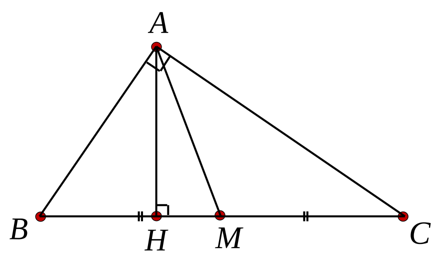
KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. HÌNH HỌC PHẲNG

1. Các hệ thức lượng trong tam giác:

Cho tam giác ΔABC vuông tại A, AH là đường cao, AM là đường trung tuyến. Ta có:

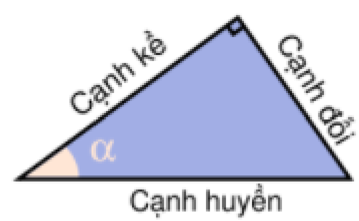


- ❖ $BC^2 = AB^2 + AC^2$
- ❖ $AH.BC = AB.AC$
- ❖ $AB^2 = BH.BC,\ AC^2 = CH.CB$
- ❖ $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2},\ AH^2 = HB.HC$
- ❖ $2AM = BC$

2. Các tỉ số lượng giác:

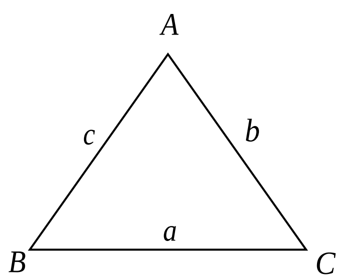
$\sin\alpha = \dfrac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}$; $\cos\alpha = \dfrac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}}$

$\tan\alpha = \dfrac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}$; $\cot\alpha = \dfrac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}$



3. *Các hệ thức lượng trong tam giác thường:*

a. Định lý hàm số cosin:

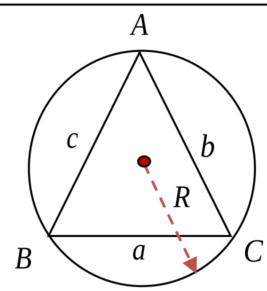


$$* \ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$* \ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$* \ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

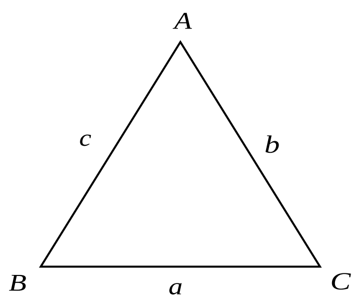
b. Định lý hàm số sin:



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

(R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC)

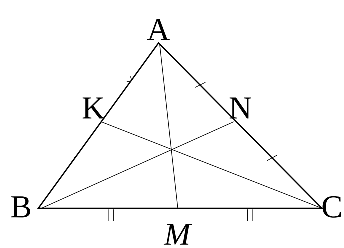
c. Công thức tính diện tích tam giác:



p - nửa chu vi

- ❖ $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c$
- ❖ $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B$
- ❖ $S_{\Delta ABC}=\frac{abc}{4R},\ S_{\Delta ABC}=p.r$
- ❖ $S_{\Delta ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

d. Công thức độ dài đường trung tuyến:

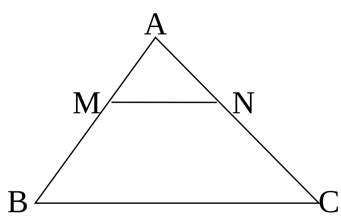


$$*\ AM^2=\frac{AB^2+AC^2}{2}-\frac{BC^2}{4}$$

$$*\ BN^2=\frac{BA^2+BC^2}{2}-\frac{AC^2}{4}$$

$$*\ CK^2=\frac{CA^2+CB^2}{2}-\frac{AB^2}{4}$$

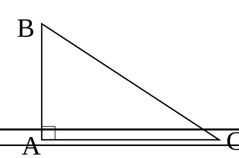
4. Định lý Thales:

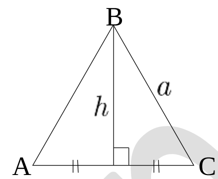
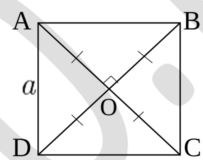
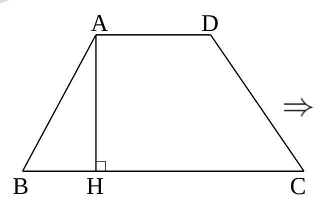
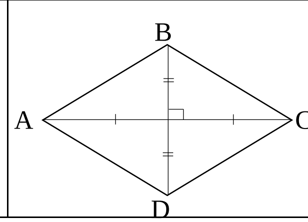


$$* \ MN // BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = k$$

$$* \ \frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^2 = k^2$$

5. Diện tích đa giác:

a/ Diện tích tam giác vuông	 $\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC$

✧ Diện tích tam giác vuông bằng $\frac{1}{2}$ tích 2 cạnh góc vuông.	
b/ Diện tích tam giác đều ✧ Diện tích tam giác đều: $S_{\Delta \text{đều}} = \frac{(\text{cạnh})^2 \sqrt{3}}{4}$ ✧ Chiều cao tam giác đều: $h_{\Delta \text{đều}} = \frac{(\text{cạnh}).\sqrt{3}}{2}$	 $\Rightarrow \begin{cases} S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \\ h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$
c/ Diện tích hình vuông và hình chữ nhật ✧ Diện tích hình vuông bằng cạnh bình phương. ✧ Đường chéo hình vuông bằng cạnh nhân $\sqrt{2}$. ✧ Diện tích hình chữ nhật bằng dài nhân rộng.	 $\Rightarrow \begin{cases} S_{HV} = a^2 \\ AC = BD = a\sqrt{2} \end{cases}$
d/ Diện tích hình thang ✧ Diện tích hình thang: $S_{\text{Hình Thang}} = \frac{1}{2}$.(đáy lớn + đáy bé) x chiều cao	 $\Rightarrow S = \frac{(AD+BC).AH}{2}$
e/ Diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc ✧ Diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc nhau bằng ½ tích hai đường chéo.	 $\Rightarrow S_{H.Thoi} = \frac{1}{2} AC.BD$

✧ Hình thoi có hai đường chéo vuông góc nhau tại trung điểm của mỗi đường.	
Lưu ý: Trong tính toán diện tích, ta có thể chia đa giác thành những hình đơn giản dễ tính diện tích, sau đó cộng các diện tích được chia này, ta được diện tích đa giác.	

7.4 KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

A. BÀI TẬP

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU (tối thiểu 30 câu)

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều. Nếu tăng độ dài cạnh đáy lên 2 lần và độ dài đường cao không đổi thì thể tích $S.ABC$ tăng lên bao nhiêu lần?

A. 4. B. 2. C. 3. D. $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Khi độ dài cạnh đáy tăng lên 2 lần thì diện tích đáy tăng lên 4 lần.

$\Rightarrow$ Thể tích khối chóp tăng lên 4 lần.

Câu 2. Có bao nhiêu khối đa diện đều?

A. 5. B. 4 . C. 3 . D. 2 .

Hướng dẫn giải:

Có 5 khối đa diện đều là: tứ diện đều, hình lập phương, khối 8 mặt đều, khối 12 mặt đều, khối 20 mặt đều.

Câu 3. Cho khối đa diện đều $\{p;q\}$, chỉ số p là :

A. Số các cạnh của mỗi mặt. B. Số mặt của đa diện .

C. Số cạnh của đa diện . D. Số đỉnh của đa diện.

Câu 4. Cho khối đa diện đều $\{p;q\}$, chỉ số q là :

A. Số các mặt ở mỗi đỉnh.

B. Số mặt của đa diện .

C. Số cạnh của đa diện .

D. Số đỉnh của đa diện.

Câu 5. Tính thể tích khối tứ diện đều cạnh a.

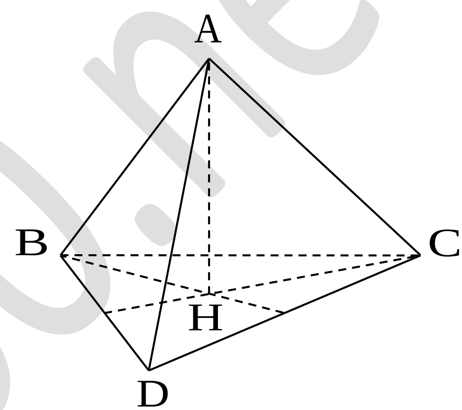
A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

C. a^3 .

D. $\frac{a^3}{6}$.

Hướng dẫn giải:



Gọi tứ diện $ABCD$ đều cạnh a.

Gọi H là hình chiếu của A lên (BCD) .

Ta có: $BH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$S_{\Delta BCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Câu 6. Cho $S.ABCD$ là hình chóp đều. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết $AB = a$, $SA = a$.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

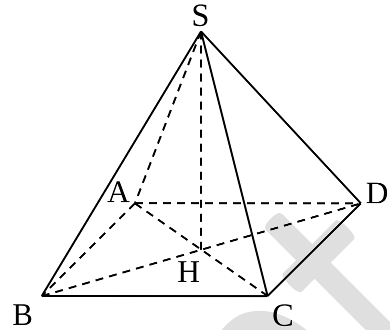
B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

C. a^3 .

D. $\frac{a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi H là hình chiếu của S lên $(ABCD)$.



Ta có: $AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$S_{ABCD} = a^2 \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

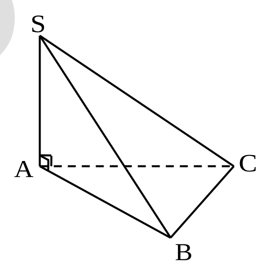
Câu 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy ABC là tam giác đều. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $AB = a$, $SA = a$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C. a^3. D. $\frac{a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải:

$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

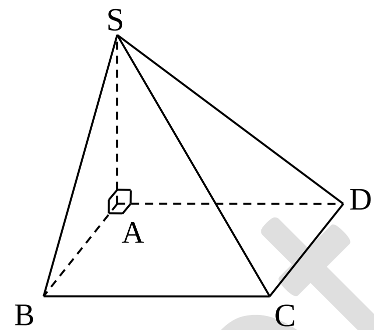


Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tính thể tích $S.ABCD$ biết $AB = a$, $AD = 2a$, $SA = 3a$.

A. $2a^3$. B. $6a^3$. C. a^3. D. $\frac{a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải:

$S_{\Delta ABCD}=2a.a=2a^2 \Rightarrow V_{S.ABC}=2a^3$



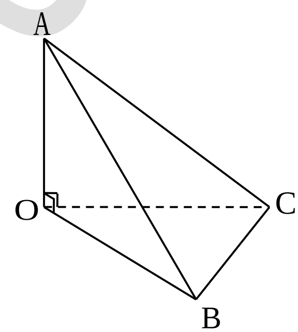
Câu 9. Thể tích khối tam diện vuông $O.ABC$ vuông tại O có $OA=a,\ OB=OC=2a$ là:

A. $\frac{2a^3}{3}$. B. $\frac{a^3}{2}$. C. $\frac{a^3}{6}$. D. $2a^3$.

Hướng dẫn giải:

$$\begin{cases} S_{OBC}=\frac{1}{2}OB.OC=2a^2 \\ h=OA=a \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{O.ABC}=\frac{1}{3}OA\cdot S_{OBC}=\frac{2a^3}{3}$$



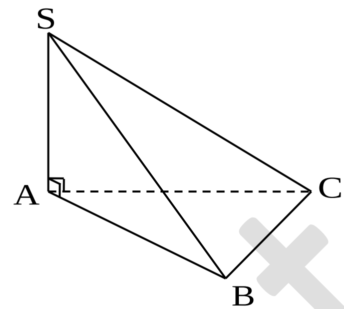
Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc mặt đáy, tam giác ABC vuông tại A, $SA=2cm$, $AB=4cm,\ AC=3cm$. Tính thể tích khối chóp.

A. $\frac{12}{3}cm^3$. B. $\frac{24}{5}cm^3$. C. $\frac{24}{3}cm^3$. D. $24cm^3$.

Hướng dẫn giải:

$$\begin{cases} S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = 6\,cm^2 \\ h = SA = 2\,cm \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3}SA \cdot S_{ABC} = \frac{12}{3}cm^3$$



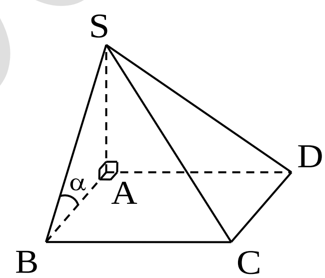
Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy hình chữ nhật, SA vuông góc đáy, $AB = a$, $AD = 2a$. Góc giữa SB và đáy bằng 45^0. Thể tích khối chóp là:

A. $\dfrac{2a^3}{3}$.   B. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.   C. $\dfrac{a^3}{\sqrt{3}}$.   D. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

Hướng dẫn giải:

$$\begin{cases} SA = AB.\tan\left(45^0\right) = a \\ S_{ABCD} = a.2a = 2a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \frac{2a^3}{3}$$



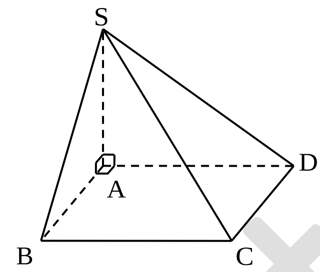
Câu 12. Hình chóp $S.ABCD$ đáy hình vuông, SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{3}, AC = a\sqrt{2}$. Khi đó thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.   B. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.   C. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.   D. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

$\begin{cases} SA = a\sqrt{3} \\ AB = AC.\cos\left(45^0\right) = a \Rightarrow S_{ABCD} = a^2 \end{cases}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SA.S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$



Câu 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B. Biết ΔSAB là tam giác đều và thuộc mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$. B. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$. C. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. D. $\dfrac{a^3}{4}$.

Hướng dẫn giải:

ΔABC vuông tại B $\Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$.

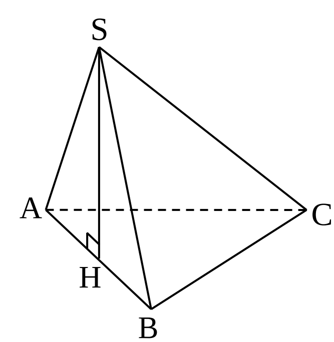
$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}BA.BC = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Gọi H là trung điểm AB $\Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có: ΔSAB đều $\Rightarrow SH \perp AB$

$\Rightarrow SH \perp (ABC)$ (vì $(SAB) \perp (ABC)$).

$\Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$



Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Mặt bên (SAB) là tam giác vuông cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết $BD = a$, $AC = a\sqrt{3}$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C. a^3. D. $\frac{a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

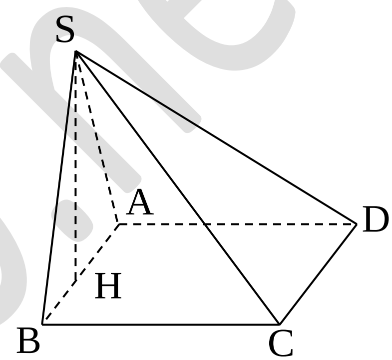
$ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AC \perp BD$,

O là trung điểm của AC, BD.

ΔABO vuông tại O

$\Rightarrow AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} = a$.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.



Gọi H là trung điểm AB. ΔSAB vuông cân tại S cạnh $AB = a \Rightarrow SH = \frac{a}{2}$.

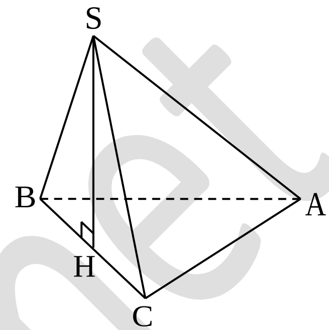
Ta có: ΔSAB cân $\Rightarrow SH \perp AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$ (vì $(SAB) \perp (ABC)$).

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BC. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $SB = a\sqrt{2}$.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.　　B. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.　　C. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{6}$.　　D. $\dfrac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Hướng dẫn giải:



ΔABC vuông tại A

$\Rightarrow BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = 2a$.

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

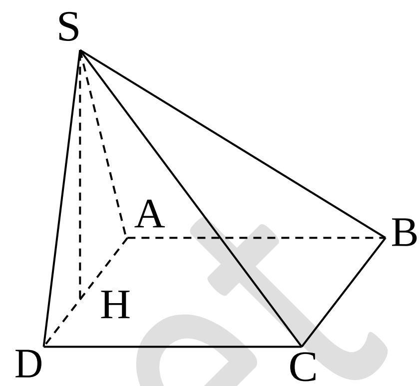
$SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = a$.

$\Rightarrow V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ hình vuông cạnh a . Hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của AD. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết $SB = \dfrac{3a}{2}$.

A. $\dfrac{a^3}{3}$.　　B. a^3 .　　C. $\dfrac{a^3}{2}$.　　D. $\dfrac{3a^3}{2}$.

Hướng dẫn giải:



ΔABH vuông tại A

$\Rightarrow BH = \sqrt{AH^2 + AB^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

$SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = a$.

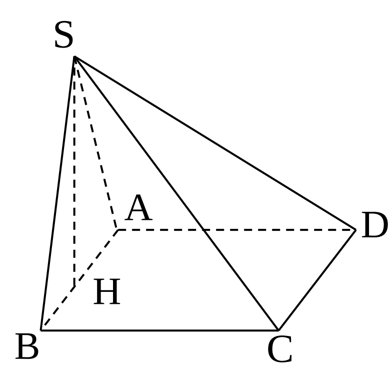
$S_{ABCD} = a^2$.

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SH.S_{ABCD} = \dfrac{a^3}{3}$.

Câu 17. Hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a, $SD = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$. Hình chiếu của S lên $(ABCD)$ là trung điểm H của AB. Thể tích khối chóp là:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$.   B. $\dfrac{a^3 2}{3}$.   C. $a^3\sqrt{12}$.   D. $\dfrac{a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải:



$S_{ABCD} = a^2$

$HD^2 = AH^2 + AD^2 = \dfrac{5a^2}{4}$

$\Rightarrow SH = \sqrt{SD^2 - HD^2} = \sqrt{\dfrac{13a^2}{4} - \dfrac{5a^2}{4}} = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SH.S_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$

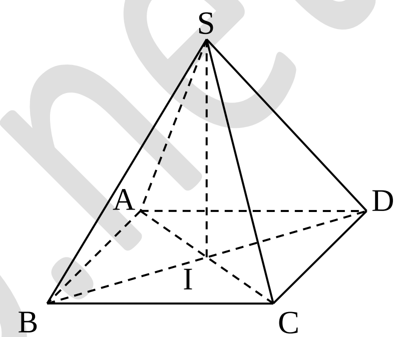
Câu 18. Hình chóp $S.ABCD$ đáy hình thoi, $AB = 2a$, góc BAD bằng 120^0. Hình chiếu vuông góc của S lên $(ABCD)$ là I giao điểm của 2 đường chéo, biết $SI = \frac{a}{2}$. Khi đó thể tích khối chóp $S.ABCD$ là :

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{9}$.

Hướng dẫn giải:

$$\begin{cases} SI = \frac{a}{2} \\ S_{ABCD} = AB.AD.\sin BAD = 2\sqrt{3}a^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SI.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$$

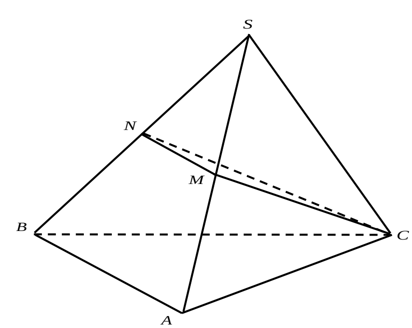


Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB. Tính tỉ số $\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.MNC}}$.

A. 4. B. $\frac{1}{2}$. C. 2. D. $\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải:

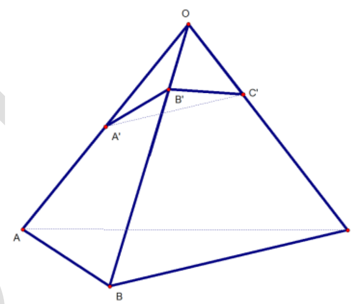
$$\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.MNC}} = \frac{SA}{SM}.\frac{SB}{SN} = 4$$



Câu 20. Cho khối chóp $O.ABC$. Trên ba cạnh OA, OB, OC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' sao cho $2OA' = OA,\ 4OB' = OB,\ 3OC' = OC$. Tính tỉ số $\dfrac{V_{O.A'B'C'}}{V_{O.ABC}}$.

A. $\dfrac{1}{24}$.　　B. $\dfrac{1}{12}$.　　C. $\dfrac{1}{16}$.　　D. $\dfrac{1}{32}$.

Hướng dẫn giải:



Ta có:

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{1}{2};\ \frac{OB'}{OB} = \frac{1}{4};\ \frac{OC'}{OC} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{O.A'B'C'}}{V_{O.ABC}} = \frac{OA'}{OA} \cdot \frac{OB'}{OB} \cdot \frac{OC'}{OC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$$

Câu 21. Cho hình chóp S.ABC. Gọi (α) là mặt phẳng qua A và song song với BC. (α) cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Tính tỉ số $\dfrac{SM}{SB}$ biết (α) chia khối chóp thành 2 phần có thể tích bằng nhau.

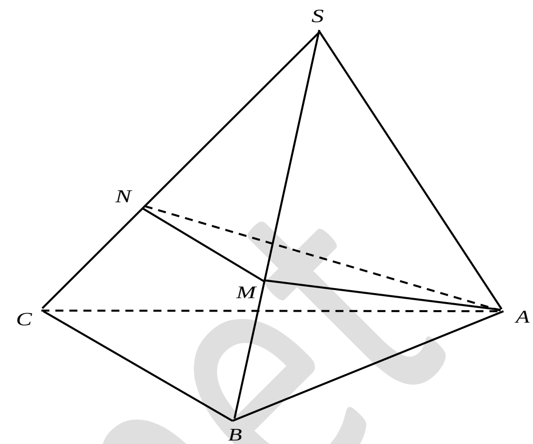
A. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.　　**B.** $\dfrac{1}{2}$.　　**C.** $\dfrac{1}{4}$.　　**D.** $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $MN//BC \Rightarrow \dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SN}{SC}$

Ta có: $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{SM}{SB}.\dfrac{SN}{SC} = \left(\dfrac{SM}{SB}\right)^2$

Ta có: $\dfrac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{SM}{SB} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

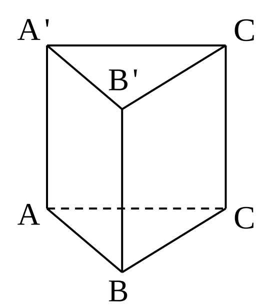


Câu 22. Thể tích của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a là:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải:

$\begin{cases} h = a \\ S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \end{cases} \Rightarrow V = h.S = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$



Câu 23. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình chữ nhật, $A'A = A'B = A'D$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, $AA' = 2a$.

A. $3a^3$. B. a^3. C. $a^3\sqrt{3}$. D. $3a^3\sqrt{3}$.

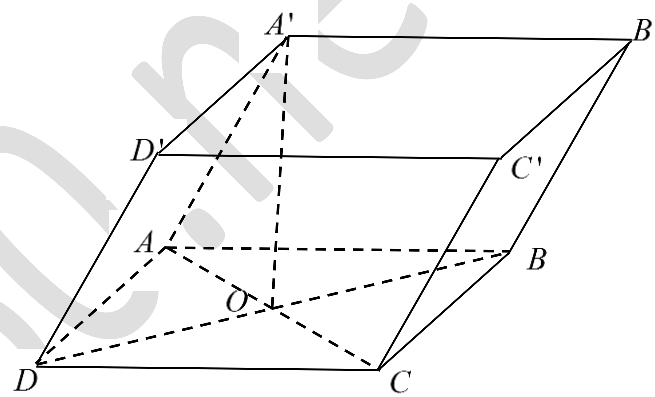
Hướng dẫn giải:

Gọi O là giao điểm của AC và BD .

$ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow OA = OB = OD$

Mà $A'A = A'B = A'D$

nên $A'O \perp (ABD)$ (vì $A'O$ là trục tam giác ABD)



ΔABD vuông tại A

$\Rightarrow BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a$

$\Rightarrow OA = OB = OD = a$

$\Delta AA'O$ vuông tại O

$\Rightarrow A'O = \sqrt{AA'^2 - AO^2} = a\sqrt{3}$

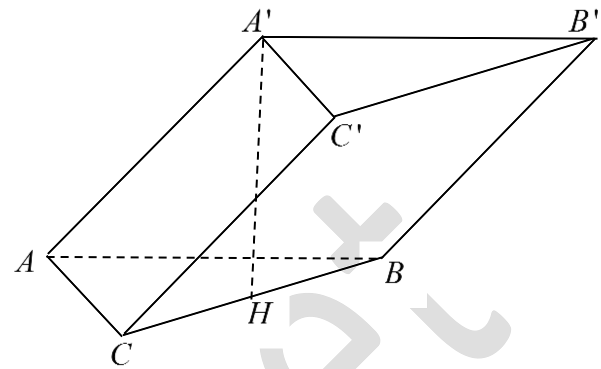
$S_{ABCD} = AB.AD = a^2\sqrt{3}$

$V_{ABCDA'B'C'D'} = A'O.S_{ABCD} = 3a^3$.

Câu 24. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có ABC là tam giác vuông tại A. Hình chiếu của A' lên (ABC) là trung điểm của BC. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biết $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$, $AA' = 2a$.

A. $\dfrac{3a^3}{2}$.   B. $\dfrac{a^3}{2}$.   C. $a^3\sqrt{3}$.   D. $3a^3\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:



Gọi H là trung điểm của BC

$\Rightarrow A'H \perp (ABC)$.

ABC là tam giác vuông tại A

$\Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a$

$\Rightarrow AH = \frac{1}{2}BC = a$

$\Delta A'AH$ vuông tại H

$\Rightarrow A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = a\sqrt{3}$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

$V_{ABCA'B'C'} = A'H.S_{ABC} = \frac{3a^3}{2}$.

Câu 25. Cho lăng trụ $ABCDA'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình thoi. Hình chiếu của A' lên $(ABCD)$ là trọng tâm của tam giác ABD. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCA'B'C'$ biết $AB = a$, $ABC = 120^0$, $AA' = a$.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. C. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. D. $a^3\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi H là trọng tâm của tam giác ABD

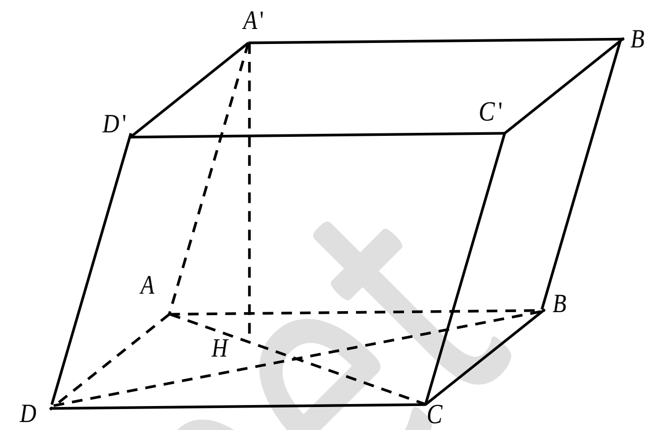
$\Rightarrow A'H \perp (ABCD)$.

Ta có: $BAD = 180^0 - ABC = 60^0$.

Tam giác ABD cân có $BAD = 60^0$

nên tam giác ABD đều.

ABD là tam giác đều cạnh a



$$\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$\Delta A'AH$ vuông tại H

$$\Rightarrow A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

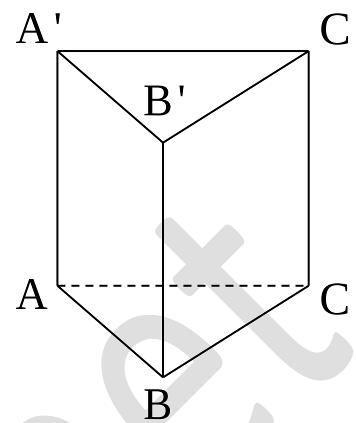
$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$V_{ABCDA'B'C'D'} = A'H.S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2} .$$

Câu 26. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Tính tỉ số $\dfrac{V_{ABB'C'}}{V_{ABCA'B'C'}}$.

A. $\dfrac{1}{3}$. B. $\dfrac{1}{6}$. C. $\dfrac{1}{2}$. D. $\dfrac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải:



Ta có: $BB'C'C$ là hình bình hành

$$\Rightarrow S_{BB'C'} = \frac{1}{2} S_{BB'C'C}$$

$$\Rightarrow V_{A.BB'C'} = \frac{1}{2} V_{A.BB'C'C}$$

Ta có: $V_{A.A'B'C'} = \frac{1}{3} V_{ABCA'B'C'}$

$$\Rightarrow V_{A.BB'C'C} = V_{ABCA'B'C'} - V_{A.A'B'C'} = \frac{2}{3} V_{ABCA'B'C'}$$

$$\Rightarrow V_{ABB'C'} = \frac{1}{3} V_{ABCA'B'C'} \Rightarrow \frac{V_{ABB'C'}}{V_{ABCA'B'C'}} = \frac{1}{3}$$

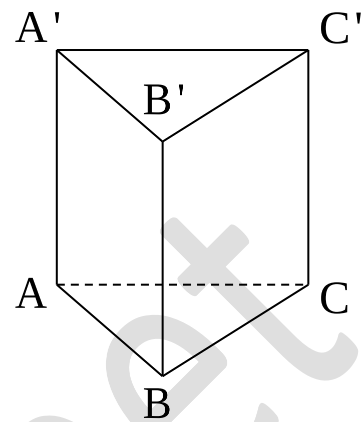
Câu 27. Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Thể tích khối tứ diện $A'BB'C'$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{a^3}{12}$.

Hướng dẫn giải:

$$\begin{cases} h = BB' = a \\ S_{A'B'C'} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{A'BB'C'} = \frac{1}{3}BB'.S_{A'B'C'} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$



.

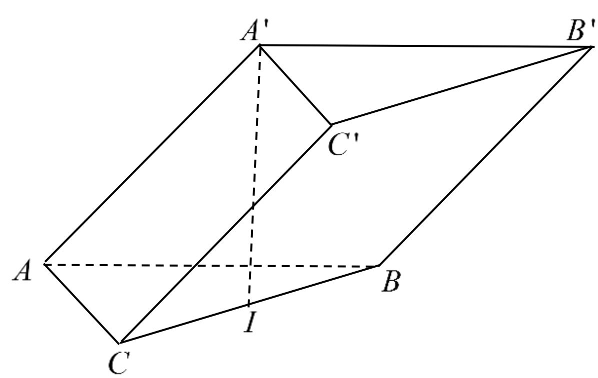
Câu 28. Lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy tam giác đều cạnh a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30^0. Hình chiếu A' lên (ABC) là trung điểm I của BC. Thể tích khối lăng trụ là:

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$. B. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$. D. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Hướng dẫn giải:

$$\begin{cases} A'I = AI.\tan\left(30^0\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a}{2} \\ S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = A'I.S_{ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$$



Câu 29. Lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $BC = 2a$, $AB = a$. Mặt bên $(BB'C'C)$ là hình vuông. Khi đó thể tích lăng trụ là:

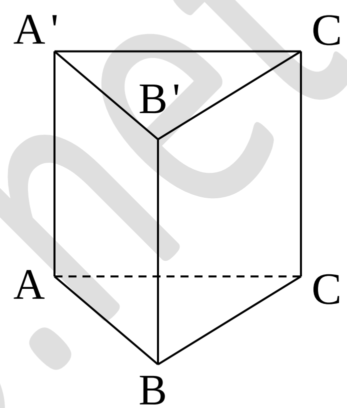
A. $a^3\sqrt{3}$.
B. $a^3\sqrt{2}$.
C. $2a^3\sqrt{3}$.
D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

$$\begin{cases} h = BB' = 2a \\ AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = a\sqrt{3} \end{cases}$$

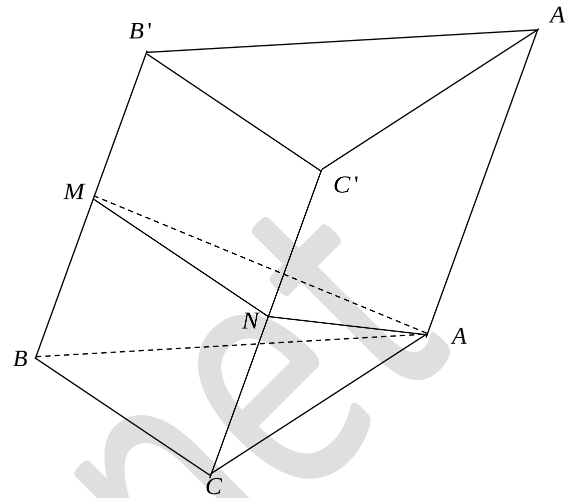
$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow V_{ABC.A'B'C'} = BB'.S_{ABC} = a^3\sqrt{3}$$



Câu 30. Cho lăng trụ $ABCA'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CC' và BB'. Tính tỉ số $\frac{V_{ABCMN}}{V_{ABCA'B'C'}}$.

A. $\frac{1}{3}$.
B. $\frac{1}{6}$.
C. $\frac{1}{2}$.
D. $\frac{2}{3}$.



Ta có: $BB'C'C$ là hình bình hành

$\Rightarrow S_{BCMN}=\frac{1}{2}S_{BB'C'C}$

$\Rightarrow V_{A.BCMN}=\frac{1}{2}V_{A.BB'C'C}$

Ta có: $V_{A.A'B'C'}=\frac{1}{3}V_{ABCA'B'C'}$

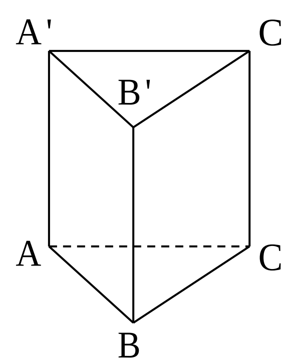
$\Rightarrow V_{A.BB'C'C}=V_{ABCA'B'C'}-V_{A.A'B'C'}=\frac{2}{3}V_{ABCA'B'C'}$

$\Rightarrow V_{A.BCMN}=\frac{1}{3}V_{ABCA'B'C'}\Rightarrow\frac{V_{A.BCMN}}{V_{ABCA'B'C'}}=\frac{1}{3}.$

Câu 31. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Tỉ số thể tích giữa khối chóp $A'.ABC$ và khối lăng trụ đó là:

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải:



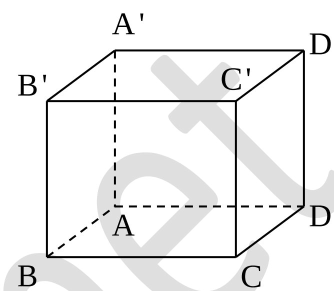
$V_{A'ABC}=\frac{1}{3}AA'.S_{ABC}=\frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$

$\Rightarrow\frac{V_{A'ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{1}{3}$

Câu 32. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tỉ số thể tích giữa khối $A'.ABD$ và khối lập phương là:

A. $\frac{1}{6}$. B. $\frac{1}{8}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải:



$$V_{A'.ABD}=\frac{1}{3}AA'.S_{ABD}$$
$$=\frac{1}{3}AA'.\frac{1}{2}AB.AD=\frac{1}{6}AA'.S_{ABCD}$$
$$=\frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'}$$
$$\Rightarrow\frac{V_{A'.ABD}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\frac{1}{6}.$$

Chủ đề 7.4. KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

B. BÀI TẬP

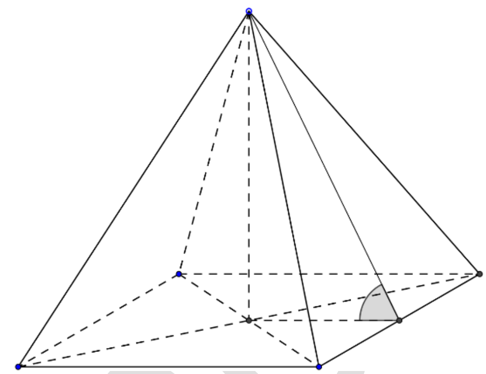
VẬN DỤNG THẤP

Câu 1. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có chiều cao bằng h, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng α. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo h và α.

A. $\frac{4h^3}{3\tan^2\alpha}$. B. $\frac{3h^3}{4\tan^2\alpha}$. C. $\frac{8h^3}{3\tan^2\alpha}$. D. $\frac{3h^3}{8\tan^2\alpha}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi O là tâm của mặt đáy thì $SO \perp mp(ABCD)$. Từ đó, SO là đường cao của hình chóp.Gọi M là trung điểm đoạn CD.



Ta có:

$$\begin{cases} CD \perp SM \subset (SCD) \\ CD \perp OM \subset (ABCD) \\ CD = (SCD) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SMO = \alpha .$$

$V = \dfrac{1}{3}.S_{ABCD}.SO.$

$B = S_{ABCD} = AB^2$

Tìm AB: $AB = 2OM$

Tam giác SOM vuông tại tại O, ta có: $\tan\alpha = \dfrac{SO}{OM} = \dfrac{h}{OM} \Rightarrow OM = \dfrac{h}{\tan\alpha}$.

$\Rightarrow AB = \dfrac{2h}{\tan\alpha}$. Suy ra: $B = S_{ABCD} = \dfrac{4h^2}{\tan^2\alpha}$. $SO = h$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{4h^2}{\tan^2\alpha}.h = \dfrac{4h^3}{3\tan^2\alpha}$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, cạnh SB vuông góc với đáy và mặt phẳng (SAD) tạo với đáy một góc $60°$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \dfrac{8a^3\sqrt{3}}{3}$. B. $V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. C. $V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. D. $V = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có: $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SB \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB)$

$\Rightarrow AD \perp SA.$

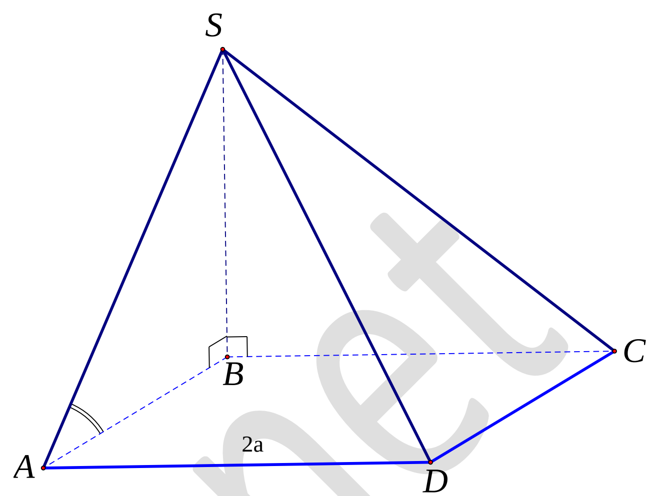
$\Rightarrow SAB = 60^0$.

$S_{ABCD} = 4a^2.$

Xét tam giác *SAB* tại vuông tại *B*, ta có:

$SB = AB \tan 60^0 = 2a\sqrt{3}$.

Vậy $V = \dfrac{1}{3}.4a^2.\ 2a\sqrt{3} = \dfrac{8a^3\sqrt{3}}{3}$.



Câu 3. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $BC = a$, mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc $30°$ và tam giác $A'BC$ có diện tích bằng $a^2\sqrt{3}$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. C. $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. D. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

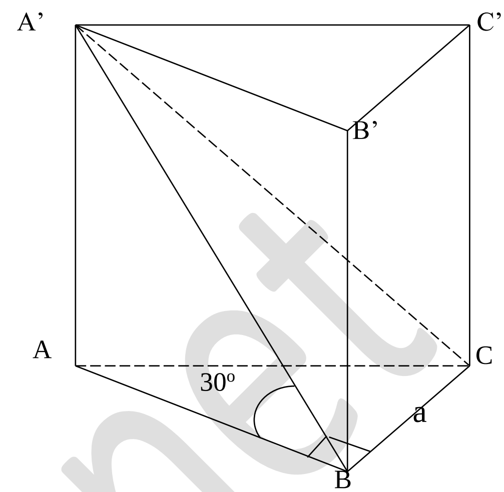
Hướng dẫn giải:

$V = Bh = S_{ABC.A'B'C'}.AA'$.

Do $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp A'B$.

Và $\begin{cases} BC \perp AB \subset (ABC) \\ BC \perp A'B \subset (A'BC) \\ BC = (ABC) \cap (A'BC) \end{cases}$

$\Rightarrow \left((ABC),(A'BC)\right) = \left(AB, A'B\right) = ABA'$



Ta có:

$S_{\Delta A'BC} = \frac{1}{2} A'B.BC$

$\Rightarrow A'B = \frac{2.S_{\Delta A'BC}}{BC} = \frac{2.a^2\sqrt{3}}{a} = 2a\sqrt{3}$.

$AB = A'B.\cos ABA' = 2a\sqrt{3}.\cos 30^0 = 3a$

$AA' = A'B.\sin ABA' = 2a\sqrt{3}.\sin 30^0 = a\sqrt{3}$

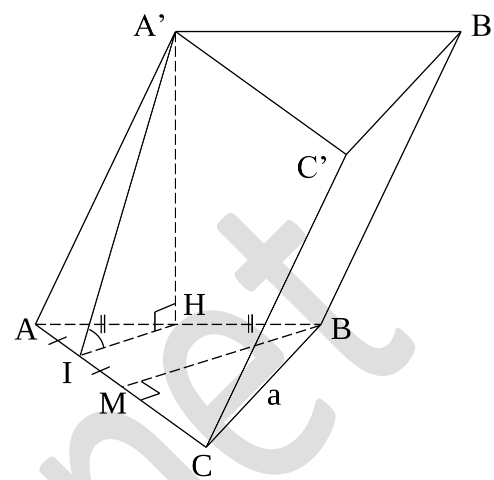
$V_{ABC.A'B'C'} = B.h = S_{ABC}.AA' = \frac{1}{2}.AB.BC.AA'$

$= \frac{1}{2}.3a.a.a\sqrt{3} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a. Hình chiếu vuông góc của A' trên (ABC) là trung điểm của AB. Mặt phẳng $(AA'C'C)$ tạo với đáy một góc bằng $45°$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V = \frac{3a^3}{16}$. B. $V = \frac{3a^3}{8}$. C. $V = \frac{3a^3}{4}$. D. $V = \frac{3a^3}{2}$.

Hướng dẫn giải:



Gọi *H*, *M*, *I* lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng *AB*, *AC*, *AM*.

$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'H$.

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Ta có *IH* là đường trung bình của tam giác AMB , *MB* là trung tuyến của tam giác đều *ABC*.

Do đó: $\begin{cases} IH \,//\, MB \\ MB \perp AC \end{cases} \Rightarrow IH \perp AC$

$\begin{cases} AC \perp A'H \\ AC \perp IH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (A'HI) \Rightarrow AC \perp A'I$

Mà: $\begin{cases} AC \perp IH \subset (ABC) \\ AC \perp A'I \subset (ACC'A') \\ (ABC) \cap (ACC'A') = AC \end{cases} \Rightarrow A'IH$ là góc gữa hai mặt phẳng $(AA'C'C)$ và $(ABCD) \Rightarrow A'IH = 45°$

Trong tam giác $A'HI$ vuông tại *H*, ta có: $\tan 45° = \dfrac{A'H}{HI} \Rightarrow A'H = IH.\tan 45^o$.

$= IH = \dfrac{1}{2}MB = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Vậy $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^3}{16}$

Câu 5. Cho hình chóp đều $S.ABC$, góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy (ABC) bằng 60^0, khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng $\dfrac{3a}{2\sqrt{7}}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ theo a bằng

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$. B. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$. C. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$. D. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi M là trung điểm của BC.
Trong mp(SAM), Kẻ $MH \perp SA, (H \in SA)$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp MH$.

Do đó MH là đường vuông góc chung của SA và BC.

Suy ra $MH = \dfrac{3a}{2\sqrt{7}}$. Ta có: $SM \perp BC \Rightarrow ((SBC),(ABC)) = SMA = 60^0$.

Đặt $OM = x \Rightarrow AM = 3x, OA = 2x$.

$\Rightarrow SO = OM.\tan 60^0 = x\sqrt{3}$ và

$SA = \sqrt{(x\sqrt{3})^2 + (2x)^2} = x\sqrt{7}$.

Trong $\triangle SAM$ ta có:

$SA.MH = SO.AM \Leftrightarrow x\sqrt{7}.\dfrac{3a}{2\sqrt{7}} = x\sqrt{3}.3x \Leftarrow$

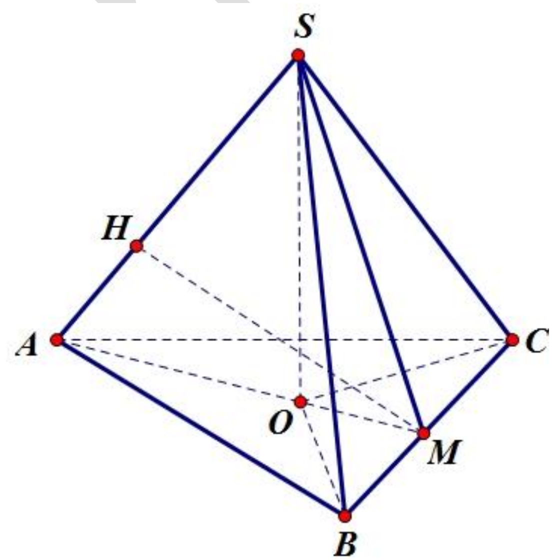
.

Khi đó:

$AM = 3x = 3.\dfrac{a}{2\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = a$.

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SO = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{24}$

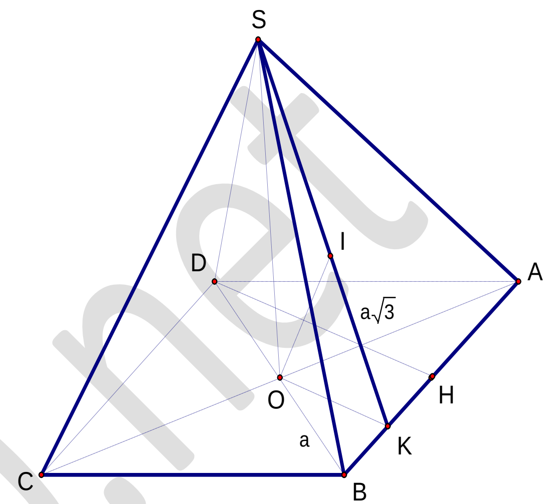
.



Câu 6. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $AC = 2\sqrt{3}a$, $BD = 2a$, hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$.　　B. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$.　　C. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$.　　D. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Hướng dẫn giải



Ta có tam giác ABO vuông tại O và
$AO = a\sqrt{3}$,
$BO = a$. Do đó
$\frac{AO}{BO} = \sqrt{3} = \tan 60^0 \Rightarrow ABO = 60^0$.
Suy ra ΔABD đều.
Ta có:
$$\begin{cases} (SAC) \perp (ABCD) \\ (SBD) \perp (ABCD) \\ (SAC) \cap (SBD) = SO \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$$
.
Trong tam giác đều ABD ,gọi H là trung điểm AB,
K là trung điểm BH,

suy ra $DH \perp AB$ và $DH = a\sqrt{3}$; $OK // DH$ và $OK = \frac{1}{2}DH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $OK \perp AB \Rightarrow AB \perp (SOK)$.

Gọi I là hình chiếu của O lên SK, ta có: $OI \perp SK; AB \perp OI \Rightarrow OI \perp (SAB)$.

$\Rightarrow OI = d\left[O; (SAB)\right]$.

Tam giác SOK vuông tại O, OI là đường cao: $\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{SO^2} \Rightarrow SO = \frac{a}{2}$.

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABCD}.SO = \frac{1}{3}.4.S_{\Delta ABO}.SO = \frac{1}{3}.4.\frac{1}{2}.OA.OB.SO = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$$

Câu 7. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, O là giao điểm của AC và BD. Biết mặt bên của hình chóp là tam giác đều và khoảng từ O đến mặt bên là a. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A. $2a^3\sqrt{3}$. B. $4a^3\sqrt{3}$. C. $6a^3\sqrt{3}$. D. $8a^3\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi M là trung điểm của CD, trong ΔSOM kẻ đường cao OH.

$\Rightarrow OH \perp (SCD) \Rightarrow OH = a$.

Đặt $CM = x$. Khi đó $OM = x$,

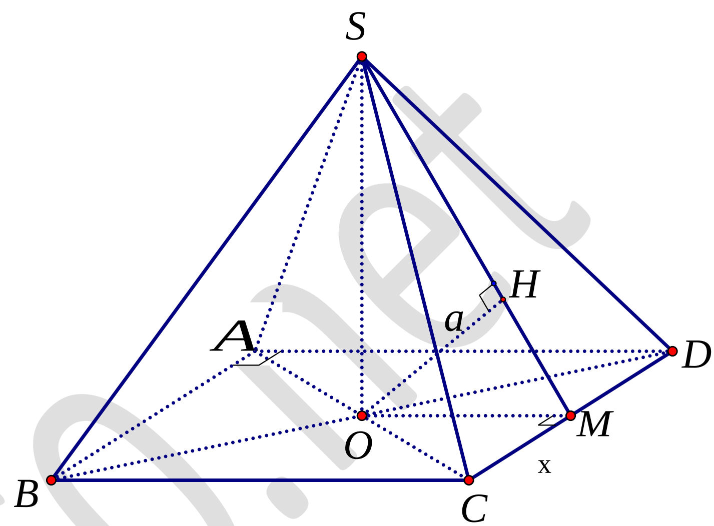
$SM = x\sqrt{3}$,

$SO = \sqrt{SM^2 - x^2} = x\sqrt{2}$.

Ta có: $SM.OH = SO.OM$

$\Leftrightarrow x\sqrt{3}.a = x\sqrt{2}.x \Rightarrow x = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow CD = a\sqrt{6}, SO = a\sqrt{3}$



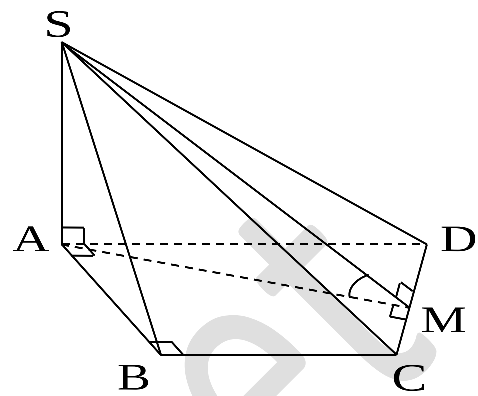
$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.CD^2.SO = \frac{1}{3}.6a^2.a\sqrt{3} = 2a^3\sqrt{3}.$$

Câu 8. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$. $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B biết $AB = 2a$. $AD = 3BC = 3a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a biết góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng 60^0.

A. $2\sqrt{6}a^3$. B. $6\sqrt{6}a^3$. C. $2\sqrt{3}a^3$. D. $6\sqrt{3}a^3$.

Hướng dẫn giải:

Dựng $AM \perp CD$ tại M.



Ta có: $SMA = 60^0$.

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2}.AB = 4a^2$$

$$CD = \sqrt{(AD - BC)^2 + AB^2} = 2a\sqrt{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = a^2$$

$$S_{ACD} = S_{ABCD} - S_{ABC} = 3a^2$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2}AM.CD \Rightarrow AM = \frac{2S_{ACD}}{CD} = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$$

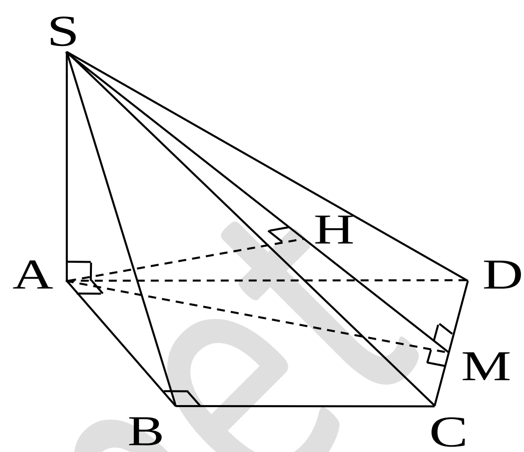
Ta có: $SA = AM.\tan SMA = \frac{3\sqrt{6}}{2}a$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = 2\sqrt{6}a^3.$$

Câu 9. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B biết $AB = 2a$. $AD = 3BC = 3a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a, biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{3\sqrt{6}}{4}a$.

A. $2\sqrt{6}a^3$. B. $6\sqrt{6}a^3$. C. $2\sqrt{3}a^3$. D. $6\sqrt{3}a^3$.

Hướng dẫn giải:



Dựng $AM \perp CD$ tại M .

Dựng $AH \perp SM$ tại H .

Ta có: $AH = \dfrac{3\sqrt{6}}{4}a$.

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2}.AB = 4a^2$$

$$CD = \sqrt{(AD-BC)^2 + AB^2} = 2a\sqrt{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = a^2$$

$$S_{ACD} = S_{ABCD} - S_{ABC} = 3a^2$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2}AM.CD \Rightarrow AM = \frac{2S_{ACD}}{CD} = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$$

Ta có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AS^2} \Rightarrow AS = \dfrac{AH.AM}{\sqrt{AM^2 - AH^2}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{2}a$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SA.S_{ABCD} = 2\sqrt{6}a^3$$

Câu 10. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, góc giữa đường thẳng BB' và (ABC) bằng $60°$, tam giác ABC vuông tại C và góc $BAC = 60°$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên (ABC) trùng với trọng tâm của ΔABC. Thể tích của khối tứ diện $A'.ABC$ theo a bằng

A. $\dfrac{9a^3}{208}$. B. $\dfrac{7a^3}{106}$. C. $\dfrac{15a^3}{108}$. D. $\dfrac{13a^3}{108}$.

Hướng dẫn giải:

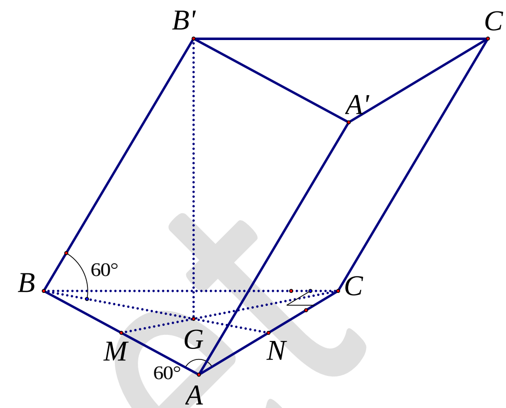
Gọi M, N là trung điểm của AB, AC
và G là trọng tâm của ΔABC.

$B'G \perp (ABC) \Rightarrow \left(BB', (ABC)\right) = B'BG = 60^0$.

$V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.B'G = \frac{1}{6}.AC.BC.B'G$

Xét $\Delta B'BG$ vuông tại G, có $B'BG = 60^0$

$\Rightarrow B'G = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. (nửa tam giác đều)



Đặt $AB = 2x$. Trong ΔABC vuông tại C có $BAC = 60^0$
$\Rightarrow$ tam giác ABC là nữa tam giác đều
$\Rightarrow AC = \frac{AB}{2} = x,\ BC = x\sqrt{3}$

Do G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow BN = \frac{3}{2}BG = \frac{3a}{4}$.

Trong ΔBNC vuông tại C: $BN^2 = NC^2 + BC^2$

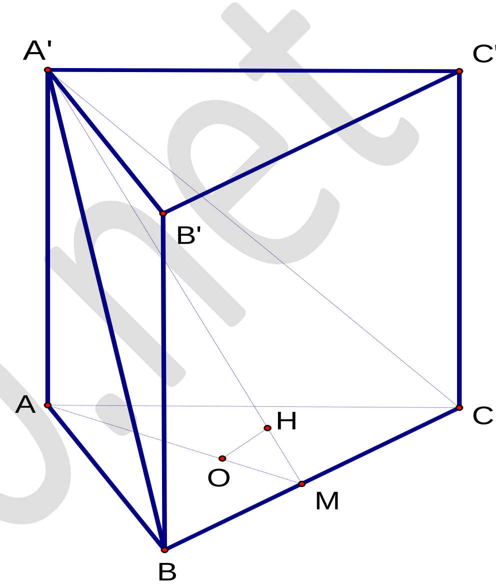
$$\Leftrightarrow \frac{9a^2}{16} = \frac{x^2}{4} + 3x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9a^2}{52} \Rightarrow x = \frac{3a}{2\sqrt{13}} \Rightarrow \begin{cases} AC = \frac{3a}{2\sqrt{13}} \\ BC = \frac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} \end{cases}$$

Vậy, $V_{A'ABC} = \frac{1}{6}.\frac{3a}{2\sqrt{13}}.\frac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{9a^3}{208}$.

Câu 11. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, biết đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Khoảng cách từ tâm O của tam giác ABC đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{6}$.Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$. B. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{28}$. C. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$.

Hướng dẫn giải:



Gọi M là trung điểm của BC,
ta có $(A'AM)\perp(A'BC)$ theo giao tuyến $A'M$.
Trong $(A'AM)$ kẻ $OH\perp A'M$ $(H\in A'M)$.
$\Rightarrow OH\perp(A'BC)$

Suy ra: $d\left(O,(A'BC)\right)=OH=\frac{a}{6}$.

$S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$..

Xét hai tam giác vuông $A'AM$ và OHM có góc M chung nên chúng đồng dạng.

Suy ra: $\frac{OH}{A'A}=\frac{OM}{A'M}\Rightarrow\frac{\frac{a}{6}}{A'A}=\frac{\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{A'A^2+AM^2}}\Rightarrow\frac{1}{A'A}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{A'A^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}$.

$\Rightarrow A'A=\frac{a\sqrt{6}}{4}$

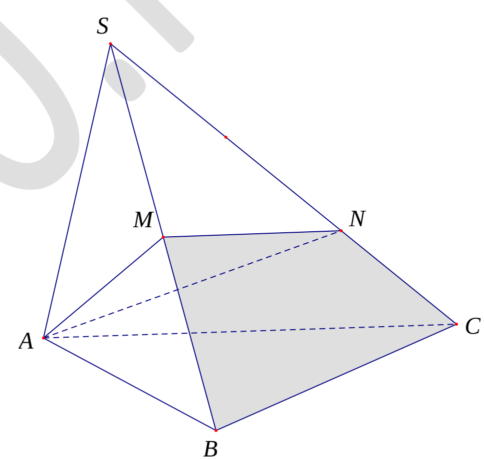
$V_{ABC.A'B'C'}=S_{\Delta ABC}.A'A=\frac{a\sqrt{6}}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$.

VẬN DỤNG CAO

Câu 12. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có M là trung điểm của SB, N là điểm trên cạnh SC sao cho $NS = 2NC$. Kí hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích của các khối chóp $A.BMNC$ và $S.AMN$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2} = 2$.   B. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$ C. $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{3}$ D. $\frac{V_1}{V_2} = 3$

Hướng dẫn giải



$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3};$$

$$V_{S.AMN} + V_{A.BMNC} = V_{S.ABC}.$$

Suy ra, $\frac{V_{A.BMNC}}{V_{S.AMN}} = 2$.

Câu 13. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có M là trung điểm của SB, N là điểm trên cạnh SC sao cho $NS = 2NC$, P là điểm trên cạnh SA sao cho $PA = 2PS$. Kí hiệu V_1, V_2 lần lượt là thể tích của các khối tứ diện $BMNP$ và $SABC$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{9}$.　　B. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{3}{4}$.　　C. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{3}$.　　D. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{3}$.

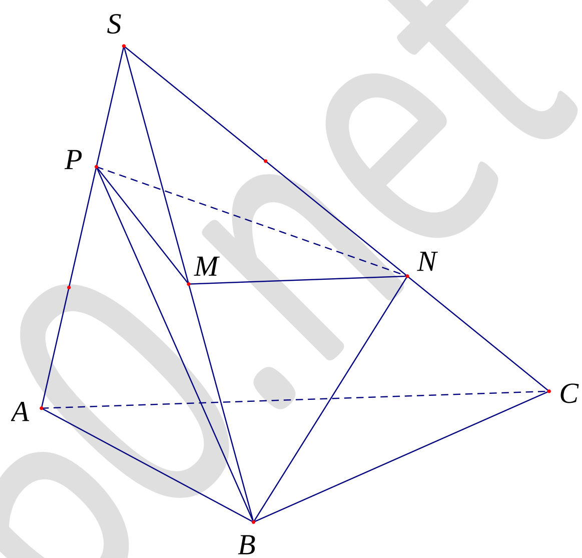
Hướng dẫn giải

$$\frac{V_{N.BMP}}{V_{C.SAB}}=\frac{\frac{1}{3}\cdot d(N,(SAB))\cdot S_{BMP}}{\frac{1}{3}\cdot d(C,(SAB))\cdot S_{SAB}};$$

$$\frac{d(N,(SAB))}{d(C,(SAB))}=\frac{NS}{CS}=\frac{2}{3},$$

$$S_{BPM}=\frac{1}{2}S_{BPS}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}S_{SAB}$$

Suy ra, $\frac{V_{N.BMP}}{V_{C.SAB}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$.

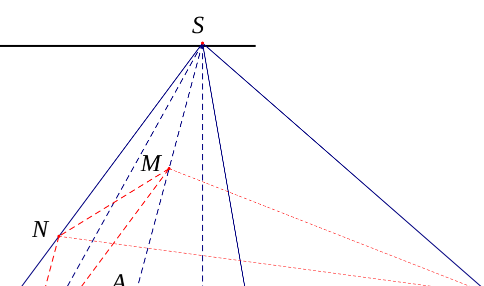


Câu 14. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$ bằng $45°$; M, N và P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB và AB. Tính thể tích V của khối tứ diện $DMNP$.

Hướng dẫn giải:

A. $V=\frac{a^3}{6}$　　B. $V=\frac{a^3}{4}$　　C. $V=\frac{a^3}{12}$　　D. $V=\frac{a^3}{2}$

Hướng dẫn giải



Ta có: $\dfrac{S_{SMN}}{S_{SAB}}=\dfrac{SM}{SA}\cdot\dfrac{SN}{SB}=\dfrac{1}{4}$.

Tương tự, $\dfrac{S_{BNP}}{S_{SAB}}=\dfrac{1}{4},\dfrac{S_{AMP}}{S_{SAB}}=\dfrac{1}{4}$.

Suy ra $\dfrac{S_{MNP}}{S_{SAB}}=\dfrac{1}{4}$ (có thể khẳng định

$\dfrac{S_{MNP}}{S_{SAB}}=\dfrac{1}{4}$ nhờ hai tam giác MNP và BAS là

hai tam giác đồng dạng với tỉ số $k=\dfrac{1}{2}$).

Do đó $\dfrac{V_{D.MNP}}{V_{D.SAB}}=\dfrac{1}{4}$ (1)

$V_{D.SAB}=V_{S.DAB}=\dfrac{1}{2}V_{S.ABCD}$. (2)

$V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD}=\dfrac{1}{3}OP.\tan 45^\circ.S_{ABCD}=\dfrac{4a^3}{3}$ (3). Từ (1), (2) và (3): $V_{DMNP}=\dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{4a^3}{3}=\dfrac{a^3}{6}$.

Câu 15. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AC=2a$; cạnh bên $AA'=\sqrt{2}a$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh AC. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

A. $V=a^3$. **B.** $V=\dfrac{a^3}{3}$. **C.** $V=\dfrac{1}{2}a^3$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

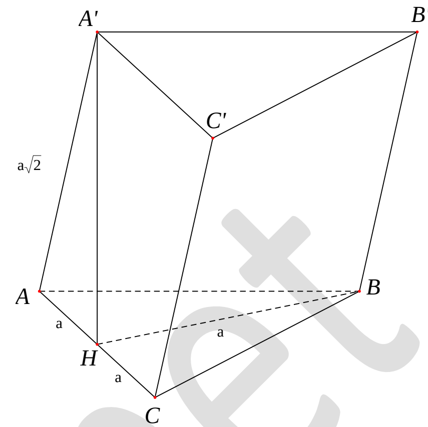
Hướng dẫn giải

Vì ABC là tam giác vuông cân tại B nên trung tuyến BH cũng là đường cao của nó, và

$HB = HA = HC = \frac{1}{2}AC = a$.

$A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \sqrt{2a^2 - a^2} = a$.

$V_{ABC.A'B'C'} = A'H \cdot S_{ABC} = A'H \cdot \frac{1}{2}BH \cdot AC = a^3$



Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh AB, AC và AD đôi một vuông góc với nhau. Gọi G_1, G_2, G_3 và G_4 lần lượt là trọng tâm các mặt ABC, ABD, ACD và BCD. Biết $AB = 6a$, $AC = 9a$, $AD = 12a$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $G_1G_2G_3G_4$.

A. $4a^3$ B. a^3 C. $108a^3$ D. $36a^3$

Hướng dẫn giải

Trong trường hợp tổng quát, ta chứng minh được $\boxed{V_{G_1G_2G_3G_4} = \frac{1}{27}V_{ABCD}}$.

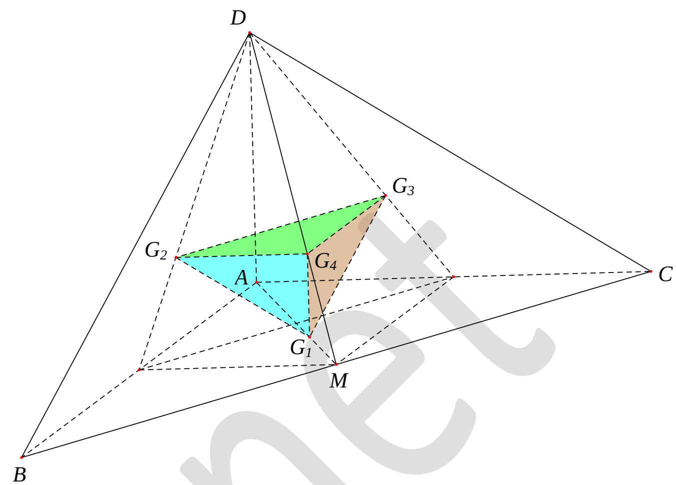
Thật vậy,

ta có $(G_2G_3G_4) \parallel (CBA)$ và $\triangle G_2G_3G_4) \sim \triangle CBA$ (tỉ số đồng dạng $k = \frac{1}{3}$). Từ đó: $\frac{S_{G_2G_3G_4}}{S_{CBA}} = k^2 = \frac{1}{9}$ và

$d(G_1,(G_2G_3G_4)) = d(G_4,(ABC))$

$= \frac{1}{3}d(D,(ABC))$ (do $G_4M = \frac{1}{3}DM$)

Suy ra



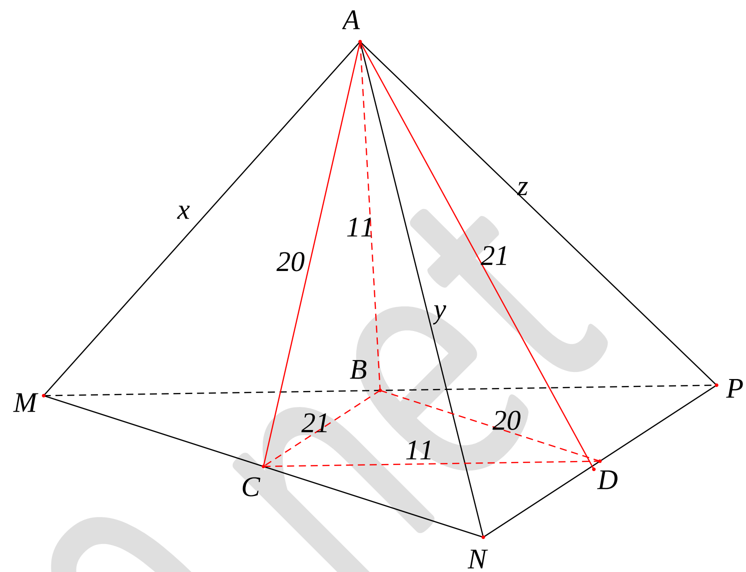
$$\frac{V_{G_1G_2G_3G_4}}{V_{ABCD}} = \frac{d(G_1,(G_2G_3G_4))}{d(D,(ABC))}\cdot\frac{S_{G_2G_3G_4}}{S_{CBA}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{27}$$

$$\Rightarrow V_{G_1G_2G_3G_4} = \frac{1}{27}V_{ABCD} = \frac{1}{27}\cdot\frac{1}{6}.AB.AC.AD = 4a^3$$

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 11m$, $BC = AD = 20m$, $BD = AC = 21m$. Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

A. $360m^3$ B. $720m^3$ C. $770m^3$ D. $340m^3$

Hướng dẫn giải



Dựng tam giác *MNP* sao cho *C*, *B*, *D* lần lượt là trung điểm các cạnh *MN*, *MP*, *NP*.

Do *BD* là đường trung bình tam giác *MNP* nên $BD = \frac{1}{2}MN$ hay

$AC = \frac{1}{2}MN$.

Tam giác AMN vuông tại A (do có trung tuyến bằng một nửa cạnh tương ứng), hay $AM \perp AN$. Tương tự, $AP \perp AN$ và

$AM \perp AP$.

Ta có $S_{MBC} = \frac{1}{4}S_{MNP}$,

$S_{NCD} = \frac{1}{4}S_{MNP}$, $S_{BPD} = \frac{1}{4}S_{MNP}$.

.

Suy ra $S_{BCD} = \frac{1}{4}S_{MNP}$ .Từ đó, $\boxed{V_{ABCD} = \frac{1}{4}V_{AMNP}}$.

Đặt $x = \frac{AM}{m}, y = \frac{AN}{m}, z = \frac{AP}{m}$. Ta có $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4.20^2 \\ y^2 + z^2 = 4.21^2 \\ x^2 + z^2 = 4.11^2 \end{cases}$,

suy ra $\begin{cases} x^2 = 160 \\ y^2 = 1440 \\ z^2 = 324 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{6}xyz = 1440 \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{4}V_{AMNP} = 360m^3$

(AM, AN, AP đôi một vuông góc nên $V_{AMNP} = \frac{1}{6} AM.AN.AP$)

[Phương pháp trắc nghiệm]

Thể tích của khối tứ diện có các cặp cạnh đối đôi một bằng nhau tương ứng a, b, c là

$$\boxed{V = \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2)}}$$

Câu 18. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là vuông; mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{3\sqrt{7}a}{7}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V = \frac{3a^3}{2}$. **B.** $V = a^3$. **C.** $V = \frac{2}{3}a^3$. **D.** $V = \frac{1}{3}a^3$.

Hướng dẫn giải

Gọi H là trung điểm AB, suy ra SH là chiều cao khối chóp đã cho.

Kí hiệu x là độ dài cạnh đáy.

Ta có $SH = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ và $V_{S.ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{6}x^3$.

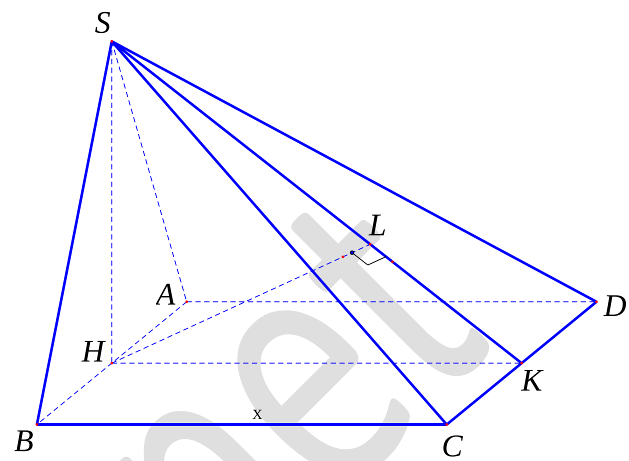
Kẻ $HK \perp CD$ $(K \in CD)$;

Kẻ $HL \perp SK$ $(\mathrm{L} \in SK)$.

Suy ra $HL \perp (SCD)$ và

$d(A,(SCD)) = d(H,(SCD))$

$= HL = \dfrac{HS \cdot HK}{\sqrt{HS^2 + HK^2}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}x$



.

Theo gt, $\dfrac{\sqrt{21}}{7}x = \dfrac{3\sqrt{7}a}{7} \Rightarrow x = a\sqrt{3}$. Suy ra $V_{S.ABCD} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}x^3 = \dfrac{\sqrt{3}}{6}(a\sqrt{3})^3 = \dfrac{3}{2}a^3$

Câu 19. Cho tứ diện $S.ABC$, M và N là các điểm thuộc các cạnh SA và SB sao cho $MA = 2SM$, $SN = 2NB$, (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SC. Kí hiệu (H_1) và (H_2) là các khối đa diện có được khi chia khối tứ diện $S.ABC$ bởi mặt phẳng (α), trong đó, (H_1) chứa điểm S, (H_2) chứa điểm A; V_1 và V_2 lần lượt là thể tích của (H_1) và (H_2). Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{4}{5}$ B. $\dfrac{5}{4}$ C. $\dfrac{3}{4}$ D. $\dfrac{4}{3}$

Hướng dẫn giải

Kí hiệu V là thể tích khối tứ diện $SABC$.

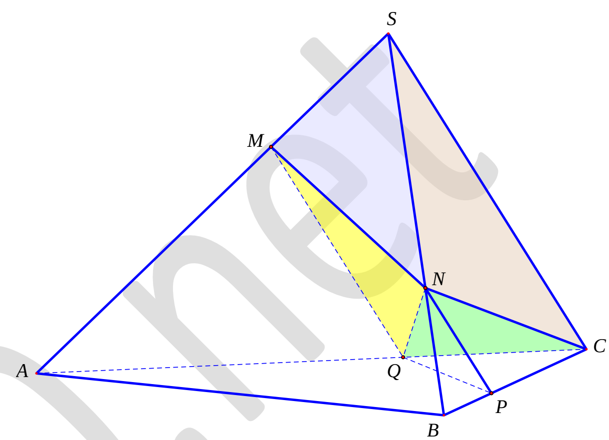
Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của (α) với các đường thẳng BC, AC.

Ta có $NP \parallel MQ \parallel SC$. Khi chia khối (H_1) bởi mặt phẳng (QNC), ta được hai khối chóp $N.SMQC$ và $N.QPC$.

Ta có: $\dfrac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}} = \dfrac{d(N,(SAC))}{d(\mathrm{B},(SAC))} \cdot \dfrac{S_{SMQC}}{S_{SAC}}$;

$\dfrac{d(N,(SAC))}{d(\mathrm{B},(SAC))} = \dfrac{NS}{BS} = \dfrac{2}{3}$;

$\dfrac{S_{AMQ}}{S_{ASC}} = \left(\dfrac{AM}{AS}\right)^2 = \dfrac{4}{9} \Rightarrow \dfrac{S_{SMQC}}{S_{ASC}} = \dfrac{5}{9}$.



Suy ra $\dfrac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{5}{9} = \dfrac{10}{27}$

$\dfrac{V_{N.QPC}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{d(N,(\mathrm{QP}C))}{d(\mathrm{S},(\mathrm{A}\,BC))} \cdot \dfrac{S_{QPC}}{S_{ABC}}$

$= \dfrac{NB}{SB} \cdot \dfrac{CQ}{CA} \cdot \dfrac{CP}{CB} == \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{27}$

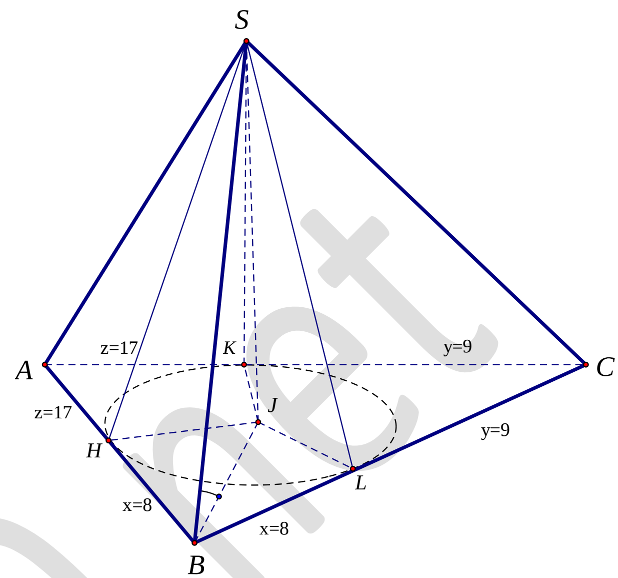
$\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{V_{N.SMQC}}{V_{B.ASC}} + \dfrac{V_{N.QPC}}{V_{S.ABC}} = \dfrac{10}{27} + \dfrac{2}{27} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_1 + V_2} = \dfrac{4}{9} \Rightarrow 5V_1 = 4V_2 \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{4}{5}$

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có chân đường cao nằm trong tam giác ABC; các mặt phẳng (SAB), (SAC) và (SBC) cùng tạo với mặt phẳng (ABC) các góc bằng nhau. Biết $AB = 25$, $BC = 17$, $AC = 26$; đường thẳng SB tạo với mặt đáy một góc bằng $45°$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

A. $V = 680$.　　B. $V = 408$.　　C. $V = 578$.　　D. $V = 600$.

Hướng dẫn giải

Gọi J là chân đường cao của hình chóp $S.ABC$; H, K và L lần lượt là hình chiếu của J trên các cạnh AB, BC và CA. Suy ra, SHJ, SLJ và SKJ lần lượt là góc tạo bởi mặt phẳng (ABC) với các mặt phẳng (SAB), (SBC) và (SAC). Theo giả thiết, ta có $SHJ = SLJ = SKJ$, suy ra các tam giác vuông SJH, SJL và SJK bằng nhau. Từ đó, $JH = JL = JK$. Mà J nằm trong tam giác ABC nên J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

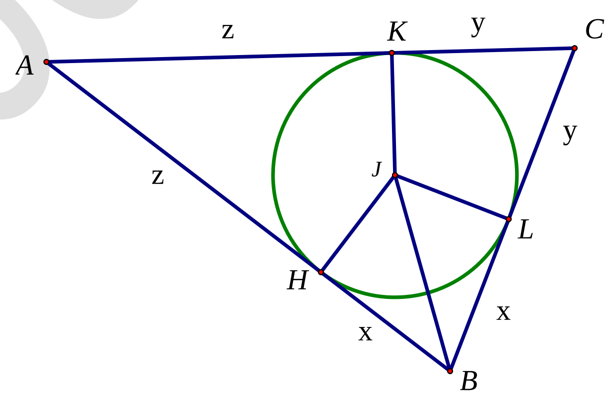


Áp dụng công thức Hê-rông, ta tính được diện tích S của tam giác ABC là $S = 204$.

Kí hiệu p là nửa chu vi tam giác ABC, r là bán kính đường tròn nội tiếp của ABC. Ta có $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{204}{34} = 6$. Đặt $x = BH = BL$,

$y = CL = CK$,

$z = AH = AK$.



Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 17 \\ x + z = 25 \\ y + z = 26 \end{cases}$.

Giải ra được $(x;y;z)=(8;9;17)$

$JB=\sqrt{JH^2+BH^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$. Ta có $SBJ=(SB,(ABC))=45°$, suy ra SJB là tam giác vuông cân tại J. $SJ=JB=10$.

Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ là $V=\frac{1}{3}SJ.S_{ABC}=680$