Khẳng định nào sau đây là đúng:

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

B. Hàm số không có cực trị.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Hướng dẫn giải:

+ Ta có: $y' = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$.

Xét $y' = 0 \Leftrightarrow 12x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 39. Hàm số $y = a\sin 2x + b\cos 3x - 2x$ $(0 < x < 2\pi)$ đạt cực trị tại $x = \frac{\pi}{2}; x = \pi$. Khi đó, giá trị của

biểu thức $P = a + 3b - 3ab$ là:

A. 1.   B. -1.   C. 3.   D. -3.

Hướng dẫn giải:

TXĐ: $D = R$

+ Ta có: $y' = 2a\cos 2x - 3b\sin 3x - 2$.

Hàm số đạt cực trị tại $x = \frac{\pi}{2}; x = \pi$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} y'(\frac{\pi}{2}) = -2a + 3b - 2 = 0 \\ y'(\pi) = 2a - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Do đó, giá trị của biểu thức $P = a + 3b - 3ab = 1$.

Câu 40. Hàm số $y = -4x^3 - 6x^2 - 3x + 2$ có mấy điểm cực trị?

A. 0.   B. 2.   C. 1.   D. 3.

Hướng dẫn giải:

+ Đây là hàm số bậc 3 có $b^2 - 3ac = 6^2 - 3.3.4 = 0$. Do đó, hàm số luôn đơn điệu trên R. Hàm số này không có cực trị.

Câu 41. Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 2$ đạt cực tiểu tại $x = 2$ khi?

A. $m = 0$.   B. $m \neq 0$.   C. $m > 0$.   D. $m < 0$.

Hướng dẫn giải:

$y' = 3x^2 - 6x + m$

$y'' = 6x - 6$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ khi:

$$\begin{cases} y'(2) = 3.2^2 - 6.2 + m = 0 \\ y''(2) = 6.2 - 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$$

Câu 42. Đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ có tọa độ điểm cực đại là:

A. $(1;3)$.   B. $(3;0)$.   C. $(1;4)$.   D. $(3;1)$.

Hướng dẫn giải:

$y' = 3x^2 - 12x + 9$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1 \Rightarrow y_{CD} = 3$.

Câu 43. Cho hàm số $y=(m-1)x^3-3x^2-(m+1)x+3m^2-m+2$. Để hàm số có cực đại, cực tiểu thì:

A. $m\neq 1$. B. $m=1$. C. $m>1$. D. m tùy ý.

Hướng dẫn giải:

+ Hàm số có cực đại, cực tiểu khi:

$$\begin{cases} b^2-3ac>0 \\ a\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9+3(m-1)(m+1)>0 \\ m-1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\neq 1$$

Câu 44. Khẳng định nào là đúng trong các khẳng định sau:

A. Hàm số trùng phương luôn có cực trị.

B. Hàm số bậc 3 có thể có 3 cực trị.

C. Hàm số trùng phương có thể có 2 điểm cực trị.

D. Hàm phân thức không thể có cực trị.

Hướng dẫn giải:

+ A . Hàm số trùng phương luôn có cực trị do đạo hàm của nó là một đa thức bậc 3 luôn có nghiệm thực. Nên đáp án này đúng.

+ B. Hàm số bậc 3 có tối đa 2 cực trị. Nên đáp án này sai.

+ C. Hàm số trùng phương chỉ có thể có 1 hoặc 3 điểm cực trị. Nên đáp án này sai.

+ D. Đáp án này sai.

Câu 45. Giá trị cực tiểu của hàm số $y=x^4-2x^2+5$ là:

A. 4. B. 5. C. 0. D. 1.

Hướng dẫn giải:

$y'=4x^3-4x=4x(x^2-1)$

$$y'=0\Leftrightarrow 4x(x^2-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\pm 1$ và $y_{CT}=4$.

Câu 46. Hàm số $y=-3\sqrt[3]{x^2}+2$ có bao nhiêu cực đại?

A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Hướng dẫn giải:

+ Ta có: $y'=-\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$. Dễ dàng nhận thấy $x=0$ là điểm tới hạn của hàm số, và y' đổi dấu khi đi

qua $x=0$. Nên $x=0$ là cực trị của hàm số. Hơn nữa, ta có hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và nghịch biến trên $(0;+\infty)$. Do đó, $x=0$ là cực đại của hàm số.

Câu 47. Cho hàm số $y=-3x^4+4x^2-2017$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

B. Hàm số không có cực trị.

C. Hàm số có 1 điểm cực đại và 2 điểm cực tiểu .

D. Hàm số có 1 điểm cực đại và không có điểm cực tiểu.

Hướng dẫn giải:

+ Đây là hàm số trùng phương có $ab = -3.4 < 0$ nên hàm số này có 3 điểm cực trị. Hơn nữa, hàm số có $a = -3 < 0$ nên hàm số có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

Câu 48. Hàm số nào sau đây không có cực trị?

A. $y = x^3$. B. $y = x^3 - x$. C. $y = x^4 - 3x^2 + 2$. D. $y = x^3 + 3x^2$.

Hướng dẫn giải:

+ A. Có $y' = 3x^2 \geq 0 \forall x \in R$. Do đó, hàm số này luôn đồng biến trên R. Hay nói cách khác, hàm số này không có cực trị.

+ B. Đây là hàm số bậc 3 có $b^2 - 3ac = 3 > 0$. Do đó, hàm số này có 2 cực trị.

+ C. Hàm số trùng phương luôn có cực trị.

+ D. Đây là hàm số bậc 3 có $b^2 - 3ac = 9 > 0$. Do đó, hàm số này có 2 cực trị.

Câu 49. Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 4x - 7$. Gọi hoành độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là x_1, x_2. Khi đó, giá trị của tổng $x_1 + x_2$ là:

A. 4. B. -4. C. 6. D. -6.

Hướng dẫn giải:

$y' = 3x^2 - 12x + 4$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 4 = 0$.

x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$.

Khi đó, theo định lý Viet, ta có: $x_1 + x_2 = 4$.

Câu 50. Hiệu số giữa giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ là:

A. 4. B. -2. C. 2. D. -4.

Hướng dẫn giải:

$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$y_{CD} - y_{CT} = y(0) - y(2) = 4$.

Câu 51. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Nếu đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị là gốc tọa độ và điểm $A(-1;-1)$ thì hàm số có phương trình là:

A. $y = -2x^3 - 3x^2$. B. $y = 2x^3 - 3x^2$.

C. $y = x^3 + 3x^2 + 3x$. D. $y = x^3 - 3x - 1$.

Hướng dẫn giải:

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

+ Đồ thị hàm số có điểm cực trị là gốc tọa độ, ta có:

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c = d = 0$$

+ Đồ thị hàm số có điểm cực trị là $A(-1;-1)$, ta có:

$$\begin{cases} y'(-1) = 0 \\ y(-1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b = 0 \\ b - a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases}$$

Vậy hàm số là: $y = -2x^3 - 3x^2$.

Câu 52. Hàm số nào dưới đây có cực trị?

A. $y = x^4 + 1$. B. $y = x^3 + x^2 + 2x - 1$.

C. $y = 2x - 1$. D. $y = \dfrac{x+1}{2x-1}$.

Hướng dẫn giải:

+ A. Hàm số trùng phương luôn có cực trị.

+ B. Đây là hàm số bậc 3 có $b^2 - 3ac = -5 < 0$. Do đó, hàm số này không có cực trị.

+ C. Hàm số bậc nhất đơn điệu trên R. Do đó, hàm số này cũng không có cực trị.

+ D. Hàm số phân thức hữu tỷ bậc nhất/bậc nhất luôn đơn điệu trên các khoảng xác định của nó.

Do đó, hàm số này không có cực trị.

Câu 53. Điều kiện để hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$ có 3 điểm cực trị là:

A. $ab < 0$. B. $ab > 0$. C. $b = 0$. D. $c = 0$.

Hướng dẫn giải:

+ Như ta đã biết, điều kiện để hàm số trùng phương có 3 điểm cực trị là $-\dfrac{b}{2a} > 0$. Ở đây lại có,

$a \neq 0$ nên điều kiện trở thành $ab < 0$.

Câu 54. Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (4m-1)x - 3$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m \neq \dfrac{1}{2}$.

B. Với mọi m, hàm số luôn có cực trị.

C. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m < \dfrac{1}{2}$.

D. Hàm số có cực đại, cực tiểu khi $m > 1$.

Hướng dẫn giải:

Hàm số bậc 3 có cực đại, cực tiểu thì $b^2 - 3ac > 0 \Leftrightarrow 4m^2 - (4m-1) > 0$

$\Leftrightarrow (2m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}$.

Câu 55. Hàm số $y = -x^4 + 4x^2 + 3$ có giá trị cực đại là:

A. 7. B. 3. C. 0. D. 2.

Hướng dẫn giải:

$y' = -4x^3 + 8x = -4x(x^2 - 2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow -4x(x^2-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{array}\right.$

Hàm số đạt cực đại tại $x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow y_{CD} = 7$.

Câu 56. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào có đúng 2 cực trị?

A. $y = x^3 - 5x^2 + 7$. B. $y = x^4 + 3x^2 + 2$.

C. $y = \dfrac{2x^2 - 1}{3x}$. D. $y = 2017x^6 + 2016x^4$.

Hướng dẫn giải:

+ A. Đây là hàm số bậc 3 có $b^2 - 3ac = 25 > 0$. Do đó, hàm số có 2 cực trị.

+ B. Hàm số $y = x^4 + 3x^2 + 2$ có 1 cực trị.

+ C. Có $y' = \dfrac{2x^2+1}{3x^2} > 0 \forall x \in R \setminus \{0\}$. Do đó, hàm số này đồng biến trên từng khoảng xác định của nó. Hàm số này không có cực trị.

+ D. Có $y' = 2017.6x^5 + 2016.4x^3$. Xét $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Do đó hàm số này có đúng 1 cực trị.

Câu 57. Điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \sqrt{1 + 4x - x^4}$ có tọa độ là:

A. $(1;2)$. B. $(0;1)$. C. $(2;3)$. D. $(3;4)$.

Hướng dẫn giải:

$y' = \dfrac{2 - 2x^3}{\sqrt{1 + 4x - x^4}}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y(1) = 2$

Câu 58. Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + ax + b$ có điểm cực trị là $A(1;3)$. Khi đó giá trị của $4a - b$ là:

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Hướng dẫn giải:

$y' = 3x^2 - 4x + a$

Đồ thị hàm số có điểm cực trị là $A(1;3)$, ta có:

$\begin{cases} y'(1) = -1 + a = 0 \\ y(1) = -1 + a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$

Khi đó ta có, $4a - b = 1$.

Câu 59. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 2$. Gọi a, b lần lượt là giá trị cực đại và giá trị cực tiểu của hàm số đó.

Giá trị của $2a^2 + b$ là:

A. 2. B. -2. C. -8. D. 4.

Hướng dẫn giải:

$y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array} \right.$

Ta có: $a = y(0) = -2; b = y(2) = -6 \Rightarrow 2a^2 + b = 2$.

Câu 60. Cho hàm số $y = x^4 - 5x^2 + 3$ đạt cực trị tại x_1, x_2, x_3. Khi đó, giá trị của tích $x_1x_2x_3$ là:

A. 0. B. 5. C. 1. D. 3.

Hướng dẫn giải:

+ Hàm số trùng phương luôn đạt cực trị tại $x = 0$. Do đó: $x_1x_2x_3 = 0$.

Câu 61. Hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ đạt cực đại tại x bằng :

A. -1. B. 1. C. 0. D. 2.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array} \right.$

Lập bảng biến thiên $\Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$

Câu 62. Tìm giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 5$

A. -4. B. -5. C. -2. D. -6.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$$y' = -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên . Suy ra : $y_{CĐ} = -4$

Câu 63. Hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A.*0.* B.*1.* C.*2.* D. *3.*

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$$y' = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \geq 0, \forall x \in R$$

Hàm số không có cực trị

Câu 64. Cho hàm số y= $x^3 - 3x^2 + 2$. Khẳng định nào sau đây đúng :

A. Hàm số có cực đại, cực tiểu .

B. Hàm số không có cực trị.

C. Hàm số có cực đại , không có cực tiểu.

D. Hàm số có cực tiểu không có cực đại.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$$y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$. Vậy hàm số có 2 cực trị .

CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

VẬN DỤNG THẤP

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		x_0		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
y		↘		↗		↘	$\|\|$	↗	

Khi đó hàm số đã cho có :

A. Một điểm cực đại, một điểm cực tiểu.

B. Một điểm cực đại , hai điểm cực tiểu.

C. 1 điểm cực đại, không có điểm cực tiểu.

D. 2 điểm cực đại , 1 điểm cực tiểu.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = mx^4 - (m+1)x^2 + 2m - 1$ có 3 điểm cực trị ?

A. $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 0 \end{array}\right.$. B. $m < -1$. C. $-1 < m < 0$. D. $m > -1$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]: $y' = 4mx^3 - 2(m+1)x = 0$

$\Leftrightarrow 2x(2mx^2 - m - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2mx^2 = m+1 \end{array}\right.$

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m(m+1) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 0 \end{array}\right.$

[Phương pháp trắc nghiệm] : Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 cực trị khi và chỉ khi a và b trái dấu , tức là : $ab < 0$

Suy ra : $m(m+1) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 0 \end{array}\right.$

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m+3)x - 1$ không có cực trị ?

A. $m \geq -\frac{5}{3}$. B. $m > -\frac{5}{3}$. C. $m \geq -\frac{8}{3}$. D. $m \leq -\frac{8}{3}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$y' = 3x^2 - 4x + m + 3$

Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow \Delta'_{y'} \leq 0 \Leftrightarrow 4 - 3(m+3) \leq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{3}$

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+1)x - 1$ đạt cực đại

tại $x = -2$?

A. Không tồn tại m. B. -1. C. 2. D. 3.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$y' = x^2 - 2mx + m + 1$

$y'' = 2x - 2m$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$ khi : $\begin{cases} y'(-2) = 0 \\ y''(-2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 4m + m + 1 = 0 \\ 4 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m > 2 \end{cases}$ (không tồn tại m).

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên .

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng?

A. Hàm số có giá trị cực tiểu là $-\frac{1}{3}$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

D. Hàm số không có cực trị.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 + 2x^2 + mx + 1$ có 2 điểm cực trị
thỏa mãn $x_{CĐ} < x_{CT}$.

A. $0 < m < 2$. B. $-2 < m < 0$. C. $-2 < m < 2$. D. $m < 2$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$y' = mx^2 + 4x + m$

ycbt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{y'} > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m^2 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2$

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số: $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+\left(m+6\right)x+m$ có cực đại và cực tiểu .

A. $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>3 \end{array}\right.$. B. $-2<m<3$. C. $\left[\begin{array}{l} m\le -2 \\ m\ge 3 \end{array}\right.$. D. $-2\le m\le 3$.

Hướng dẫn giải:

$y'=x^2+2mx+m+6$

Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow$ $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow m^2-m-6>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>3 \end{array}\right.$$

Câu 8. Tìm tất các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\left(m+2\right)x^3+3x^2+mx-6$ có 2 cực trị ?

A. $m\in\left(-3;1\right)\backslash\left\{-2\right\}$. B. $m\in\left(-3;1\right)$. C. $m\in\left(-\infty;-3\right)\cup\left(1;+\infty\right)$. D. $m\in\left[-3;1\right]$.

Hướng dẫn giải:

$y'=3\left(m+2\right)x^2+6x+m$

Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow$ $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} m\ne -2 \\ m^2+2m-3<0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} m\ne -2 \\ -3<m<1 \end{array}\right.\Leftrightarrow m\in\left(-3;1\right)\backslash\left\{-2\right\}$$

Câu 9. Tìm tất các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+(m+3)x^2+4\left(m+3\right)x+m^3-m$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $-1<x_1<x_2$.

A. $-\frac{7}{2}<m<-3$. B. $-3<m<1$. C. $\left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>1 \end{array}\right.$. D. $-\frac{7}{2}<m<-2$.

Hướng dẫn giải:

$y'=x^2+2(m+3)x+4\left(m+3\right)$

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow$ $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $-1<x_1<x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)^2-4(m+3)>0 \\ (x_1+1)(x_2+1)>0 \\ x_1+x_2>-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+3)(m-1)>0 \\ x_1x_2+(x_1+x_2)+1>0 \\ x_1+x_2>-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<-3 \\ m>1 \end{array}\right. \\ m>-\dfrac{7}{2} \\ m<-2 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{7}{2}<m<-3$$

Câu 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+(\mathrm{m}^2-m+2)x^2+(3m^2+1)x$ đạt cực tiểu tại $x=-2$.

A. $m=3$.

B. $\left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=1 \end{array}\right.$.

C. $m=1$.

D. $\left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=-1 \end{array}\right.$

.

Hướng dẫn giải:

$y'=x^2+2(m^2-m+2)x+3m^2+1$

$y''=2x+2(m^2-m+2)$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-2$ khi:

$$\begin{cases} y'(-2)=0 \\ y''(-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2+4m-3=0 \\ m^2-m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m=3$$

Câu 11. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số: $y=\frac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+\frac{1}{6}$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+2x_2=1$.

A. $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{2}{3} \\ m=2 \end{array}\right.$.

B. $1-\frac{\sqrt{6}}{2}<m<1+\frac{\sqrt{6}}{2}$.

C. $m\in\left(1-\frac{\sqrt{6}}{2};1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\backslash\{0\}$.

D. $m=2$.

Hướng dẫn giải:

$y'=mx^2-2(m-1)x+3(m-2)$

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$ thỏa mãn: $x_1+2x_2=1$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases} m\ne 0\\ (m-1)^2-3m(m-2)>0\\ x_1x_2=\dfrac{3(m-2)}{m}\\ x_1+x_2=\dfrac{2(m-1)}{m}\\ x_1+2x_2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\ne 0\\ 1-\dfrac{\sqrt{6}}{2}<m<1+\dfrac{\sqrt{6}}{2}\\ x_1=\dfrac{3m-4}{m}\\ x_2=\dfrac{2-m}{m}\\ x_1x_2=\dfrac{3(m-2)}{m}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\ne 0\\ 1-\dfrac{\sqrt{6}}{2}<m<1+\dfrac{\sqrt{6}}{2}\\ x_1=\dfrac{3m-4}{m}\\ x_2=\dfrac{2-m}{m}\\ \left(\dfrac{3m-4}{m}\right)\left(\dfrac{2-m}{m}\right)=\dfrac{3(m-2)}{m}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=2\\ m=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$$

Câu 12. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=mx^4+(m-1)x^2+m$ chỉ có đúng một cực trị.

A. $\left[\begin{array}{l} m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.$. B. $\left[\begin{array}{l} m<0\\ m\ge 1\end{array}\right.$. C. $0<m\le 1$. D. $0\le m\le 1$.

Hướng dẫn giải:

Trường hợp 1: $m=0$

Ta có hàm số: $y=-x^2$, hàm số này có 1 cực trị. Vậy $m=0$ thỏa mãn.

Trường hợp 2: $m\ne 0$

$y'=4mx^3+2(m-1)x$

Hàm số có đúng 1 cực trị $\Leftrightarrow\dfrac{m-1}{m}\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m\ge 1\\ m<0\end{array}\right.$

Kết hợp TH1 và TH2, ta có: $\left[\begin{array}{l} m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.$ thỏa mãn.

Câu 13. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=mx^4+(m^2-4m+3)x^2+2m-1$ có ba điểm cực trị.

A. $m\in(-\infty;0)\cup(1;3)$. B. $m\in(0;1)\cup(3;+\infty)$.

C. $m\in(-\infty;0)$. D. $m\in(1;3)$.

Hướng dẫn giải:

$y' = 4mx^3 + 2(m^2 - 4m + 3)x$

Hàm số có 3 cực trị

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \dfrac{m^2 - 4m + 3}{m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \in (-\infty; 0) \cup (1; 3) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; 0) \cup (1; 3)$

Câu 14. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

A. $m = \pm 1$. B. $m \neq 0$. C. $m = 1$. D. $m = -1$.

Hướng dẫn giải:

$y' = 4x^3 - 4m^2x$

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m^2) = 0$

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m \neq 0$

Khi đó 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số là : $A(0;1)$, $B(m; 1 - m^4)$, $C(-m; 1 - m^4)$

Do tính chất đối xứng, ta có ΔABC cân tại đỉnh A .

Vậy ΔABC chỉ có thể vuông cân tại đỉnh

$A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -m^2 + m^8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \pm 1 \end{array} \right.$

Kết hợp điều kiện ta có: $m = \pm 1$ (thỏa mãn).

Lưu ý: có thể sử dụng công thức $\dfrac{b^3}{8a} + 1 = 0$.

Câu 15. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

A. $m = 0$. B. $m = -1$. C. $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -1 \end{array} \right.$. D. Không tồn tại m.

Hướng dẫn giải:

$y' = 4x^3 - 4(m+1)x$

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m - 1) = 0$

Hàm số có điểm 3 cực trị $\Leftrightarrow m > -1$

Khi đó 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số là :
$A\left(0;m^2\right),\ B\left(-\sqrt{m+1};-2m-1\right),\ C\left(\sqrt{m+1};-2m-1\right)$

Do tính chất đối xứng, ta có ΔABC cân tại đỉnh A .

Vậy ΔABC chỉ có thể vuông cân tại đỉnh $A \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

$$\Leftrightarrow -\left(m+1\right)+(-m^2-2m-1)^2=0 \Leftrightarrow m^4+4m^3+6m^2+3m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-1 \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện ta có: $m=0$ (thỏa mãn).

Lưu ý: Có thể làm theo cách khác:

+) Cách 1: Gọi *M* là trung điểm của *BC*, tìm tọa độ điểm *M*, ΔABC vuông tại đỉnh *A* thì $2AM=BC$.

+) Cách 2: Sử dụng định lý Pitago $BC^2=AB^2+AC^2$

+) Cách 3: $\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\cos 45^0$

+) Hoặc sử dụng công thức $\dfrac{b^3}{8a}+1=0$

Câu 16. Tìm các giá trị của tham số *m* để đồ thị hàm số: $y=x^4-2mx^2+2m+m^4$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác đều.

A. $m=\sqrt[3]{3}$. B. $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\sqrt[3]{3} \end{array}\right.$. C. $m=\pm\sqrt{3}$. D. Không tồn tại m.

Hướng dẫn giải:

$y'=4x^3-4mx$
$y'=0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2-m\right)=0$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow m>0$

Khi đó 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số là :
$A\left(0;m^4+2m\right),\ B\left(-\sqrt{m};\mathrm{m}^4-m^2+2m\right),\ C\left(\sqrt{m};\mathrm{m}^4-m^2+2m\right)$

Do tính chất đối xứng, ta có ΔABC cân tại đỉnh A .

Vậy ΔABC đều chỉ cần $AB=BC \Leftrightarrow m+m^4=4m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\sqrt[3]{3} \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta có: $m=\sqrt[3]{3}$ (thỏa mãn).

Lưu ý: có thể sử dụng công thức $\frac{b^3}{8a}+3=0 \Leftrightarrow \frac{(-2m)^3}{8}+3=0 \Leftrightarrow m^3=3 \Leftrightarrow m=\sqrt[3]{3}$

Câu 17. Khoảng cách giữa 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x$ là:

A. $2\sqrt{5}$. B.2. C. $4\sqrt{5}$. D.4.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y=x^3-3x$

Các điểm cực trị: $A(1;-2);B(-1;2)$. Nên ta có $AB=2\sqrt{5}$.

Câu 18. Cho hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2+3$ có đồ thị là (C) . Diện tích tam giác có các đỉnh là các điểm cực trị của đồ thị (C) là:

A. $m=8$. B. $m=16$. C. $m=32$. D. $m=4$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2+3$

Các điểm cực trị: $A(-2;-1);B(0;3);C(2;-1)$.

Các điểm cực trị tạo thành tam giác cân tại B. $H(0;-1)$ là trung điểm của AC.

Nên $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BH.AC=\frac{1}{2}.4.4=8$.

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-1)x-3$ có cực trị.

A. $m\neq 1$. B. $\forall m$. C. $m\leq 1$. D. $m\geq 1$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y'=x^2-2mx+2m-1$

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow$ $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=m^2-2m+1>0 \Leftrightarrow m\neq 1$.

Câu 20. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=mx^4+\left(m^2-9\right)x^2+10$ có 3 điểm cực trị.

A. $\left[\begin{array}{l}0<m<3\\ m<-3\end{array}\right.$. B. $m<-3$. C. $0<m\le 3$. D. $\left[\begin{array}{l}0<m<3\\ m\le -3\end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Để hàm số có ba cực trị thì trước hết hàm số phải là hàm số trùng phương tức $m\neq 0$.

Ta có : $y'=4mx^3+2\left(m^2-9\right)x=4mx(x^2+\dfrac{m^2-9}{2m})$.

Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi : y' có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \dfrac{m^2-9}{2m}<0$

$\Leftrightarrow\ m\left(m^2-9\right)<0\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<m<3\\ m<-3\end{array}\right.$.

Vậy các giá trị cần tìm của m là : $\left[\begin{array}{l}0<m<3\\ m<-3\end{array}\right.$.

Câu 21. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\left(m+1\right)x^4-mx^2+\dfrac{3}{2}$ chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $-1\le m\le 0.$ B. $m<-1.$ C. $m>1.$ D. $-1\le m<0.$

Hướng dẫn giải

Ta xét hai trường hợp sau đây:

TH1: $m+1=0\ \Leftrightarrow\ m=-1$. Khi đó $y=x^2+\dfrac{3}{2}\ \Rightarrow$ hàm số chỉ có cực tiểu ($x=0$) mà không có cực đại $\Rightarrow\ m=-1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH2: $m+1\neq 0\ \Leftrightarrow\ m\neq -1$. Khi đó hàm số đã cho là hàm số trùng phương ta có :

$$y'=4\left(m+1\right)x^3-2mx=4\left(m+1\right)x\left[x^2-\frac{m}{2\left(m+1\right)}\right].$$

Hàm số chỉ có cực tiểu mà không có cực đại $\Leftrightarrow\ y'$ có đúng một nghiệm và đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua nghiệm này $\Leftrightarrow \begin{cases}4\left(m+1\right)>0\\ \dfrac{m}{2\left(m+1\right)}\le 0\end{cases} \Leftrightarrow\ -1<m\le 0$.

Kết hợp những giá trị m tìm được, ta có $-1 \le m \le 0$.

Câu 22. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m-1)x + 2$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số có hoành độ dương.

A. $m > 1$. B. $m \ge 1$. C. $m \ge 0$. D. $0 \le m \le 1$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + m - 1$.

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi PT $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

Điều này tương đương $\Delta' = 9m^2 - 3(m-1) > 0 \Leftrightarrow 3m^2 - m + 1 > 0$ (đúng với mọi m).

Hai điểm cực trị có hoành độ dương $\Leftrightarrow \begin{cases} S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m > 0 \\ \dfrac{m-1}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$

Vậy các giá trị cần tìm của m là $m > 1$.

Câu 23. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3mx + 1$ có 2 điểm cực trị A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O (với O là gốc tọa độ).

A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = -\frac{1}{2}$. C. $m = 1$. D. $m = \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y' = -3x^2 + 3m$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - m = 0 \, (*)$

Đồ thị hàm số (1) có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ PT $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0 \, (**)$

Khi đó 2 điểm cực trị $A\left(-\sqrt{m}; 1 - 2m\sqrt{m}\right)$, $B\left(\sqrt{m}; 1 + 2m\sqrt{m}\right)$

Tam giác OAB vuông tại O $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow 4m^3 + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy $m = \frac{1}{2}$.

Câu 24. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 12mx - 3m + 4$ (C) có hai điểm cực trị là A và B sao cho hai điểm này cùng với điểm $C\left(-1; -\frac{9}{2}\right)$ lập thành tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

A. $m=-\frac{1}{2}$. B. $m=-2$. C. $m=2$. D. $m=\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y'=3x^2-6(m+1)x+12m$. Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ $(m-1)^2>0 \Leftrightarrow m\neq 1$ (*). Khi đó hai điểm cực trị là

$A(2;9m), B(2m;-4m^3+12m^2-3m+4)$.

ΔABC nhận O làm trọng tâm $\Leftrightarrow \begin{cases} 2+2m-1=0 \\ -4m^3+12m^2+6m+4-\frac{9}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$ (thoả (*).

Câu 25. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số

$y=\frac{2}{3}x^3-mx^2-2\left(3m^2-1\right)x+\frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho

$x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1$.

A. $m=\frac{2}{3}$. B. $m=-\frac{2}{3}$. C. $m=0$. D. $m=-\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y'=2x^2-2mx-2\left(3m^2-1\right)=2\left(x^2-mx-3m^2+1\right)$,

$g\left(x\right)=x^2-mx-3m^2+1$ là tam thức bậc hai có $\Delta=13m^2-4$. Do đó hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $g\left(x\right)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\frac{2\sqrt{13}}{13} \\ m<-\frac{2\sqrt{13}}{13} \end{array}\right. . \qquad (1)$$

x_1, x_2 là các nghiệm của $g\left(x\right)$ nên theo định lý Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1x_2=-3m^2+1 \end{cases}$.

Do đó $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1 \Leftrightarrow -3m^2+2m+1=1 \Leftrightarrow -3m^2+2m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\frac{2}{3} \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện (1), ta thấy chỉ $m=\frac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

VẬN DỤNG CAO (tối thiểu 10 câu)

Câu 26. Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3\left(m^2 - 1\right)x - m^3 + m$. Tìm tất cả các
giá trị của tham số thực m để : $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7$

A. $m = \pm 2$. B. $m = \pm\sqrt{2}$. C. $m = 0$. D. $m = \pm 1$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$y' = 3x^2 - 6mx + 3\left(m^2 - 1\right)$

Hàm số luôn luôn có cực trị với moi m

Theo định lí Viet : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1.x_2 = m^2 - 1 \end{cases}$

$x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7 \Leftrightarrow (2m)^2 - 3\left(m^2 - 1\right) = 7 \Leftrightarrow$ m= ±2

Cách 2 : y'=0 $\Leftrightarrow x^2 - 2mx + \left(m^2 - 1\right)$=0$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m+1 \\ x = m-1 \end{array}\right.$

$x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 7 \Leftrightarrow (m+1)^2 + (m-1)^2 - (m-1)(m+1) = 7$

$\Leftrightarrow m = \pm 2$.

Câu 27. Cho hàm số $y = (m-1)x^4 - 3mx^2 + 5$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số
có cực đại mà không có cực tiểu

A. $m \in [0;1]$. B. $m \in (-\infty;0] \cup [1;+\infty)$.

C. $m \in (0;1)$. D. $m \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$y' = 4(m-1)x^3 - 6mx = 0$ **(*)**

Th1 : Nếu $m = 1$, (*) trở thành : $y' = -6x = 0$ hay x= 0 , $y'' = -6 < 0$

Vậy $m = 1$ hàm số đạt cực đại tại $x = 0$

Th2 : Nếu $m \neq 1$

(*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=\dfrac{3m}{2(m-1)} \end{array}\right.$

Hàm số có cực đại mà ko có cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} m-1<0 \\ \dfrac{3m}{2(m-1)} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m < 1$

Kết hợp 2 trường hợp : $m \in [0;1]$

Câu 28. Cho hàm số $y = x^4 - 2(1-m^2)x^2 + m + 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm
số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số lập thành tam giác có diện tích lớn nhất .

A. $m=0.$ B. $m=\frac{1}{2}.$ C. $m=-\frac{1}{2}.$ D. $m=1.$

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$y' = 4x^3 - 4(1-m^2)x$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=1-m^2 \end{array}\right.$

Hàm số có cực đại , cực tiểu khi và chỉ khi : $|m|<1$

Tọa độ điểm cực trị $A(0;m+1)$

$B\left(\sqrt{1-m^2};-m^4+2m^2+m\right)$

$C\left(-\sqrt{1-m^2};-m^4+2m^2+m\right)$

$\overrightarrow{BC} = \left(-2\sqrt{1-m^2};0\right)$

Phương trình đường thẳng BC : $y + m^4 - 2m^2 - m = 0$

$d(A, BC) = m^4 - 2m^2 + 1$, $BC = 2\sqrt{1-m^2}$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC.d[A,BC] = \sqrt{1-m^2}\left(m^4-2m^2+1\right) = \sqrt{\left(1-m^2\right)^5} \le 1$$

Vậy S đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow m=0$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

$$\overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{1-m^2};-m^4+2m^2-1\right)$$

$$\overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{1-m^2};-m^4+2m^2-1\right)$$

Khi đó S = $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right|$ **=** $\sqrt{1-m^2}\left(m^4-2m^2+1\right) = \sqrt{\left(1-m^2\right)^5} \le 1$

Vậy S đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow m=0$.

Câu 29. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=2x^3+3\left(m-3\right)x^2+11-3m$ có hai điểm cực
trị. Đồng thời hai điểm cực trị đó và điểm $C\left(0;-1\right)$ thẳng hàng .

A. $m=4.$ B. $m=1.$ C. $m=-3.$ D. $m=2.$

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$$y'=6x^2+6\left(m-3\right)x$$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3-m \end{array}\right.$$

Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow m\neq 3$

Khi đó đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực trị $A\left(0;11-3m\right)$

$$B\left(3-m;m^3-9m^2+24m-16\right)$$

$$\overrightarrow{AB}=\left(3-m,\left(3-m\right)^3\right).$$

Phương trình đt AB : $\left(3-m\right)^2x+y-11+3m=0$

A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow C\in AB$

Hay : $-1-11+3m=0 \Leftrightarrow m=4$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1 : Bấm Mode 2 (CMPLX)

Bước 2 : $y-\frac{y'.y"}{18a}=2x^3+3(y-3)x^2+11-3y-\frac{(6x^2+6(y-3)x)(12x+6(y-3))}{36}$

Bước 3 : Cacl $x=i$, $y=1000$

Kết quả : $-2989-994009i$. Hay : $y=-2989-994009x$

Từ đó : $-2989=-3m+11$, $-994009=-(m-3)^2$

Vậy phương trình đt qua 2 điểm cực trị AB là : $(3-m)^2x+y-11+3m=0$

A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow C\in AB$

Hay : $-1-11+3m=0\Leftrightarrow m=4$.

Câu 30. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số:
$y=x^3-3mx+2$ cắt đường tròn tâm $I(1;1)$ bán kính bằng 1 tại 2 điểm A,B mà diện tích tam giác IAB lớn nhất .

A. $m=1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B. $m=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $m=1\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

D. $m=1\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$y'=3x^2-3m$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{m}\\x=-\sqrt{m}\end{array}\right.$. Hàm số có 2 cực trị khi và chỉ khi : $m>0$

Khi đó tọa độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $M\left(\sqrt{m};-2m\sqrt{m}+2\right)$

$N\left(-\sqrt{m};2m\sqrt{m}+2\right)\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\left(-2\sqrt{m};4m\sqrt{m}\right)$

Phương trình đt MN : $2mx+y-2=0$

(Học sinh có thể dùng cách lấy y chia cho y')

Ta có : $S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IA.IB.\sin AIB = \frac{1}{2}\sin AIB \le \frac{1}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi $AIB = 90^0 \Rightarrow d[I, MN] = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow m = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1 : Bấm Mode 2 (CMPLX)

Bước 2 : $y - \frac{y'.y''}{18a} = 2x^3 - 3yx + 2 - \frac{(6x^2-3y)(12x)}{18}$

Bước 3 : Cacl $x = i$, $y = 1000$

Kết quả : $2 - 2000i$. Hay : y= $2 - 2000x$

Từ đó : $-2000 = -2m$,

Vậy phương trình đt qua 2 điểm cực trị A, B là : $y = 2 - 2mx$ hay $2mx + y - 2 = 0$

Giải như tự luận ra kết quả .

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx$ có hai điểm cực trị A, B sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng : $y = x + 2$.

A. $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=3 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=2 \end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-3 \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Ta có : $y = 6x^2 - 6(m+1)x + 6m$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=m \end{array}\right.$

Điều kiện để hàm số có 2 điểm cực trị là : $m \ne 1$

Ta có : $A(1; 3m-1)$ $B(m; -m^3 + 3m^2)$

Hệ số góc đt AB là : $k=-(m-1)^2$

Đt AB vuông góc với đường thẳng $y=x+2$ khi và chỉ khi $k=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1 : Bấm Mode 2 (CMPLX)

Bước 2 : $y-\dfrac{y'.y"}{18a}=2x^3-3(y+1)x^2+6yx-\dfrac{(6x^2-6(y+1)x+6y)(12x-6(y+1))}{36}$

Bước 3 : Cacl $x=i$, $y=1000$

Kết quả : $1001000-9980001.i$. Hay : $y=1001000-9980001.x$

Vậy phương trình đt qua 2 điểm cực trị AB là : $y=m^2-m-(m-1)^2x$

Có đt AB vuông góc với đường thẳng $y=x+2$ khi và chỉ khi $\Leftrightarrow (m-1)^2=1$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Câu 32. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+3(m+2)x-m-6$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số có
2 cực trị cùng dấu .

A. $\dfrac{-17}{4}<m<2$. B. $\dfrac{-15}{4}<m<2$. C. $\dfrac{-21}{4}<m<2$. D. $\dfrac{-23}{4}<m<2$
.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$y'=3x^2-12x+3(m+2)$

$y'=0 \Leftrightarrow y'=x^2-4x+(m+2)=0$

Hàm số có 2 điểm cực trị x_1, x_2 $\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow m<2$

Chia y cho y' ta được : $y=\dfrac{1}{3}y'(x-2)+(m-2)(2x+1)$

Điểm cực trị tương ứng : $A\left(x_1;(m-2)(2x_1+1)\right)$ và $B\left(x_2;(m-2)(2x_2+1)\right)$

Có : $y_1.y_2 = (m-2)^2\left(4x_1x_2 + 2(x_1+x_2)+1\right)$

Với : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1x_2 = m+2 \end{cases}$ nên : $y_1.y_2 = (m-2)^2(4m+17)$

Hai cực trị cùng dấu $\Leftrightarrow y_1.y_2 > 0 \Leftrightarrow (m-2)^2(4m+17) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{-17}{4} \\ m \neq 2 \end{cases}$

Kết hợp đk : $-\dfrac{17}{4} < m < 2$.

Câu 33. Cho hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + m$. Giả sử đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là A, B đồng thời A, B cùng với gốc tọa độ O không thẳng hàng. Khi đó chu vi ΔOAB nhỏ nhất bằng bao nhiêu ?

A. $\sqrt{10}+\sqrt{2}$.

B. $\sqrt{10}-\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{20}-\sqrt{10}$.

D. $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Ta có : $y' = 6x^2 - 18x + 12$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y(1) = 5+m \\ x = 2 \Rightarrow y(2) = 4+m \end{array}\right.$$

$A(1;5+m)$ và $B(2;4+m)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

$\overrightarrow{OA} = (1;5+m)$, $\overrightarrow{OB} = (2;4+m)$, $\overrightarrow{AB} = (1;-1)$

OAB là 1 tam giác $\Leftrightarrow -4-m \neq 2 \Leftrightarrow m \neq -6$

Chu vi của ΔOAB là: $2p = \sqrt{1+(m+5)^2} + \sqrt{4+(m+4)^2} + \sqrt{2}$

Sử dụng tính chất $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u}+\vec{v}|$ với $\vec{u} = (1;-5-m)$ và $\vec{v} = (2;4+m)$

Từ đó ta có : $\sqrt{1+(m+5)^2} + \sqrt{4+(m+4)^2} + \sqrt{2} \geq \sqrt{3^2+(-1)^2} + \sqrt{2} = \sqrt{10}+\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u},\vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \dfrac{-5-m}{4+m} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m = -\dfrac{14}{3}$.

Vậy chu vi ΔOAB nhỏ nhất bằng $\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)$ khi $m=-\dfrac{14}{3}$.

Câu 34. Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m-1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành 1 tam giác nhận gốc tọa độ O làm trực tâm .

A. $m=1$. B. $m=2$. C. $m=3$. D. $m=4$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$y'=4x^3-4mx$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m \end{array}\right.$. Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m>0$

Khi đó đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị là:

$A(0;m-1)$

$B\left(\sqrt{m};m^2+m-1\right)$

$C\left(-\sqrt{m};m^2+m-1\right)$

Vì B,C đối xứng nhau qua trục tung nên $BC\perp OA$

Do đó O là trực tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow OB\perp AC$ hay $\overrightarrow{OB}\overrightarrow{AC}=0$

Với $\overrightarrow{OB}=\left(\sqrt{m},m^2+m-1\right),\overrightarrow{AC}=\left(-\sqrt{m},m^2\right)$

Từ đó : $-m+m^2\left(m^2+m-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=1 \end{array}\right.$

Vậy $m=1$ là gtct .

Câu 35. Tính theo m khoảng cách giữa điểm cực đại và điểm cực tiểu (nếu có) của đồ thị hàm số: $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2-x+m+1$.

A. $\dfrac{2}{3}\sqrt{\left(m^2+1\right)\left(4m^4+8m^2+13\right)}$. B. $\dfrac{4}{9}\sqrt{\left(2m^2+1\right)\left(4m^4+8m^2+13\right)}$. C. $\dfrac{2}{3}\sqrt{\left(m^2+1\right)\left(4m^4+5m^2+9\right)}$. D. $\sqrt{\left(4m^2+4\right)\left(4m^4+8m^2+10\right)}$.

Hướng dẫn giải: (Phương pháp trắc nghiệm)

Cách 1:

$y' = x^2 - 2mx - 1$

$\Delta' = m^2 + 1 > 0 \forall m$, suy ra hàm số có 2 cực trị $\forall m$ .Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của pt $y' = 0$

Bấm máy tính:

$$\frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1 - \left(x^2 - 2mx - 1\right)\left(\frac{x}{3} - \frac{m}{3}\right) \xrightarrow{x=i, m=A=1000} \frac{2003}{3} - \frac{2000002}{3}i$$
$$= \frac{2m+3}{3} - \frac{2m^2+2}{3}x$$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A\left(x_1; \frac{2m+3}{3} - \frac{2m^2+2}{3}x_1\right);\ B\left(x_2; \frac{2m+3}{3} - \frac{2m^2+2}{3}x_2\right)$$

$$AB^2 = \left(x_2 - x_1\right)^2 + \frac{4}{9}\left(m^2+1\right)^2\left(x_2 - x_1\right)^2 = \left(x_2 - x_1\right)^2\left(1 + \frac{4}{9}\left(m^2+1\right)^2\right)$$
$$= \left(4m^2+4\right)\left(1 + \frac{4}{9}\left(m^2+1\right)^2\right) = \frac{\left(4m^2+4\right)\left(4m^4+8m^2+13\right)}{9} \Rightarrow AB = \frac{2}{3}\sqrt{\left(m^2+1\right)\left(4m^4+8m^2+13\right)}$$

Cách 2: ***Sử dụng công thức*** $AB = \sqrt{\dfrac{4e+16e^3}{a}}$ với $e = \dfrac{b^2 - 3ac}{9a}$

$$e = \frac{m^2+1}{3} \Rightarrow AB = \sqrt{\frac{4e+16e^3}{a}} = \frac{2}{3}\sqrt{\left(m^2+1\right)\left(4m^4+8m^2+13\right)}.$$

Câu 36. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y = 2x^3 + 3\left(m-1\right)x^2 + 6m\left(1-2m\right)x$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trên đường thẳng có phương trình: $y = -4x\ (d)$.

A. $m = 1$.

B. $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \\ m = \frac{1}{2} \end{array}\right.$.

D. $m = \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải: (Phương pháp trắc nghiệm)

$y' = 6x^2 + 6\left(m-1\right)x + 6m\left(1-2m\right)$

Hàm số có 2 cực trị $m \ne \frac{1}{3}$

Bấm máy tính:

$$2x^3+3(m-1)x^2+6m(1-2m)x-\left(6x^2+6(m-1)x+6m(1-2m)\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{m-1}{6}\right)\xrightarrow{x=i,m=A=1000}$$

$$1997001000-8994001i=\left(2.10^9-3.10^6+10^3\right)-\left(9.10^6-6.10^3+1\right)i=$$

$$=-\left(9m^2-6m+1\right)x+2m^3-3m^2+m$$

Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là: $y=-\left(9m^2-6m+1\right)x+2m^3-3m^2+m\ (\Delta)$

$$\Delta \equiv d \Leftrightarrow \begin{cases}-\left(9m^2-6m+1\right)=-4\\ 2m^3-3m^2+m=0\end{cases} \Leftrightarrow m=1.$$

Câu 37. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^3+mx^2+7x+3$ có đường thẳng đi qua điểm cực đại và điểm cực tiểu vuông góc với đường thẳng có phương trình : $y=3x\ (d)$.

A. $m=\pm\sqrt{\frac{45}{2}}$. B. $\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=1\end{array}\right.$. C. $m=2$. D. $m=\pm\sqrt{\frac{47}{2}}$.

<u>**Hướng dẫn giải: (Phương pháp trắc nghiệm)**</u>

$y'=3x^2+2mx+7$

Hàm số có 2 cực trị $|m|>\sqrt{21}$

Bấm máy tính:

$$x^3+mx^2+7x+3-\left(3x^2+2mx+7\right)\left(\frac{x}{3}+\frac{m}{9}\right)\xrightarrow{x=i,m=A=1000}-\frac{6973}{9}-\frac{1999958}{9}i=$$

$$=-\frac{7000-27}{9}-\left(\frac{2.10^6-42}{9}\right)i=-\left(\frac{2m^2-42}{9}\right)x+\frac{7m-27}{9}$$

Đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là: $y=-\left(\frac{2m^2-42}{9}\right)x+\frac{7m-27}{9}\ (\Delta)$

$$\Delta \perp d \Leftrightarrow -\left(\frac{2m^2-42}{9}\right)3=-1 \Leftrightarrow m^2=\frac{45}{2} \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{\frac{45}{2}}$$ (thỏa mãn).

Câu 38. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=-x^3+3x^2+3(m^2-1)x-3m^2-1$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu cùng với gốc tọa độ tạo thành tam giác vuông tại O.

A. $m=\pm 1$.

B. $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} m=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ m=\pm 1 \end{array}\right.$.

D. $m=1$.

Hướng dẫn giải: (Phương pháp trắc nghiệm)

$y'=-3x^2+6x+3(m^2-1)$

Hàm số có 2 cực trị $m\neq 0$, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y'=0$

Bấm máy tính:

$$-x^3+3x^2+3(m^2-1)x-3m^2-1-\left(-3x^2+6x+3(m^2-1)\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\right)\xrightarrow{x=i,m=A=1000}$$

$$-2000002+2000000i=-\left(2.10^6+2\right)+2.10^6 i=2m^2x-2m^2-2$$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(x_1;2m^2x_1-2m^2-2)$; $B(x_2;2m^2x_2-2m^2-2)$

ΔOAB vuông tại $O\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$

$\Leftrightarrow x_1x_2+(2m^2x_1-2m^2-2)(2m^2x_2-2m^2-2)=0$

$\Leftrightarrow x_1x_2+4m^4x_1x_2-4m^2(m^2+1)(x_1+x_2)+4(m^2+1)^2=0$

$\Leftrightarrow (1-m^2)(1+4m^4)+4(m^2+1)(1+m^2-2m^2)=0$

$\Leftrightarrow (1-m^2)(4m^4+4m^2+5)=0\Leftrightarrow m=\pm 1.$

Câu 39. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^3-3x^2-mx+2$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu cách đều đường thẳng có phương trình: $y=x-1\ (d)$.

A. $m=0$.

B. $\left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-\dfrac{9}{2} \end{array}\right.$.

C. $m=2$.

D. $m=-\dfrac{9}{2}$.

Hướng dẫn giải: (Phương pháp trắc nghiệm)

$y'=3x^2-6x-m$

Hàm số có 2 cực trị $m>-3$, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y'=0$, ta có: $x_1+x_2=2$

Bấm máy tính:

$$x^3-3x^2-mx+2-\left(3x^2-6x-m\right)\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\right)\xrightarrow{x=i,m=A=1000}$$

$$-\frac{994}{3}-\frac{2006}{3}i=-\frac{1000-6}{3}-\frac{2000+6}{3}i=-\frac{2m+6}{3}x-\frac{m-6}{3}$$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A\left(x_1;-\frac{2m+6}{3}x_1-\frac{m-6}{3}\right);\ B\left(x_2;-\frac{2m+6}{3}x_2-\frac{m-6}{3}\right)$$

Gọi I là trung điểm của $AB\Rightarrow I\left(1;-m\right)$

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là: $y=-\frac{2m+6}{3}x-\frac{m-6}{3}\ (\Delta)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\Delta//d\ or\ \Delta\equiv d\\ I\in d\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\frac{2m+6}{3}=1\\ -m=1-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-\frac{9}{2}\\ m=0\end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện thì $m=0$.

Câu 40. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-2mx^2+m-1$ có ba điểm cực trị . Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

A. $\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$. B. $\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\pm\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$. C. $m=\pm\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. D. $m=1$.

<u>**Hướng dẫn giải:**</u>

Ta có: $y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=m\end{array}\right.$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị khi $m>0$ (*)

Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

$$A(0;m-1),\ B\left(-\sqrt{m};-m^2+m-1\right),\ C\left(\sqrt{m};-m^2+m-1\right)$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|y_B-y_A\right|.\left|x_C-x_B\right|=m^2\sqrt{m}\ ;\ AB=AC=\sqrt{m^4+m},\ BC=2\sqrt{m}$$

$$R=\frac{AB.AC.BC}{4S_{\Delta ABC}}=1\Leftrightarrow\frac{\left(m^4+m\right)2\sqrt{m}}{4m^2\sqrt{m}}=1\Leftrightarrow m^3-2m+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\pm\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện (*) ta có $\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\end{array}\right.$.

<u>Phương pháp trắc nghiệm:</u>

Áp dụng công thức: $R=\dfrac{b^3-8a}{8|a|b}\Leftrightarrow 1=\dfrac{(-2m)^3-8}{8(-2m)}\Leftrightarrow m^3+1=2m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện (*) ta có $\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\end{array}\right.$.

Câu 41. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-2m^2x^2+m^4+1$ có ba điểm cực trị . Đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc O tạo thành 1 tứ giác nội tiếp.

A. $m=\pm 1.$ B. $m=1.$ C. $m=-1.$ D. Không tồn tại m.

<u>Hướng dẫn giải:</u>

$y'=y=4x^3-4m^2x$

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m\neq 0$

Khi đó 3 điểm cực trị là: $A\left(0;m^4+1\right),B\left(-m;1\right),C\left(m;1\right)$

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp(nếu có) của tứ giác $ABOC$. Do tính chất đối xứng , ta có:

A,O,I thẳng hàng $\Rightarrow AO$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp(nếu có) của tứ giác $ABOC$.

Vậy $AB\perp OB\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow m^2-m^4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=\pm 1\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện $m=\pm 1$ (thỏa mãn).

Câu 42. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-8m^2x^2+1$ có ba điểm cực trị . Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có diện tích bằng 64.

A. $m=\pm\sqrt[5]{2}.$ B. $m=\sqrt[5]{2}.$ C. $m=-\sqrt[5]{2}.$ D. Không tồn tại m.

Hướng dẫn giải: (Phương pháp trắc nghiệm)

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m\neq 0$

Áp dụng công thức $S_{\Delta ABC}=\frac{b^2}{4|a|}\sqrt{-\frac{b}{2a}}$, ta có:

$S_{\Delta ABC}=\frac{b^2}{4|a|}\sqrt{-\frac{b}{2a}}\Rightarrow 64=\frac{64m^4}{4}\sqrt{\frac{8m^2}{2}}\Leftrightarrow m=\pm\sqrt[5]{2}$ (thỏa mãn).

Câu 43. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-2mx^2+m$ có ba điểm cực trị . Đồng thời ba điểm cực trị đó là ba đỉnh của một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp lớn hơn 1.

A. $m>2.$ B. $m<-1.$

C. $m\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty).$ D. Không tồn tại m.

Hướng dẫn giải: (Phương pháp tự luận)

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m>0$

Ba điểm cực trị là $A(0;m),B\left(-\sqrt{m};m-m^2\right),C\left(\sqrt{m};m-m^2\right)$

Gọi I là trung điểm của $BC\Rightarrow I\left(0;m-m^2\right)$

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AI.BC=m^2\sqrt{m}$

Chu vi của ΔABC là: $2p=AB+BC+AC=2\left(\sqrt{m+m^4}+\sqrt{m}\right)$

Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC là: $r=\frac{S_{\Delta ABC}}{p}=\frac{m^2\sqrt{m}}{\sqrt{m+m^4}+\sqrt{m}}$

Theo bài ra: $r>1\Leftrightarrow\frac{m^2\sqrt{m}}{\sqrt{m+m^4}+\sqrt{m}}>1\Leftrightarrow\frac{m^2\sqrt{m}\left(\sqrt{m+m^4}-\sqrt{m}\right)}{m^4}>1$ (vì $m>0$)

$\Leftrightarrow\sqrt{m}\left(\sqrt{m+m^4}-\sqrt{m}\right)>m^2\Leftrightarrow\sqrt{m^2+m^5}>m^2+m\Leftrightarrow m^2-m-2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>2\end{array}\right.$

So sánh điều kiện suy ra $m>2$ thỏa mãn.

Phương pháp trắc nghiệm:

Sử dụng công thức $r=\dfrac{b^2}{4|a|+\sqrt{16a^2-2ab^3}}\Rightarrow r=\dfrac{4m^2}{4+\sqrt{16+16m^3}}=\dfrac{m^2}{1+\sqrt{1+m^3}}$

Theo bài ra: $r>1\Leftrightarrow \dfrac{m^2}{1+\sqrt{1+m^3}}>1\Leftrightarrow \dfrac{m^2\left(\sqrt{1+m^3}-1\right)}{m^3}>1\Leftrightarrow \sqrt{1+m^3}-1>m$

$\sqrt{1+m^3}>m+1\Leftrightarrow\Leftrightarrow \sqrt{1+m^3}>m+1\Leftrightarrow m^2-m-2>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-1\\ m>2\end{array}\right.$

So sánh điều kiện suy ra $m>2$ thỏa mãn.

Câu 44. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=x^4-(3m-1)x^2+2m+1$ có ba điểm cực trị. Đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với điểm $D(7;3)$ nội tiếp được một đường tròn.

A. $m=3$. B. $m=1$. C. $m=-1$. D. Không tồn tại m.

Phương pháp trắc nghiệm:

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m>\dfrac{1}{3}$

Áp dụng công thức:

Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC là:

$x^2+y^2-\left(\dfrac{2}{b}-\dfrac{\Delta}{4a}+c\right)y+c\left(\dfrac{2}{b}-\dfrac{\Delta}{4a}\right)=0$

Thay vào ta có phương trình:

$x^2+y^2-\left(\dfrac{-27m^3+75m^2-m-15}{4(3m-1)}\right)y+\dfrac{-54m^4+75m^3+41-27m-11}{4(3m-1)}=0\ (T)$

$D(7;3)\in(T)\Rightarrow 27m^4-78m^3+92m^2-336m+99=0$

Sử dụng chức năng SOLVE, tìm ra nghiệm duy nhất thỏa mãn là $m=3$.

Câu 45. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số: $y=-x^4+2mx^2-4m+1$ có ba điểm cực trị . Đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ tạo thành 1 hình thoi.

A. $\left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1}{4}\\ m=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$. B. $m=1$. C. $m=-1$. D. Không tồn tại m.

Hướng dẫn giải: (Phương pháp tự luận)

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $m > 0$

Ba điểm cực trị là: $A(0;1-4m), B\left(-\sqrt{m};m^2-4m+1\right), C\left(\sqrt{m};m^2-4m+1\right)$

Tứ giác $OBAC$ đã có $OB = OC, AB = AC$. Vậy tứ giác $OBAC$ là hình thoi chỉ cần thêm điều kiện

$$OB = AC \Leftrightarrow m+\left(m^2-4m+1\right)^2 = m+m^4 \Leftrightarrow \left(m^2-4m+1\right)^2 - m^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(m^2-4m+1-m^2\right)\left(m^2-4m+1+m^2\right) = 0 \Leftrightarrow (1-4m)\left(2m^2-4m+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1}{4} \\ m = \dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$ (thỏa mãn).

Câu 46. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3+3x^2+3\left(m^2-1\right)x-3m^2-1$ có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số cách đều gốc tọa độ O.

A. $m = \pm\dfrac{1}{2}$. B. $m = \dfrac{1}{2}$. C. $m = -1$. D. $m = \pm 1$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $y' = -3x^2+6x+3\left(m^2-1\right) = -3\left(x^2-2x-m^2+1\right)$.

$g(x) = x^2-2x-m^2+1$ là tam thức bậc hai có $\Delta' = m^2$. Do đó: y có cực đại cực tiểu $\Leftrightarrow$ y' có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $g(x)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $\Delta' > 0 \Leftrightarrow$ $m \neq 0$. (1)

Khi đó y' có các nghiệm là: $1 \pm m$ $\Rightarrow$ tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(1-m;-2-2m^3\right)$ và $B\left(1+m;-2+2m^3\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{OA}\left(1-m;-2-2m^3\right) \Rightarrow OA^2 = (1-m)^2+4\left(1+m^3\right)^2$.

$\overrightarrow{OB}\left(1+m;-2+2m^3\right) \Rightarrow OB^2 = (1+m)^2+4\left(1-m^3\right)^2$.

A và B cách đều gốc tọa độ khi và chỉ khi :

$$OA = OB \Leftrightarrow OA^2 = OB^2 \Leftrightarrow (1-m)^2+4\left(1+m^3\right)^2 = (1+m)^2+4\left(1-m^3\right)^2$$

$\Leftrightarrow\ -4m+16m^3=0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện (1), ta thấy chỉ $m=\pm\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 47. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+3m^3$ có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 48.

A. $m=\pm 2.$ B. $m=2.$ C. $m=-2.$ D. $m=2$ hoặc $m=0$.

Hướng dẫn giải

$y'=3x^2-6mx=3x(x-2m)$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi : $2m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 0$. (1)

Khi đó, các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0;3m^3)$, $B(2m;-m^3)$.

Ta có: $\overrightarrow{OA}(0;3m^3) \Rightarrow OA=3|m^3|$. (2)

Ta thấy $A\in Oy \Rightarrow OA\equiv Oy \Rightarrow d(B,OA)=d(B,Oy)=2|m|$. (3)

Từ (2) và (3) suy ra $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot OA\cdot d(B,OA)=3m^4$.

Do đó: $S_{\Delta OAB}=48 \Leftrightarrow 3m^4=48 \Leftrightarrow m=\pm 2$ (thỏa mãn (1)).

Câu 48. Cho hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m\ (C)$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số (C) có ba điểm cực trị A, B, C sao cho $OA=BC$; trong đó O là gốc tọa độ, A là điểm cực trị thuộc trục tung, B và C là hai điểm cực trị còn lại.

A. $m=2\pm 2\sqrt{2}.$ B. $m=2+2\sqrt{2}.$

C. $m=2-2\sqrt{2}.$ D. $m=\pm 1.$

Hướng dẫn giải

Ta có : $y'=4x^3-4(m+1)x=4x\left[x^2-(m+1)\right]$.

Hàm số có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi :

y' có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m+1>0 \Leftrightarrow m>-1$. $(*)$

Khi đó, ta có: $y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\sqrt{m+1} \\ x=\sqrt{m+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(0;m) \\ B\left(-\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right), \\ C\left(\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right) \end{cases}$

(vai trò của B, C trong bài toán là như nhau) nên ta giả sử :

$B\left(\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right)$, $C\left(-\sqrt{m+1};-m^2-m-1\right)$).

Ta có : $\overrightarrow{OA}(0;m) \Rightarrow OA=|m|$; $\overrightarrow{BC}\left(2\sqrt{m+1};0\right) \Rightarrow BC=2\sqrt{m+1}$.

Do đó $OA=BC \Leftrightarrow |m|=2\sqrt{m+1} \Leftrightarrow m^2-4m-4=0$ $(\Delta'=8) \Leftrightarrow$ $m=2\pm2\sqrt{2}$ (thỏa mãn $(*)$).

Vậy $m=2\pm2\sqrt{2}$.

Câu 49. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^3$ có các điểm cực đại và cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $(d): y=x$.

A. $m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. B. $m=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. C. $m=0$ hoặc $m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. D. $m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

$y'=3x^2-6mx$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$ Để hàm số có cực đại và cực tiểu thì $m\neq0$.

Giả sử hàm số có hai điểm cực trị là: $A(0;4m^3); B(2m;0) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(2m;-4m^3)$

Trung điểm của đoạn *AB* là $I(m;2m^3)$.

Điều kiện để AB đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$ là AB vuông góc với đường thẳng $(d): y=x$ và $I\in(d)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-4m^3=0 \\ 2m^3=m \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện ta có: $m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 50. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3mx^2+3(m^2-1)x-m^3+m$ có cực trị đồng thời khoảng cách từ điểm cực đại của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O bằng $\sqrt{2}$ lần khoảng cách từ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đến gốc tọa độ O.

A. $m=-3+2\sqrt{2}$ hoặc $m=-3-2\sqrt{2}$.

B. $m=-3+2\sqrt{2}$ hoặc $m=-1$.

C. $m=-3-2\sqrt{2}$ hoặc $m=-1$.

D. $m=-3+2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y'=3x^2-6mx+3(m^2-1)$

Hàm số (1) có cực trị thì PT $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow x^2-2mx+m^2-1=0$ có 2 nhiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=1>0,\forall m$

Khi đó, điểm cực đại $A(m-1;2-2m)$ và điểm cực tiểu $B(m+1;-2-2m)$

Ta có $OA=\sqrt{2}OB \Leftrightarrow m^2+6m+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3+2\sqrt{2} \\ m=-3-2\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Câu 51. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-2m^2x^2+1$ (C) có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

A. $m=\pm 1$.

B. $m=1$ hoặc $m=0$.

C. $m=-1$ hoặc $m=0$.

D. $m=-1$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=4x^3-4m^2x=4x\left(x^2-m^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m^2 \end{array}\right.$

Hàm số (C) có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m\neq 0$ $(*)$. Với điều kiện $(*)$ gọi ba điểm cực trị là:

$A(0;1); B\left(-m;1-m^4\right); C\left(m;1-m^4\right)$. Do đó nếu ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân, thì sẽ vuông cân tại đỉnh A.

Do tính chất của hàm số trùng phương, tam giác ABC đã là tam giác cân rồi, cho nên để thỏa mãn điều kiện tam giác là vuông, thì AB vuông góc với AC.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\left(-m;-m^4\right); \overrightarrow{AC}=\left(m;-m^4\right); \overrightarrow{BC}=(2m;0)$.

Tam giác ABC vuông khi: $BC^2=AB^2+AC^2 \Leftrightarrow 4m^2=m^2+m^8+\left(m^2+m^8\right)$

$$\Leftrightarrow 2m^2\left(m^4-1\right)=0;\Rightarrow m^4=1\Leftrightarrow m=\pm 1$$

Vậy với $m=\pm 1$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Phương pháp trắc nghiệm:

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \dfrac{b^3}{8a}+1=0\Leftrightarrow -m^6+1=0\Leftrightarrow m=\pm 1$

Câu 52. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^3-3mx^2+3m-3$ có hai điểm cực trị A,B sao cho $2AB^2-(OA^2+OB^2)=20$ (Trong đó O là gốc tọa độ).

A. $m=1$ hoặc $m=-\dfrac{17}{11}$.

B. $m=1$.

C. $m=-1$ hoặc $m=-\dfrac{17}{11}$.

D. $m=-1$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=m(3x^2-6x)$

Với mọi $m\neq 0$, ta có $y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\Rightarrow y=3m-3 \\ x=2\Rightarrow y=-m-3 \end{array}\right.$. Vậy hàm số luôn có hai điểm cực trị.

Giả sử $A(0;3m-3);B(2;-m-3)$.

Ta có : $2AB^2-(OA^2+OB^2)=20\Leftrightarrow 11m^2+6m-17=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{17}{11} \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy giá trị m cần tìm là: $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{17}{11} \end{array}\right.$.

Câu 53. Cho hàm số $y=x^3-3x^2$ (C).Tìm tất cả các giá trị thực tham số m để đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị (C) tạo với đường thẳng $\Delta: x+my+3=0$ một góc α biết $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$.

A. $m=2$ hoặc $m=-\dfrac{2}{11}$.

B. $m=-2$ hoặc $m=-\dfrac{2}{11}$.

C. $m=2$ hoặc $m=\dfrac{2}{11}$.

D. $m=2$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng đi qua ĐCĐ, ĐCT là $\Delta_1: 2x+y=0$ có $VTPT\ \vec{n}_1(2;1)$

Đường thẳng đã cho $\Delta: x+my+3=0$ có $VTPT\ \vec{n}_2(1;m)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \cos(\Delta,\Delta_1)=\left|\cos(\vec{n}_1,\vec{n}_2)\right|=\dfrac{|m+2|}{\sqrt{5}.\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{4}{5}$

$$\Leftrightarrow 25(m^2+4m+4)=5.16.(m^2+1)\Leftrightarrow 11m^2-20m-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-\dfrac{2}{11}\end{array}\right.$$

Câu 54. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^4-4(m-1)x^2+2m-1$ có 3 điểm cực trị tạo thành 3 đỉnh của một tam giác đều.

A. $m=1+\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$. B. $m=1$. C. $m=0$. D. $m=1-\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y'=4x^3-8(m-1)x=4x\left(x^2-2(m-1)\right)$.

$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=2(m-1)\end{array}\right.$ nên hàm số có 3 điểm cực trị khi $m>1$.

Với đk $m>1$ đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị là:

$$A(0;2m-1),B\left(\sqrt{2(m-1)};-4m^2+10m-5\right),B\left(-\sqrt{2(m-1)};-4m^2+10m-5\right).$$

Ta có: $\begin{array}{l} AB^2=AC^2=2(m-1)+16(m-1)^4 \\ BC^2=8(m-1)\end{array}$

Để 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành tam giác đều thì:

$$AB=AC=BC\Leftrightarrow AB^2=AC^2=BC^2\Leftrightarrow 2(m-1)+16(m-1)^4=8(m-1)$$

$$\Leftrightarrow 8(m-1)^4-3(m-1)=0\Leftrightarrow (m-1)\left[8(m-1)^3-3\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=1+\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}\end{array}\right.$$

So sánh với điều kiện ta có: $m=1+\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ thỏa mãn.

Phương pháp trắc nghiệm:

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \frac{b^3}{8a}+3=0 \Leftrightarrow -8\left(m-1\right)^3+3=0 \Leftrightarrow m=1+\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$

Câu 55. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* để điểm $M(2m^3;m)$ tạo với hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y=2x^3-3(2m+1)x^2+6m(m+1)x+1$ (C) một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

A. $m=0.$ B. $m=2.$ C. $m=1.$ D. $m=-1.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=6x^2-6(2m+1)x+6m(m+1)$

$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=m+1 \end{array}\right. \Rightarrow \forall m \in \mathbb{R}$, hàm số luôn có CĐ, CT

Tọa độ các điểm CĐ, CT của đồ thị là $A(m;2m^3+3m^2+1)$, $B(m+1;2m^3+3m^2)$

Suy ra $AB=\sqrt{2}$ và phương trình đường thẳng $AB: x+y-2m^3-3m^2-m-1=0$.
Do đó, tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi khoảng cách từ M tới AB nhỏ nhất.

Ta có: $d(M,AB)=\frac{3m^2+1}{\sqrt{2}} \Rightarrow d(M,AB) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \min d(M,AB)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ đạt được khi $m=0$.