

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

NB-TH: 26 câu - VD: 21 câu - VDC: 8 câu

A. LÝ THUYẾT

■ Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K , với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc một đoạn.

✚ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến (tăng) trên K nếu " $x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ".

✚ Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến (giảm) trên K nếu " $x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ".

■ Điều kiện cần để hàm số đơn điệu: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

✚ Nếu hàm số đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.

✚ Nếu hàm số nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$.

■ Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

✚ Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K .

✚ Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K .

✚ Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên khoảng K .

■ Chú ý.

✚ Nếu K là một đoạn hoặc nửa khoảng thì phải bổ sung giả thiết "Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn hoặc nửa khoảng đó". Chẳng hạn: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm $f'(x) > 0, \forall x \in K$ trên khoảng $(a; b)$ thì hàm số đồng biến trên đoạn $[a; b]$.

✚ Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ (hoặc $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$) và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số điểm hữu hạn của K thì hàm số đồng biến trên khoảng K (hoặc nghịch biến trên khoảng K).

B. BÀI TẬP

1.1.1 Chiều biến thiên của hàm số

Câu 1. [NB-TH] Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $K \subseteq \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K, f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm của K thì hàm số tăng trên K .

B. Nếu $f'(x) > 0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K .

C. Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ thì hàm số tăng trên K .

D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến (tăng) trên K nếu " $x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ".

Hướng dẫn giải

Xem phần lý thuyết.

Câu 2. [NB-TH] Cho hàm số $y = \frac{x+1}{1-x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$+) y' = \frac{2}{(1-x)^2} > 0, \quad \forall x \neq 1$$

+) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$

Câu 3. [NB-TH] Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn nghịch biến trên \mathbb{R} .

B. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

D. Hàm số luôn đồng biến trên \mathbb{R} .

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$+) y' = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x-1)^2 \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Câu 4. [NB-TH] Cho hàm số $y = -x^4 + 4x^2 + 10$ và các khoảng sau:

(I) $(-\infty; -\sqrt{2})$; (II) $(-\sqrt{2}; 0)$; (III) $(0; \sqrt{2})$. Hỏi hàm số đồng biến trên các khoảng nào?

A. (I) và (III).

B. (I) và (II).

C. (II) và (III).

D. Chỉ (I).

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

+) $y' = -4x^3 + 8x = 4x(2 - x^2)$. Giải $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

+) Trên các khoảng $(-\infty; -\sqrt{2})$ và $(0; \sqrt{2})$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến.

Câu 5. [NB-TH] Cho hàm số $y = \frac{3x - 1}{-4 + 2x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định.

B. Hàm số luôn nghịch biến trên \mathbb{R} .

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

+) Ta có $y' = -\frac{10}{(-4 + 2x)^2} < 0, \forall x \in D$.

Câu 6. [NB-TH] Hỏi hàm số nào sau đây luôn nghịch biến trên \mathbb{R} ?

A. $f(x) = -\frac{4}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 - x$.

B. $g(x) = x^3 + 3x^2 + 10x + 1$.

C. $h(x) = x^4 - 4x^2 + 4$.

D. $k(x) = x^3 + 10x - \cos^2 x$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'(x) = -4x^4 + 4x^2 - 1 = -(2x^2 - 1)^2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 7. [NB-TH] Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 5}{x + 1}$. Hỏi hàm số nghịch trên các khoảng nào?

A. $(-4; -1)$ và $(-1; 2)$.

B. $(-4; 2)$.

C. $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

D. $(-\infty; -4)$ và $(2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

+) $y' = \frac{x^2 + 2x - 8}{(x + 1)^2}$.

+) Giải $y' = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases}$

y' không xác định khi $x = -1$

+) BBT

x	$-\infty$	-4	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	-11	$+\infty$	1	$+\infty$

+) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-4; -1)$ và $(-1; 2)$

Câu 8. [NB-TH] Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x - 2$. Hỏi hàm số nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $(2; 3)$ B. $(1; 6)$ C. $(-\infty; 1)$ D. $(5; +\infty)$

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

+) $y' = x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$

+) lập bảng biến thiên, suy ra hàm số nghịch biến trên $(1; 5)$

Câu 9. [NB-TH] Cho hàm số $y = \frac{3}{5}x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 2$. Hỏi hàm số đồng biến trên khoảng nào?

- A. \mathbb{R} . B. $(-\infty; 0)$. C. $(0; 2)$. D. $(2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

+) $y' = 3x^4 - 12x^3 + 12x^2 = 3x^2(x - 2)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Câu 10. [NB-TH] Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Hỏi hàm số luôn đồng biến trên \mathbb{R} khi nào?

A. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \geq 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a < 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a = b = c = 0 \\ a < 0; b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 0, c > 0 \\ a > 0; b^2 - 3ac \leq 0 \end{cases}$$

Câu 11. [NB-TH] Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 15$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A. Hàm số đồng biến trên \mathbb{R} .
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$.
C. Hàm số đồng biến trên $(-9; -5)$.
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

+) Do $y' = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x-1)(x+3)$ nên hàm số **không** đồng biến trên \mathbb{R} .

Câu 12. [NB-TH] Cho hàm số $y = \sqrt{3x^2 - x^3}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

- A. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; 3)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2); (2; 3)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; 3)$.

Hướng dẫn giải

+) ĐK: $3x^2 - x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$ suy ra $D = (-\infty; 3]$

+) $y' = \frac{6x - 3x^2}{2\sqrt{3x^2 - x^3}}$

Giải $y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$$y' \text{ không xác định khi } \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

+) BBT

x	$-\infty$	0	2	3
y'		-	+ 0	-
y	$+\infty$			2
		0		0

Hàm số nghịch biến $(-\infty; 0)$ và $(2; 3)$

Hàm số đồng biến $(0; 2)$

Câu 13. [NB-TH] Cho hàm số $y = \frac{x}{2} + \sin^2 x, x \in [0; \rho]$. Hỏi hàm số đồng biến trên khoảng nào?

- A. $\left(0; \frac{7\rho}{12}\right)$ và $\left(\frac{11\rho}{12}; \rho\right)$. B. $\left(\frac{7\rho}{12}; \frac{11\rho}{12}\right)$.
- C. $\left(0; \frac{7\rho}{12}\right)$ và $\left(\frac{7\rho}{12}; \frac{11\rho}{12}\right)$. D. $\left(\frac{7\rho}{12}; \frac{11\rho}{12}\right)$ và $\left(\frac{11\rho}{12}; \rho\right)$.

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$+) y' = \frac{1}{2} + \sin 2x.$$

$$\text{Giải } y' = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

Vì $x \in [0; \pi]$ nên có 2 giá trị $x = \frac{7\pi}{12}$ và $x = \frac{11\pi}{12}$ thỏa mãn điều kiện.

+) BBT

x	0	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$	π			
y'		+	0	-	0	+	
y							

Hàm số đồng biến $\left(0; \frac{7\pi}{12}\right)$ và $\left(\frac{11\pi}{12}; \pi\right)$

Câu 14. [NB-TH] Cho hàm số $y = x + \cos^2 x$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số luôn đồng biến trên \mathbb{R} .

B. Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{\rho}{4} + k\rho; +\infty\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{\rho}{4} + k\rho\right)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{\rho}{4} + k\rho; +\infty\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{\rho}{4} + k\rho\right)$.

D. Hàm số luôn nghịch biến trên \mathbb{R} .

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $D = \mathbb{R}; y' = 1 - \sin 2x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

+) Hàm số luôn đồng biến trên \mathbb{R}

Câu 15. [NB-TH] Cho các hàm số sau:

$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 4$; $y = \frac{x-1}{x+1}$; $y = \sqrt{x^2+4}$; $y = x^3 + 4x - \sin x$ và $y = x^4 + x^2 + 2$

Có bao nhiêu hàm số đồng biến trên những khoảng mà nó xác định?

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 5.

Hướng dẫn giải

$$+) y' = x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$y' = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0, \quad \forall x \neq -1$$

$$y' = \left(\sqrt{x^2 + 4} \right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$y' = 4x^3 + 2x = 2x(2x^2 + 1)$$

$$y' = 3x^2 + 4 - \cos x > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Câu 16. [NB-TH] Hỏi hàm số nào sau đây nghịch biến trên toàn trục số ?

$$y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1 (I)$$

$$y = \sin x - 2x (II)$$

$$y = -\sqrt{x^3 + 2} (III)$$

$$y = \frac{x-2}{1-x} (IV)$$

A. (I), (II).

B. (I), (II) và (III).

C. (I), (II) và (IV).

D. (II), (III).

Hướng dẫn giải

$$+) y' = (-x^3 + 3x^2 - 3x + 1)' = -3x^2 + 6x - 3 = -3(x-1)^2 \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$+) y' = (\sin x - 2x)' = \cos x - 2 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$+) y' = -\left(\sqrt{x^3 + 2} \right)' = -\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 2}} \leq 0 \quad \forall x \in \left(-\sqrt[3]{2}; +\infty \right);$$

$$+) y' = \left(\frac{x-2}{1-x} \right)' = \left(\frac{x-2}{-x+1} \right)' = -\frac{1}{(1-x)^2} < 0 \quad \forall x \neq 1$$

Câu 17. [NB-TH] Xét các mệnh đề sau.

(I). Hàm số $y = -(x-1)^3$ nghịch biến trên \mathbb{R} .

(II). Hàm số $y = \ln(x-1) - \frac{x}{x-1}$ đồng biến trên tập xác định của nó.

(III). Hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ đồng biến trên \mathbb{R} .

Hỏi có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Hướng dẫn giải

$$+) y' = \left(-(x-1)^3 \right)' = -3(x-1)^2 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$+) y' = \left(\ln(x-1) - \frac{x}{x-1} \right)' = \frac{x}{(x-1)^2} > 0, \quad x > 1$$

$$+) y' = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+1} - x \cdot \left(\sqrt{x^2+1} \right)'}{x^2+1} = \frac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right)}{x^2+1}$$
$$= \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Câu 18. [NB-TH] Cho hàm số $y = |x+1|(x-2)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; \frac{1}{2})$.

C. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(\frac{1}{2}; +\infty)$.

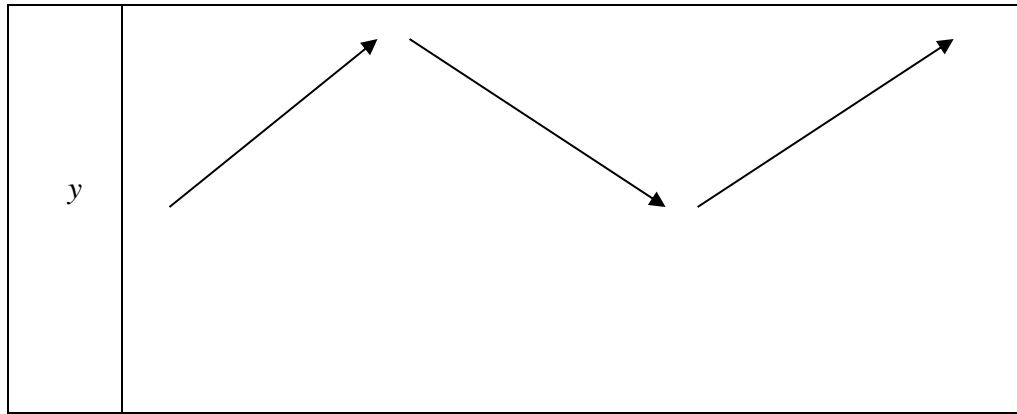
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; \frac{1}{2})$ và đồng biến trên khoảng $(\frac{1}{2}; +\infty)$.

Hướng dẫn giải

$$+) y' = \begin{cases} 2x-1, & x > -1 \\ -2x+1, & x < -1 \end{cases}$$

$$+) y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
y'	$+$	\parallel	$-$	0	$+$



Câu 19. [NB-TH] Cho hàm số $y = x + 3 + 2\sqrt{2-x}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và nghịch biến trên khoảng $(-2; 2)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và đồng biến trên khoảng $(-2; 2)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Hướng dẫn giải

+) TXĐ: $D = (-\infty; 2]$

$$y' = \frac{\sqrt{2-x} - 1}{\sqrt{2-x}}. \text{ Giải } y' = 0 \Rightarrow \sqrt{2-x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

y' không xác định khi $x = 2$

+) BBT

x	$-\infty$	1	2
y'	+	0	-
y	$-\infty$	6	5

Câu 20. [NB-TH] Cho hàm số $y = \cos 2x + \sin 2x \cdot \tan x$, " $x \in \left(-\frac{\rho}{2}; \frac{\rho}{2}\right)$ ". Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. Hàm số không đổi trên $\left(-\frac{\rho}{2}; \frac{\rho}{2}\right)$.
- B. Hàm số luôn tăng trên $\left(-\frac{\rho}{2}; \frac{\rho}{2}\right)$.
- C. Hàm số luôn giảm trên $\left(-\frac{\rho}{2}; \frac{\rho}{2}\right)$.
- D. Hàm số đơn điệu trên $\left(-\frac{\rho}{2}; \frac{\rho}{2}\right)$ (vừa tăng, vừa giảm trên $\left(-\frac{\rho}{2}; \frac{\rho}{2}\right)$).

Hướng dẫn giải

+) Xét trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$$y = \cos 2x + \sin 2x \cdot \tan x = \frac{\cos 2x \cdot \cos x + \sin 2x \cdot \sin x}{\cos x} = 1 \Rightarrow y' = 0$$

+) Hàm số không đổi trên $\left(-\frac{\rho}{2}; \frac{\rho}{2}\right)$.

1.1.2 Tìm tham số, để hàm số đơn điệu.

Câu 21. [NB-TH] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x - m + 2}{x + 1}$ giảm trên các khoảng mà nó xác định?

- A. $m < 1$. B. $m \notin -3$. C. $m \notin 1$. D. $m < -3$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$+) y' = \frac{m-1}{(x+1)^2}$$

+) Để hàm số giảm trên các khoảng mà nó xác định $\Leftrightarrow y' < 0$, " $x \neq -1 \Leftrightarrow m < 1$

Câu 22. [NB-TH] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số

$$y = -\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m - 3)x - m + 2 \text{ luôn nghịch biến trên } \mathbb{R} ?$$

- A. $-3 \notin m \in 1$.
 $m \in -3; m^3 1$.
 B. $m \in 1$.
 C. $-3 < m < 1$.
 D.

Hướng dẫn giải

+ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

+ $y' = -x^2 - 2mx + 2m - 3$

+ Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} < 0 \\ D' \leq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 0 \text{ (hn)} \\ m^2 + 2m - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1$$

Câu 23. [NB-TH] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số

$y = \frac{x^2 - (m+1)x + 2m - 1}{x - m}$ tăng trên từng khoảng xác định của nó?

- A. $m \in 1$.
 B. $m > 1$.
 C. $m < 1$.
 D. $m^3 1$.

Hướng dẫn giải

+ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

+ $y' = \frac{x^2 - 2mx + m^2 - m + 1}{(x - m)^2}$

+ Để hàm số tăng trên từng khoảng xác định của nó

$$\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in D \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 \geq 0, \forall x \in D$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \geq 0 \text{ (hn)} \\ m - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 1$$

Câu 24. [NB-TH] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = f(x) = x + m \cos x$ luôn đồng biến trên \mathbb{R} ?

- A. $|m| \leq 1$.
 B. $m > \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 C. $|m| \geq 1$.
 D. $m < \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

+ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

+ $y' = 1 - m \sin x$

+ Đặt $t = \sin x, t \in [-1; 1] \Rightarrow y' = 1 - mt = g(t)$

+) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow g(t) = 1 - mt \geq 0, " t \in [-1;1]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(-1) \geq 0 \\ g(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1$$

Câu 25. [NB-TH] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = (m - 3)x - (2m + 1)\cos x$ luôn nghịch biến trên \mathbb{R} ?

- A. $m \in \left[-4; \frac{2}{3}\right]$. B. $m \geq 2$. C. $\begin{cases} m > 3 \\ m \neq 1 \end{cases}$. D. $m \in (-\infty; 2]$.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

+) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

+) $y' = m - 3 + (2m + 1)\sin x$

+) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, " x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (2m + 1)\sin x \leq 3 - m$

Trường hợp 1: $m = -\frac{1}{2}$ ta có $0 \leq \frac{7}{2}$ (htr). Vậy hàm số luôn nghịch biến trên \mathbb{R} .

Trường hợp 2: $m < -\frac{1}{2}$ ta có $\sin x \geq \frac{3 - m}{2m + 1}, " x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{3 - m}{2m + 1} \leq -1$

$$\Leftrightarrow 3 - m \geq -2m - 1 \Leftrightarrow m \geq -4$$

Trường hợp 3: $m > -\frac{1}{2}$ ta có $\sin x \leq \frac{3 - m}{2m + 1}, " x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{3 - m}{2m + 1} \geq 1$

$$\Leftrightarrow 3 - m \geq 2m + 1 \Leftrightarrow m \leq \frac{2}{3}$$

+) Vậy $m \in \left[-4; \frac{2}{3}\right]$

Cách 2:

+) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

+) $y' = m - 3 + (2m + 1)\sin x$

+) Đặt $t = \cos x, t \in [-1;1] \Rightarrow y' = m - 3 + (2m + 1)t = g(t)$

+) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow g(t) = m - 3 + (2m + 1)t \leq 0, \forall t \in [-1; 1]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(-1) \leq 0 \\ g(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -4 \\ m \leq \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq \frac{2}{3}$$

Câu 26. [NB-TH] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số

$y = 2x^3 - 3(m+2)x^2 + 6(m+1)x - 3m + 5 = 0$ luôn đồng biến trên \mathbb{R} ?

A. 0.

B. -1.

C. 2.

D. 1.

Hướng dẫn giải

+) Tính nhanh, ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = m + 1 \end{cases}$

+) Phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm kép khi $m = 0$, nghĩa là hàm số luôn đồng biến.

+) Trường hợp $m \neq 0$, phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt (không thỏa yêu cầu bài toán).

Câu 27. [VD] Tìm giá trị nhỏ nhất của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} + mx^2 - mx - m$ luôn đồng biến trên \mathbb{R} ?

A. $m = -1$.

B. $m = 0$.

C. $m = -5$.

D. $m = -6$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

+) $y' = x^2 + 2mx - m$

+) Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \text{ (hđ)} \\ m^2 + m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0$

+) Vậy giá trị nhỏ nhất của m để hàm số đồng biến trên \mathbb{R} là $m = -1$

Câu 28. [VD] Tìm số nguyên m nhỏ nhất sao cho hàm số $y = \frac{(m+3)x - 2}{x+m}$ luôn nghịch biến trên các khoảng xác định của nó?

A. Không có m .

B. $m = -2$.

C. $m = 0$.

D. $m = -1$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

$$+) y' = \frac{m^2 + 3m + 2}{(x + m)^2}$$

$$+) \text{ Yêu cầu đề bài } \Leftrightarrow y' < 0, " x \in D \Leftrightarrow m^2 + 3m + 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < -1$$

$$+) \text{ Vậy không có số nguyên } m \text{ nào thuộc khoảng } (-2; -1).$$

Câu 29. [VD] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{mx + 4}{x + m}$ giảm trên

khoảng $(-\infty; 1)$?

- A. $-2 < m \leq -1$. B. $-2 \leq m \leq -1$. C. $-2 < m < 2$. D. $-2 \leq m \leq 2$.

Hướng dẫn giải

$$+) \text{ Tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$$

$$+) y' = \frac{m^2 - 4}{(x + m)^2}$$

$$+) \text{ Để hàm số giảm trên khoảng } (-\infty; 1) \Leftrightarrow y' < 0, " x \in (-\infty; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ 1 \leq -m \end{cases} \\ \Leftrightarrow -2 < m \leq -1$$

Câu 30. [VD] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A. $m \geq 12$. B. $m \leq 12$. C. $m \geq 0$. D. $m \leq 0$.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

$$+) \text{ Tập xác định: } D = \mathbb{R}$$

$$+) y' = 3x^2 - 12x + m$$

Trường hợp 1: Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, " x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \text{ (hn)} \\ 36 - 3m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 12$$

Trường hợp 2: Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty) \Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < x_2 \leq 0$ (*)

Trường hợp 2.1: $y' = 0$ có nghiệm $x = 0$ suy ra $m = 0$. Nghiệm còn lại của $y' = 0$ là $x = 4$ (không thỏa (*))

Trường hợp 2.2: $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 36 - 3m > 0 \\ 4 < 0 \text{ (vì)} \Rightarrow \text{không có } m \\ \frac{m}{3} > 0 \end{cases}$$

+) Vậy $m \geq 12$

Cách 2:

+) Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty) \Leftrightarrow m \geq 12x - 3x^2 = g(x), \forall x \in (0; +\infty)$.

+) Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0; +\infty)$.

x	0	2	$+\infty$
g'	+	0	-
g	0	12	$-\infty$

+) Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \geq \max g(x) \Leftrightarrow m \geq 12$

Câu 31. [VD] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$?

A. $m \in (-\infty; 2]$. B. $m \in [-5; 2)$. C. $m \in (2; +\infty)$. D.

$m \in (-\infty; -5)$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

+) $y' = 4x^3 - 4(m-1)x$.

+) Hàm số đồng biến trên $(1;3)$

$$\Leftrightarrow y' \geq 0, " x \in (1;3) \Leftrightarrow g(x) = x^2 + 1 \geq m, " x \in (1;3) .$$

+) Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1;3)$.

x	1	3
g'		0
g		10
	2	

+) Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \leq \min g(x) \Leftrightarrow m \leq 2$.

Câu 32. [VD] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + 2mx - 3m + 4 \text{ nghịch biến trên một đoạn có độ dài là } 3?$$

- A. $m = -1; m = 9$. B. $m = -1$. C. $m = 9$. D. $m = 1; m = -9$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

$$+) y' = x^2 - mx + 2m$$

+) Ta không xét trường hợp $y' \leq 0, " x \in \mathbb{R}$ vì $a = 1 > 0$

+) Hàm số nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3 $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa

$$|x_1 - x_2| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m > 0 \\ (x_1 - x_2)^2 = 9 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 8 \text{ hay } m < 0 \\ m^2 - 8m = 9 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1 \text{ hay } m = 9$$

Câu 33. [VD] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{1 - \sin x}{\sin x - m}$ nghịch biến

trên khoảng $\left(0; \frac{\rho}{6}\right)$?

- A. $m \in 0; \frac{1}{2} \Leftrightarrow m < 1$. B. $m \in 0; \frac{1}{2} \Leftrightarrow m \in 1$. C. $m < 1$. D. $m \in 1$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = \sin x, t \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow f(t) = \frac{1-t}{t-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

+) Hàm số nghịch biến trên $\left(0; \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow f'(t) = \frac{m-1}{(t-m)^2} < 0, " t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 < 0 \\ m \leq 0 \\ m \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0 \text{ hoặc } \frac{1}{2} \leq m < 1$$

Câu 34. [VD] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\rho}{4}\right)$?

- A. $m \in 0; 1 \leq m < 2$. B. $1 \leq m < 2$. C. $m \geq 2$. D. $m \in 0$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = \tan x, t \in (0; 1) \Rightarrow f(t) = \frac{t-2}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

+) Hàm số đồng biến trên $(0; 1) \Leftrightarrow f'(t) = \frac{-m+2}{(t-m)^2} > 0, " t \in (0; 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m+2 > 0 \\ m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0 \text{ hoặc } 1 \leq m < 2$$

Câu 35. [VD] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số

$y = f(x) = \frac{mx^3}{3} + 7mx^2 + 14x - m + 2$ giảm trên nửa khoảng $[1; +\infty)$?

- A. $\left(-\infty; -\frac{14}{15}\right]$. B. $\left(-\infty; -\frac{14}{15}\right)$. C. $\left[-2; -\frac{14}{15}\right]$. D. $\left[-\frac{14}{15}; +\infty\right)$.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định $D = \mathbb{R}$, yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$$mx^2 + 14mx + 14 \leq 0, \forall x \geq 1, \text{ tương đương với } g(x) = \frac{-14}{x^2 + 14x} \geq m \quad (1)$$

+) Dễ dàng có được $g(x)$ là hàm tăng " $x \in [1; +\infty)$

$$\text{suy ra } \min_{x \geq 1} g(x) = g(1) = -\frac{14}{15}$$

+) Kết luận: $(1) \Leftrightarrow \min_{x \geq 1} g(x) \geq m \Leftrightarrow -\frac{14}{15} \geq m$

Câu 36. [VD] Tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = -x^4 + (2m-3)x^2 + m$

nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ là $(-\infty; \frac{p}{q}]$, trong đó phân số $\frac{p}{q}$ tối giản và $q > 0$. Hỏi

tổng $p+q$ là?

A. 7.

B. 9.

C. 5.

D. 3.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$+) y' = -4x^3 + 2(2m-3)x.$$

+) Hàm số nghịch biến trên $(1; 2)$

$$\Leftrightarrow y' \leq 0, " x \in (1; 2) \Leftrightarrow m \leq x^2 + \frac{3}{2} = g(x), " x \in (1; 2).$$

+) Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(1; 2)$.

$$+) g'(x) = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

+) BBT

x	1	2
g'	+	0
g		$\frac{11}{2}$
		$\frac{5}{2}$

+) Dựa vào bảng biến thiên, kết luận: $m \leq \min g(x) \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{2}$

+) Vậy $p + q = 5 + 2 = 7$.

Câu 37. [VD] Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số

$y = \frac{x^2 - 2mx + m + 2}{x - m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

- A. Vô số. B. Bốn. C. Hai. D. Không có.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

$$+) y' = \frac{x^2 - 2mx + 2m^2 - m - 2}{(x - m)^2} = \frac{g(x)}{(x - m)^2}.$$

+) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $g(x) \geq 0, \forall x \in D$.

+) Điều kiện tương đương là $D_{g(x)} = -m^2 + m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 2 \end{cases}$

+) Kết luận: Có vô số giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 38. [VD] Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số

$y = \frac{2x^2 + (1 - m)x + 1 + m}{x - m}$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Hướng dẫn giải

+) Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

$$+) y' = \frac{2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1}{(x - m)^2} = \frac{g(x)}{(x - m)^2}$$

+) Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $g(x) \geq 0, \forall x > 1$ và $m \leq 1$ (1)

$$\text{Vì } \Delta'_g = 2(m + 1)^2 \geq 0, \forall m \text{ nên (1)}$$

$$\Leftrightarrow g(x) = 0 \text{ có hai nghiệm thỏa } x_1 \leq x_2 \leq 1$$

$$\text{Điều kiện tương đương là } \begin{cases} 2g(1) = 2(m^2 - 6m + 1) \geq 0 \\ \frac{S}{2} = m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,2.$$

Do đó không có giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 39. [VD] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a và b sao cho hàm số

$$y = f(x) = \frac{-x^3}{3} + \frac{1}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha)x^2 - \frac{3}{2}x \sin \alpha \cos \alpha - \sqrt{\beta - 2}$$
 luôn giảm trên \mathbb{R} ?

A. $\frac{\pi}{12} + k\pi \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $\beta \geq 2$. B. $\frac{\pi}{12} + k\pi \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $\beta \geq 2$.

C. $\alpha \leq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $b \geq 2$.

D. $\alpha \geq \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $\beta \geq 2$.

Hướng dẫn giải

+ Điều kiện xác định: $b \geq 2$

+ Yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình $\frac{1}{2} \leq \sin 2\alpha \leq 1$

+ Kết luận: $\frac{\pi}{12} + k\pi \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $\beta \geq 2$.

Câu 40. [VDC] Tìm mối liên hệ giữa các tham số a và b sao cho hàm số

$$y = f(x) = 2x + a \sin x + b \cos x$$
 luôn tăng trên \mathbb{R} ?

A. $a^2 + b^2 \leq 4$. B. $a + 2b = 2\sqrt{3}$. C. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. D.

$$a + 2b \geq \frac{1 + \sqrt{2}}{3}$$

Hướng dẫn giải

+ Tập xác định $D = \mathbb{R}$

$$+ y' = 2 + a \cos x - b \sin x$$

+ Áp dụng bất đẳng thức Schwartz ta có $2 - \sqrt{a^2 + b^2} \leq y' \leq 2 + \sqrt{a^2 + b^2}$

+ Yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$$y' \geq 0, \forall x \Leftrightarrow 2 - \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 4.$$

1.1.3 Ứng dụng tính đơn điệu của hàm số.

Câu 41. [VD] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình

$$x^3 - 3x^2 - 9x - m = 0$$
 có đúng 1 nghiệm?

A. $m < -27$ hoặc $m > 5$.

B. $m < -5$ hoặc $m > 27$.

C. $-27 \leq m \leq 5$.

D. $-5 \leq m \leq 27$.

Hướng dẫn giải

+) (1) $\Leftrightarrow m = x^3 - 3x^2 - 9x = f(x)$.

+) Bảng biến thiên của $f(x)$ trên \mathbb{R} .

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)'$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		5		-27		$+\infty$

+) Từ đó suy ra pt có đúng 1 nghiệm khi $m < -27$ hoặc $m > 5$

Câu 42. [VD] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $2\sqrt{x+1} = x + m$ có nghiệm?

- A. $m \in 2$. B. $m \geq 2$. C. $m \geq 3$. D. $m \leq 3$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = \sqrt{x+1}, t \geq 0$.

+) Phương trình thành: $2t = t^2 - 1 + m \Leftrightarrow m = -t^2 + 2t + 1$

+) Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 2t + 1, t \geq 0; f'(t) = -2t + 2$

+) Bảng biến thiên của $f(t)$

t	0	1	$+\infty$	
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$		2		
	1			$-\infty$

+) Từ đó suy ra phương trình có nghiệm khi $m \leq 2$.

Câu 43. [VD] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình

$\sqrt{x^2 - 4x + 5} = m + 4x - x^2$ có đúng 2 nghiệm dương?

- A. $-3 < m < \sqrt{5}$. B. $1 \leq m \leq 3$. C. $-\sqrt{5} < m < 3$. D. $-3 \leq m < 3$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$.

+) $f'(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$

+) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

+) Xét $x > 0$ ta có bảng biến thiên

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$\sqrt{5}$		$+\infty$

1

+) Khi đó phương trình đã cho trở thành $m = t^2 + t - 5 \Leftrightarrow t^2 + t - 5 - m = 0$ (1).

Nếu phương trình (1) có nghiệm t_1, t_2 thì $t_1 + t_2 = -1$. (1) có nhiều nhất 1 nghiệm $t \geq 1$.

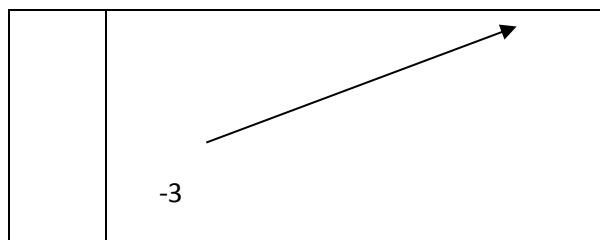
+) Vậy phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm dương khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng 1 nghiệm $t \in (1; \sqrt{5})$.

+) Đặt $g(t) = t^2 + t - 5$. Ta đi tìm m để phương trình $g(t) = m$ có đúng 1 nghiệm $t \in (1; \sqrt{5})$.

$g'(t) = 2t + 1 > 0, " t \in (1; \sqrt{5})$.

Ta có bảng biến thiên sau

t	1	$\sqrt{5}$
$g'(t)$		+
$g(t)$		$\sqrt{5}$



+) Từ BBT suy ra $-3 < m < \sqrt{5}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 44. [VD] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho mọi nghiệm của bất phương trình:

$x^2 - 3x + 2 \leq 0$ cũng là nghiệm của bất phương trình $mx^2 + (m+1)x + m + 1 \geq 0$?

- A. $m \in \left[-\frac{4}{7}, 1\right]$ B. $m \in \left[-\frac{4}{7}, 1\right]$ C. $m \in [-1, 1]$ D. $m \in [-1, 1]$.

Hướng dẫn giải

+) Bất phương trình (1) $\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$

+) Bất phương trình (2) $\Leftrightarrow m(x^2 + x + 1) \geq -x - 2 \Leftrightarrow m \geq \frac{-x-2}{x^2+x+1}$

+) Xét hàm số $f(x) = \frac{-x-2}{x^2+x+1}$ với $1 \leq x \leq 2$

$$\text{Có } f'(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x^2 + x + 1)^2} > 0, \forall x \in [1; 2]$$

+) Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \geq \max_{[1;2]} f(x) \Leftrightarrow m \geq -\frac{4}{7}$

Câu 45. [VD] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình:

$\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trên đoạn $[1; 3^{\sqrt{3}}]$?

- A. $0 \leq m \leq 2$ B. $-1 \leq m \leq 3$ C. $0 \leq m \leq 3$ D. $-1 \leq m \leq 2$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1}$.

Điều kiện: $t \geq 1$.

+) Phương trình thành: $t^2 + t - 2m - 2 = 0$ (*)

Khi $x \in [1; 3^{\sqrt{3}}] \Rightarrow t \in [1; 2]$

$$(*) \Leftrightarrow f(t) = \frac{t^2 + t - 2}{2} = m$$

+) Bảng biến thiên $f(t)$

t	1	2
$f'(t)$		+
$f(t)$	0	\nearrow

+) Từ bảng biến thiên ta có : $0 \in m \in 2$

Câu 46. [VDC] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình

$$\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1 \text{ có hai nghiệm thực?}$$

A. $m \geq \frac{9}{2}$.

B. $m \geq \frac{3}{2}$.

C. $m \geq -\frac{7}{2}$.

D. " $m \in \mathbb{R}$."

Hướng dẫn giải

+) Điều kiện : $x \geq -\frac{1}{2}$

+) Vì $x=0$ không là nghiệm nên $(*) \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 1 = mx$

$$\Leftrightarrow m = \frac{3x^2 + 4x - 1}{x}$$

+) Xét $f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 1}{x}$

Ta có $f'(x) = \frac{3x^2 + 1}{x} > 0 \forall x \geq -\frac{1}{2}; x \neq 0$

+) Bảng biến thiên

x	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$	\nearrow	$\uparrow \neq$	$\nearrow +\infty$

	$\frac{9}{2}$	$-\infty$
--	---------------	-----------

+) Từ bảng biến thiên ta có để phương trình có hai nghiệm thì $m \in \left(\frac{9}{2}, \infty \right)$

Câu 47. [VDC] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình

$$3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1} \text{ có hai nghiệm thực?}$$

- A. $0 \leq m < \frac{1}{3}$. B. $-1 \leq m \leq \frac{1}{4}$. C. $-2 < m \leq \frac{1}{3}$. D.

$\frac{1}{3} \leq m < 1$.

Hướng dẫn giải

+) Điều kiện : $x \geq 1$

$$+) \text{ Pt} \Leftrightarrow 3\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} + m = 2\frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt[4]{(x+1)^2}}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + m = 2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$+) t = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} \text{ với } x \geq 1 \text{ ta có } 0 \leq t < 1$$

Thay vào phương trình ta được $m = 2t - 3t^2 = f(t)$

$$+) \text{ Ta có : } f'(t) = 2 - 6t \text{ ta có : } f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$$

+) BBT

t	0	$\frac{1}{3}$	1
$f'(t)$	+	0	--
$f(t)$	0	$\frac{1}{3}$	-1

+) Từ bảng biến thiên ta có để phương trình có hai nghiệm khi $0 \leq m < \frac{1}{3}$

Câu 48. [VDC] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình

$$\sqrt{(1+2x)(3-x)} > m + 2x^2 - 5x + 3 \text{ nghiệm đúng với mọi } x \in \left[-\frac{1}{2}; 3\right]?$$

- A. $m < 0$. B. $m > 0$. C. $m < 1$. D. $m > 1$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = \sqrt{(1+2x)(3-x)}$ khi $x \in \left[-\frac{1}{2}; 3\right] \Rightarrow t \in \left[0; \frac{7\sqrt{2}}{4}\right]$

+) Thay vào bất phương trình ta được $f(t) = t^2 + t > m$

+) BBT

t	0	$\frac{7\sqrt{2}}{4}$
$f'(t)$		+
$f(t)$	0	$\frac{49+14\sqrt{2}}{8}$

+) Từ bảng biến thiên ta có : $m < 0$

Câu 49. [VDC] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình

$$3(\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x}) - 2\sqrt{(1+x)(3-x)} \geq m \text{ nghiệm đúng với mọi } x \in [-1; 3]?$$

- A. $m \in [6\sqrt{2} - 4; 6]$. B. $m \in [6; 6\sqrt{2} - 4]$. C. $m \in [6\sqrt{2} - 4; 6]$. D. $m \in [6; 6\sqrt{2} - 4]$.

Hướng dẫn giải

+) Đặt $t = \sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} \Rightarrow t^2 = 4 + 2\sqrt{(1+x)(3-x)} \Leftrightarrow 2\sqrt{(1+x)(3-x)} = t^2 - 4$

+) Với $x \in [-1; 3] \Rightarrow t \in [2; 2\sqrt{2}]$ Thay vào bất phương trình ta được : $m \leq -t^2 + 3t - 4$

+) Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 3t - 4; f'(t) = -2t + 3$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2} < 2$$

t	2	$2\sqrt{2}$
$f'(t)$	--	
$f(t)$	6	$6\sqrt{2} - 4$

+) Từ bảng biến thiên ta có $m \in 6\sqrt{2} - 4$ thỏa đề bài

Câu 50. [VDC] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18+3x-x^2} \in m^2 - m + 1$ nghiệm đúng " $x \in [-3, 6]$ " ?

A. $m \in -1$ hoặc $m \in 2$.

B. $-1 \in m \in 0$.

C. $0 \in m \in 2$.

D. $m^3 - 1$.

Hướng dẫn giải

$$+) \text{ Đặt } t = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} > 0 \Rightarrow t^2 = (\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x})^2 = 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)}$$

$$\Rightarrow 9 \leq t^2 = 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)} \leq 9 + (3+x) + (6-x) = 18$$

$$\Rightarrow \sqrt{18+3x-x^2} = \sqrt{(3+x)(6-x)} = \frac{1}{2}(t^2 - 9); t \in [3; 3\sqrt{2}]$$

$$+) \text{ Xét } f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{9}{2}; f'(t) = 1 - t < 0; " t \in [3; 3\sqrt{2}] \Rightarrow \max_{[3; 3\sqrt{2}]} f(t) = f(3) = 3$$

$$+) \text{ ycbt } \Leftrightarrow \max_{[3; 3\sqrt{2}]} f(t) = 3 \leq m^2 - m + 1 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -1 \vee m \geq 2$$

Câu 51. [VD] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình

$$m \cdot 4^x + (m-1) \cdot 2^{x+2} + m-1 > 0 \text{ nghiệm đúng } \forall x \in \mathbb{R}?$$

A. $m \geq 1$.

B. $m \in 3$.

C. $-1 \leq m \leq 4$.

D. $m \geq 0$.

Hướng dẫn giải

$$+) \text{ Đặt } t = 2^x > 0 \text{ thì } m \cdot 4^x + (m-1) \cdot 2^{x+2} + m-1 > 0 \text{ đúng } \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow m \cdot t^2 + 4(m-1) \cdot t + (m-1) > 0, " t > 0 \Leftrightarrow m(t^2 + 4t + 1) > 4t + 1, " t > 0$$

$$\Leftrightarrow g(t) = \frac{4t+1}{t^2+4t+1} < m, " t > 0.$$

$$\text{Ta có } g'(t) = \frac{-4t^2 - 2t}{(t^2 + 4t + 1)^2} < 0 \text{ nên } g(t) \text{ nghịch biến trên } [0; +\infty)$$

$$+) \text{ ycbt } \Leftrightarrow \max_{t \geq 0} g(t) = g(0) = 1 \leq m$$

Câu 52. [VDC] Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình:

$$-x^3 + 3mx - 2 < -\frac{1}{x^3} \text{ nghiệm đúng } \forall x \geq 1 ?$$

A. $m < \frac{2}{3}$. B. $m \geq \frac{2}{3}$. C. $m \geq \frac{3}{2}$. D.

$$-\frac{1}{3} \leq m \leq \frac{3}{2}.$$

Hướng dẫn giải

+) Bpt $\Leftrightarrow 3mx < x^3 - \frac{1}{x^3} + 2, \forall x \geq 1 \Leftrightarrow 3m < x^2 - \frac{1}{x^4} + \frac{2}{x} = f(x), \forall x \geq 1$.

+) Ta có $f'(x) = 2x + \frac{4}{x^5} - \frac{2}{x^2} \geq 2\sqrt{2x\left(\frac{4}{x^5}\right)} - \frac{2}{x^2} = \frac{4\sqrt{2}-2}{x^2} > 0$ suy ra $f(x)$ tăng.

+) Ycbt $\Leftrightarrow f(x) > 3m, \forall x \geq 1 \Leftrightarrow \min_{x \geq 1} f(x) = f(1) = 2 > 3m \Leftrightarrow \frac{2}{3} > m$

Câu 53. [VDC] Tìm giá trị lớn nhất của tham số m sao cho bất phương trình

$$2^{\cos^2 x} + 3^{\sin^2 x} \geq m \cdot 3^{\cos^2 x} \text{ có nghiệm?}$$

A. $m = 4$. B. $m = 8$. C. $m = 12$. D. $m = 16$.

Hướng dẫn giải

+) (1) $\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\cos^2 x} + 3\left(\frac{1}{9}\right)^{\cos^2 x} \geq m$.

+) Đặt $t = \cos^2 x, 0 \leq t \leq 1$

+) (1) trở thành $\left(\frac{2}{3}\right)^t + 3\left(\frac{1}{9}\right)^t \geq m$ (2). Đặt $f(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3\left(\frac{1}{9}\right)^t$.

+) Ta có (1) có nghiệm \Leftrightarrow (2) có nghiệm $t \in [0; 1] \Leftrightarrow m \leq \max_{t \in [0; 1]} f(t) \Leftrightarrow m \leq 4$

Câu 54. [VD] Bất phương trình $\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4 - x} \geq 2\sqrt{3}$ có tập nghiệm là $[a; b]$.

Hỏi tổng $a + b$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 5. B. 4.

C. -2. D. 3.

Hướng dẫn giải

+) Điều kiện: $-2 \leq x \leq 4$

+) Xét $f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4 - x}$ trên đoạn $[-2; 4]$.

+) Có $f'(x) = \frac{3(x^2 + x + 1)}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}} > 0, \forall x \in (-2; 4)$.

Do đó hàm số đồng biến trên $[-2; 4]$

+) Bpt $\Leftrightarrow f(x) \geq f(1) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x \geq 1$.

+) So với điều kiện, tập nghiệm của bpt là $S = [1; 4]$

Câu 55. [VD] Bất phương trình $\sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{x^2 - 6x + 11} > \sqrt{3-x} - \sqrt{x-1}$ có tập nghiệm $(a; b]$. Hỏi hiệu $b - a$ có giá trị là bao nhiêu?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. -1.

Hướng dẫn giải

+) Điều kiện: $1 \leq x \leq 3$; bpt $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + 2} + \sqrt{x-1} > \sqrt{(3-x)^2 + 2} + \sqrt{3-x}$

+) Xét $f(t) = \sqrt{t^2 + 2} + \sqrt{t}$ với $t \geq 0$

+) Có $f'(t) = \frac{t}{2\sqrt{t^2 + 2}} + \frac{1}{2\sqrt{t}} > 0, \forall t > 0$.

Do đó hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$

+) (1) $\Leftrightarrow f(x-1) > f(3-x) \Leftrightarrow x-1 > 3-x \Leftrightarrow x > 2$

+) So với điều kiện, bpt có tập nghiệm là $S = (2; 3]$