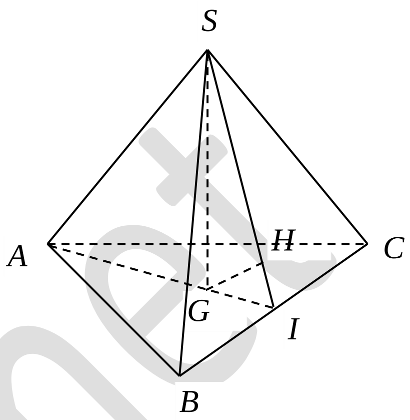
KHỐI CHÓP ĐỀU

Câu 1. Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC* có cạnh đáy bằng *a*. Góc giữa mặt bên với mặt đáy bằng 60^0. Khoảng cách từ điểm *A* đến mặt phẳng *(SBC)* bằng:

A. $\frac{3a}{4}$. B. $\frac{a}{4}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{3a}{2}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1] Phương pháp dựng hình



Gọi *G* là trọng tâm tam giác *ABC*, suy ra *G* là hình chiếu của *S* trên mặt phẳng *(ABC)*. Gọi *I* là trung điểm của *BC* suy ra góc giữa *(SBC)* với *(ABC)* là góc *SIG*.

Tam giác *ABC* đều cạnh bằng a nên $GI = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Theo bài $SIG = 60^0$, suy ra

$$SG = GI.\tan SIG = \frac{a\sqrt{3}}{6}\tan 60^0 = \frac{a}{2}.$$

Vì $\begin{cases} AG \cap (SBC) = I \\ \frac{AI}{GI} = 3 \end{cases}$ nên $d(A,(SBC)) = 3.d(G,(SBC))$.

Gọi *H* là hình chiếu của *G* trên *(SBC)* (*H* thuộc đoạn thẳng *SI*). Suy ra

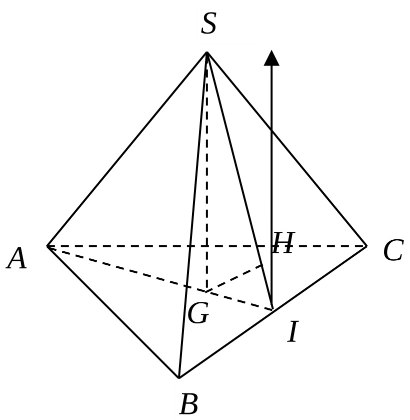
$$d(G,(SBC)) = GH = \sqrt{\frac{GS.GI}{GS^2+GI^2}} = \sqrt{\frac{\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{12}}} = \frac{a}{4},$$ suy ra $d(A,(SBC)) = 3.d(G,(SBC)) = \frac{3a}{4}$.

[Cách 2] Phương pháp thể tích.

Ta có: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.a.a.\sin 60^0.\frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$, $SI = GI.\cos 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, suy ra $S_{\Delta SBC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

Vậy $d(A;(SBC)) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SBC}} = \frac{\frac{a^3\sqrt{3}}{8}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{6}} = \frac{3a}{4}$.

[Cách 3] Phương pháp tọa độ.



Chọn hệ trục tọa độ *Oxyz*, với $I \equiv O$,

$Ox \equiv IA, Oy \equiv IC; Oz // GS.$(*Hình vẽ*). Khi đó, $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right)$,

$C\left(0;\frac{a}{2};0\right); S\left(\frac{a\sqrt{3}}{6};0;\frac{a}{2}\right)$, suy ra $\overrightarrow{IA}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right), \overrightarrow{IC}\left(0;\frac{a}{2};0\right)$

$\overrightarrow{IS}\left(\frac{a\sqrt{3}}{6};0;\frac{a}{2}\right)$, suy ra $d(A,(SBC)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IS}\right].\overrightarrow{IA}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IS}\right]\right|} = \frac{3a}{4}$.

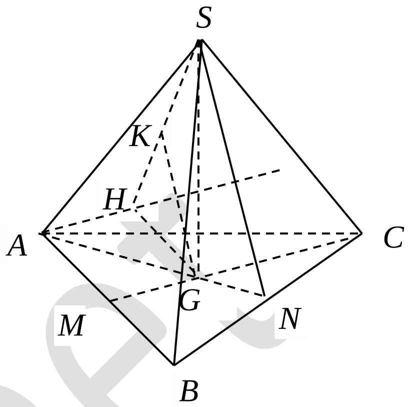
Câu 2. Cho hình chóp tam giác đều *S.ABC* có cạnh đáy bằng *a*. Gọi *G* là trọng tâm tam giác *ABC*. Góc giữa đường thẳng *SA* với mặt phẳng *(ABC)* bằng 60^0. Khoảng cách giữa hai đường thẳng *GC* và *SA* bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$ B. $\dfrac{a}{5}$. C. $\dfrac{a\sqrt{5}}{10}$. D. $\dfrac{a\sqrt{2}}{5}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1] Phương pháp dựng hình

Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của hai cạnh *AB* và *BC*. Gọi *H* là hình chiếu của *G* lên đường thẳng đi qua *A* và song song với *CG*. *GK* là đường cao của tam giác *GHS*. Khi đó, $d(GC,SA)=d(GC,(SAH))=GK$.



Ta có: $AG=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$;

$\left(SA,(ABC)\right)=SAG=60^0 \Rightarrow SG=AG.\tan 60^0=a$,

$GH=AM=\dfrac{a}{2}$, suy ra $d(GC,SA)=GK=\dfrac{GS.GH}{\sqrt{GS^2+GH^2}}=\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.

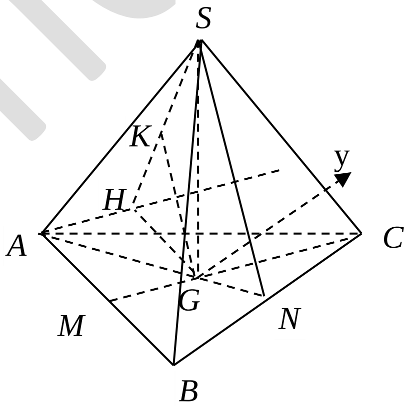
[Cách 2] Phương pháp tọa độ.

Chọn hệ trục tọa độ *Oxyz*, với $G\equiv O$,

$Ox\equiv GA, Oy//NC, Oz\equiv GS$ (*Hình vẽ*). Khi đó, $A\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3};0;0\right)$,

$C\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{6};\dfrac{a}{2};0\right)$; $S(0;0;a)$, suy ra $\overrightarrow{GS}(0;0;a)$, $\overrightarrow{GC}\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{6};\dfrac{a}{2};0\right)$,

$\overrightarrow{AS}\left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{3};0;a\right)$ suy ra $d(SA,GC)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{GC},\overrightarrow{AS}\right].\overrightarrow{GS}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{GC},\overrightarrow{AS}\right]\right|}=\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$



Câu 3. Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* có *AB* = *a*, $SA=a\sqrt{3}$. Gọi *G* là trọng tâm tam giác *SCD*. Góc giữa đường thẳng *BG* với mặt phẳng *(ABCD)* bằng:

A. $\arctan\dfrac{\sqrt{85}}{17}$. B. $\arctan\dfrac{\sqrt{10}}{17}$. C. $\arcsin\dfrac{\sqrt{85}}{17}$. D. $\arccos\dfrac{\sqrt{85}}{17}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1] Phương pháp dựng hình

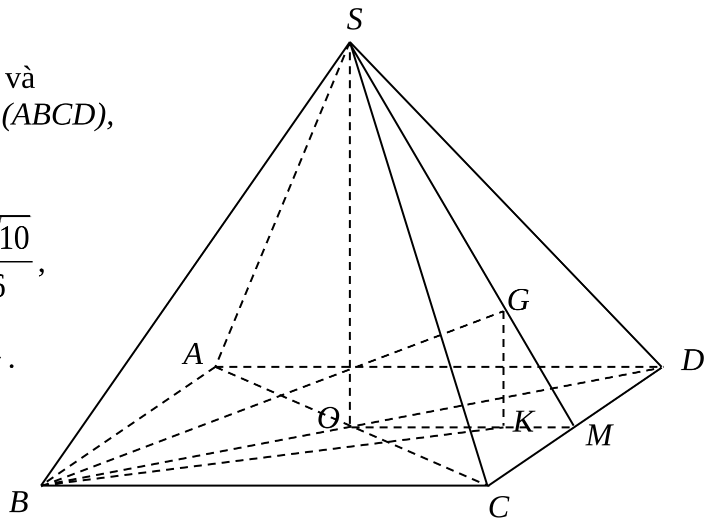
Gọi *M* là trung điểm *CD*, kẻ *GK* song song với *SO* và cắt *OM* tại *K*, suy ra *K* là hình chiếu của *G* trên mp*(ABCD)*,

suy ra $\left(BG,(ABCD)\right)=GBK$.

Ta có: $AO=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $SO=\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$, $GK=\dfrac{1}{3}SO=\dfrac{a\sqrt{10}}{6}$,

vì $OK=\dfrac{2}{3}OM$ nên $OK=\dfrac{a}{3}$, suy ra $BK=\dfrac{a\sqrt{34}}{6}$.

$\tan\left(BG,(ABCD)\right)=\tan GBK=\dfrac{GK}{BK}=\dfrac{\sqrt{85}}{17}$.



[Cách 2] Phương pháp tọa độ.

Chọn hệ trục tọa độ *Oxyz*, với $Ox \equiv OC, Oy \equiv OD, Oz \equiv OS$. Khi đó, $B\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$,

$G\left(\frac{a\sqrt{2}}{6};\frac{a\sqrt{2}}{6};\frac{a\sqrt{10}}{6}\right); S\left(0;0;\frac{a\sqrt{10}}{2}\right)$, suy ra $\overrightarrow{BG}\left(\frac{a\sqrt{2}}{6};\frac{2a\sqrt{2}}{3};\frac{a\sqrt{10}}{6}\right)=\frac{a\sqrt{2}}{6}\left(1;4;\sqrt{5}\right)=\frac{a\sqrt{2}}{6}.\vec{n}$,

$\overrightarrow{OS}\left(0;0;\frac{a\sqrt{10}}{2}\right)=\frac{a\sqrt{10}}{2}(0;0;1)=\frac{a\sqrt{10}}{2}.\vec{k}$.

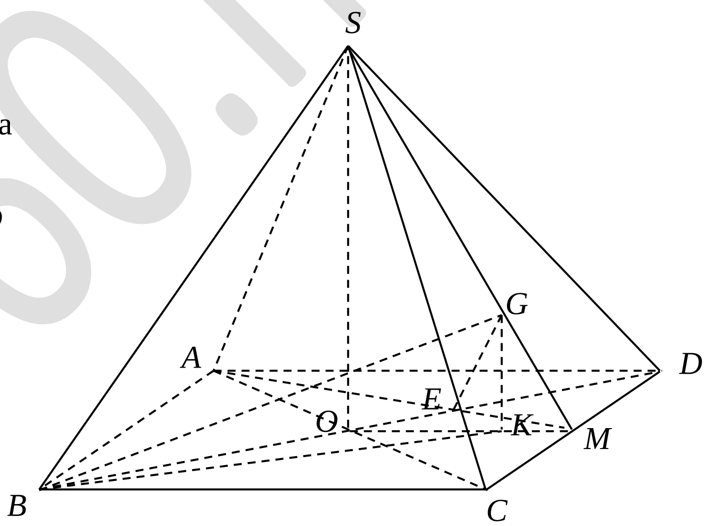
$\sin(BG,(ABCD))=\frac{|\vec{n}.\vec{k}|}{|\vec{n}|.|\vec{k}|}=\sqrt{\frac{5}{22}} \Rightarrow \cos(BG,(ABCD))=\sqrt{\frac{17}{22}} \Rightarrow \tan(BG,(ABCD))=\frac{\sqrt{85}}{17}$.

Câu 4. Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* có *AB* = *a*, $SA=a\sqrt{3}$. Gọi *G* là trọng tâm tam giác *SCD*. Góc giữa đường thẳng *BG* với đường thẳng *SA* bằng:

A. $\arccos\frac{\sqrt{33}}{11}$ B. $\arccos\frac{\sqrt{330}}{110}$. C. $\arccos\frac{\sqrt{3}}{11}$. D. $\arccos\frac{\sqrt{33}}{22}$

Hướng dẫn giải

[Cách 1] Phương pháp dựng hình



Gọi *M* là trung điểm *CD*, Gọi $E = BD \cap AM$, suy ra $GE // SA$. Suy ra $(BG, SA) = (BG, GE)$.

Vì G, *E* lần lượt là trọng tâm tam giác *SCD* và *ACD*

nên $GE=\frac{1}{3}SA=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Kẻ *GK* song song với *SO* và cắt *OM* tại *K*,
suy *ra K* là hình chiếu của *G* trên mp*(ABCD)*

Ta có: $AO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SO=\frac{a\sqrt{10}}{2}$,

$GK=\frac{1}{3}SO=\frac{a\sqrt{10}}{6}$. $BE=\frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Vì $OK=\frac{2}{3}OM$ nên $OK=\frac{a}{3}$, suy ra $BK=\frac{a\sqrt{34}}{6} \Rightarrow BG=\frac{a\sqrt{11}}{3}$.

Xét tam giác BEG, có $BE=\frac{2a\sqrt{2}}{3}$, $GE=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $BG=\frac{a\sqrt{11}}{3}$,

suy ra $\cos BGE=\frac{BG^2+GE^2-BE^2}{2BG.GE}=\frac{\sqrt{33}}{11}$.

[Cách 2] Phương pháp tọa độ.

Chọn hệ trục tọa độ *Oxyz*, với $Ox \equiv OC, Oy \equiv OD, Oz \equiv OS$. Khi đó, $B\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$

$G\left(\frac{a\sqrt{2}}{6};\frac{a\sqrt{2}}{6};\frac{a\sqrt{10}}{6}\right);S\left(0;0;\frac{a\sqrt{10}}{2}\right),\ A\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right),$

suy ra $\overrightarrow{BG}\left(\frac{a\sqrt{2}}{6};\frac{2a\sqrt{2}}{3};\frac{a\sqrt{10}}{6}\right)=\frac{a\sqrt{2}}{6}\left(1;4;\sqrt{5}\right)=\frac{a\sqrt{2}}{6}.\vec{n}$,

$\overrightarrow{AS}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;\frac{a\sqrt{10}}{2}\right)=\frac{a\sqrt{2}}{2}\left(1;0;\sqrt{5}\right)=\frac{a\sqrt{2}}{2}.\vec{k}$. Suy ra $\cos(BG,SA)=\frac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|}=\sqrt{\frac{3}{11}}$.

Câu 5. Cho hình chóp tứ giác đều *S.ABCD* có cạnh đáy bằng *a*, $SA=a\sqrt{3}$. *M* là trung điểm của cạnh *BC*. Góc giữa hai mặt phẳng *(SDM)* với *(SBC)* bằng:

A. $\arctan\frac{2\sqrt{110}}{11}$. B. $\arctan\frac{\sqrt{110}}{11}$. C. $\arctan\frac{2\sqrt{110}}{33}$. D. $\arctan\frac{2\sqrt{11}}{110}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1] Phương pháp dựng hình

Gọi *O* là tâm hình vuông *ABCD*, Gọi $E=AC\cap DM$ suy ra *E* là trọng tâm tam giác *BCD*. Gọi *I* là hình chiếu của *O* lên mặt phẳng *(SBC)*, *I* thuộc đường thẳng *SM*, suy ra hình chiếu *H* của *E* lên mặt phẳng *(SBC)* nằm trên đoạn thẳng *CI* và $\frac{CH}{CI}=\frac{2}{3}$.

Kẻ $HK\perp SM$ tại K (*HK // CM)*, khi đó $\left((SDM),(SBC)\right)=(HK,EK)$

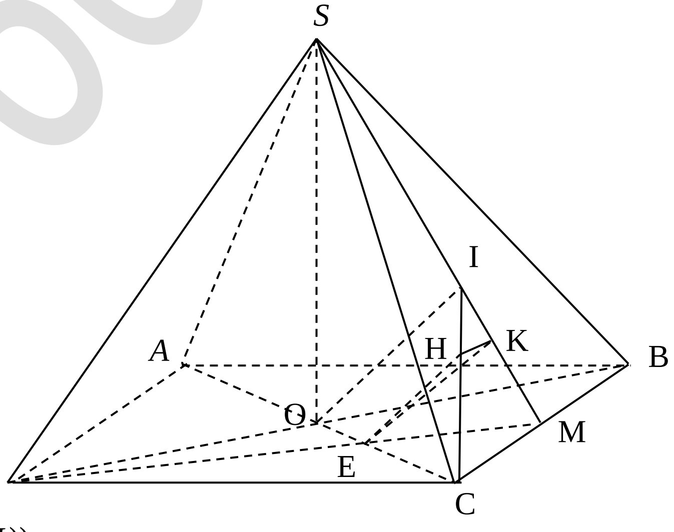
Ta có: $SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\frac{a\sqrt{10}}{2}$,

$EH=\frac{2}{3}OI=\frac{2}{3}\frac{SO.OM}{\sqrt{SO^2+OM^2}}=\frac{a\sqrt{110}}{33}$.

$HK=\frac{1}{3}CM=\frac{a}{6}$. Suy ra

$\tan\left((SDM),(SBC)\right)=\tan(HK,EK)$

$=\tan HKE=\frac{2\sqrt{110}}{11}$



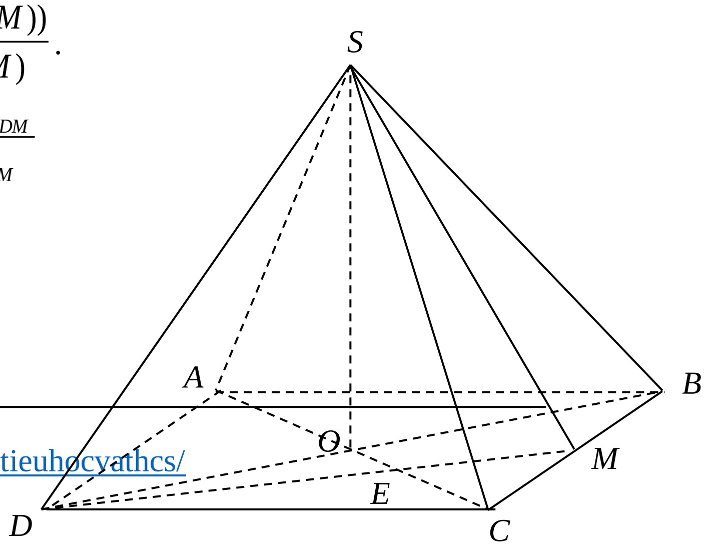
[Cách 2] Phương pháp thể tích.

Đặt $\varphi=\left((SDM),(SBC)\right)$ suy ra $\sin\varphi=\frac{d(C,(SDM))}{d(C,SM)}$.

Ta có $d(C;SM)=CM=\frac{a}{2}$, $d(C;(SDM))=\frac{3V_{C.SDM}}{S_{SDM}}$

$V_{S.CDM}=\frac{1}{3}.SO.S_{\Delta CDM}=\frac{a^3\sqrt{10}}{24}$.

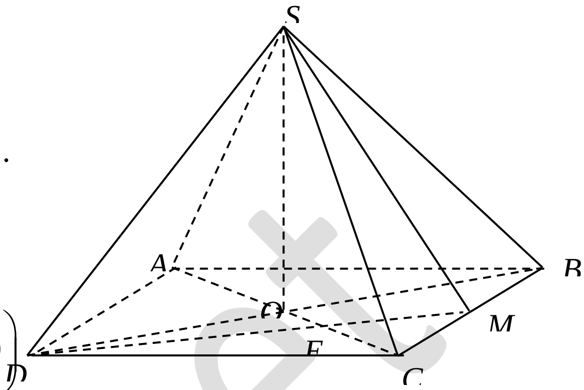
Tam giác *SDM* có $SM=\frac{a\sqrt{11}}{2}$, $DM=\frac{a\sqrt{5}}{2}$



và $SD = a\sqrt{3}$, suy ra $S_{\Delta SDM} = \dfrac{a^2\sqrt{51}}{8}$,

Suy ra $d(C,(SDM)) = \dfrac{3V_{C.SDM}}{S_{SDM}} = \dfrac{a\sqrt{10}}{\sqrt{51}}$

Suy ra $\sin\varphi = \dfrac{d(C,(SDM))}{d(C,SM)} = \dfrac{2\sqrt{10}}{\sqrt{51}} \Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{2\sqrt{110}}{11}$.



[Cách 3]Phương pháp tọa độ.

Chọn hệ trục tọa độ *Oxyz*, với $Ox \equiv OC, Oy \equiv OB, Oz \equiv OS$.

Khi đó, $D\left(0;-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$,

$M\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4};\dfrac{a\sqrt{2}}{4};0\right); S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{10}}{2}\right)$, $B\left(0;\dfrac{a}{2};0\right); C\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$

suy ra $\overrightarrow{DM}\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4};\dfrac{3a\sqrt{2}}{4};0\right) = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}(1;3;0) = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}.\vec{x}$,

$\overrightarrow{SM}\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4};\dfrac{a\sqrt{2}}{4};-\dfrac{a\sqrt{10}}{2}\right) = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}\left(1;1;-2\sqrt{5}\right)$

$= \dfrac{a\sqrt{2}}{4}.\vec{y}$.

$\overrightarrow{BC}\left(\dfrac{a}{2};-\dfrac{a}{2};0\right) = \dfrac{a}{2}(1;-1;0) = \dfrac{a}{2}.\vec{u}$; $\overrightarrow{SC}\left(\dfrac{a}{2};0;-\dfrac{a\sqrt{10}}{2}\right) = \dfrac{a}{2}\left(1;0;-\sqrt{10}\right) = \dfrac{a}{2}.\vec{v}$,

$\vec{n} = [\vec{x},\vec{y}] = \left(-6\sqrt{5};2\sqrt{5};-2\right)$ và $\vec{k} = [\vec{u},\vec{v}] = \left(\sqrt{10};\sqrt{10};-1\right)$.

Suy ra $\cos\varphi = \dfrac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \sqrt{\dfrac{11}{51}} \Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{2\sqrt{110}}{11}$.

Câu 6. Cho hình chóp *S.ABC* có *SA*, *AB*, *AC* đôi một vuông góc, $AB = a, AC = a\sqrt{2}$ và diện tích tam giác *SBC* bằng $\dfrac{a^2\sqrt{33}}{6}$. Khoảng cách từ điểm *A* đến mặt phẳng *(SBC)* bằng:

A. $\dfrac{a\sqrt{330}}{33}$. B. $\dfrac{a\sqrt{330}}{11}$. C. $\dfrac{a\sqrt{110}}{33}$. D. $\dfrac{2a\sqrt{330}}{33}$.

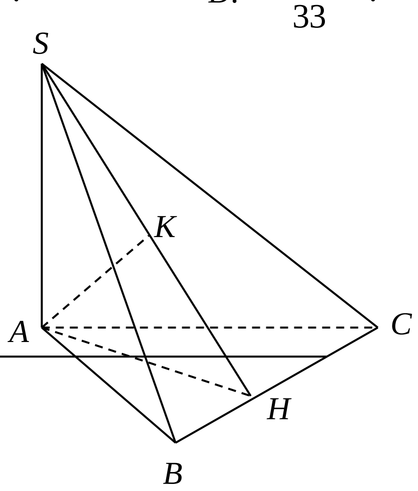
Hướng dẫn giải

[Cách 1] Phương pháp dựng hình

Kẻ *AH* vuông góc với *BC* tại *H*, kẻ *AK* vuông góc với *SH* tại *K*. Khi đó $d(A,(SBC)) = AK$.

Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{3}$, và $S_{\Delta SBC} = \dfrac{a^2\sqrt{33}}{6}$

nên $SH = \dfrac{a\sqrt{11}}{3}$.



$AH=\dfrac{AC.AB}{\sqrt{AC^2+AB^2}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$, $SA=\sqrt{SH^2-AH^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$

Suy ra $d(A,(SBC))=AK=\dfrac{SA.AH}{SH}=\dfrac{a\sqrt{330}}{33}$.

[Cách 2] Phương pháp thể tích.

Ta có thể tích của khối chóp *S.ABC* là $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\dfrac{a\sqrt{5}}{9}.\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a^3\sqrt{10}}{18}$.

Suy ra $d(A,(SBC))=\dfrac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SBC}}=\dfrac{a\sqrt{330}}{33}$.

[Cách 3] Phương pháp tọa độ.

Chọn hệ trục tọa độ *Oxyz*, với $O\equiv A, Ox\equiv AB, Oy\equiv AC, Oz\equiv AS$. Khi đó,

$B(a;0;0), C(0;a\sqrt{2};0), S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{5}}{3}\right)$ suy ra $\overrightarrow{BC}(-a;a\sqrt{2};0)$, $\overrightarrow{BS}\left(-a;0;\dfrac{a\sqrt{5}}{3}\right)$, $\overrightarrow{BA}(a;0;0)$ suy ra

$d(A,(SBC))=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BS}\right].\overrightarrow{BA}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BS}\right]\right|}=\dfrac{a\sqrt{330}}{33}$.

Câu 7. Cho hình chóp tam giác *S.ABC* có *SA* vuông góc với mặt đáy, tam giác *ABC* vuông cân tại *B*, $BA=BC=a$, góc giữa mp*(SBC)* với mp*(ABC)* bằng 60^0. Gọi *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *SBC*. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng *AI* với *BC*.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. C. $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. D. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1] Phương pháp dựng hình

Vì tam giác *SAC* vuông tại *A* nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *SAC* là trung điểm *I* của *SC*.

Ta góc giữa mp*(SBC)* với mp*(ABC)* là góc *SBA*, theo bài góc $SBA=60^0$, suy ra:

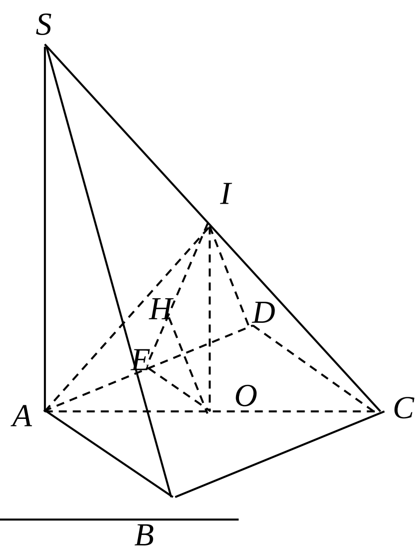
$$SA=AB.\tan SBA=a\sqrt{3}.$$

Kẻ *AD // BC*, *D* là đỉnh thứ tư của hình bình bình hành *ABCD*. Kẻ $OE\perp AD$ tại *E*. $OH\perp IE$ tại *H*. Khi đó:

$d(AI,BC)=d(BC,(IAD))=2d(O,(IAD))=2.OH$

Ta có $OH=\dfrac{OE.OI}{\sqrt{OE^2+OI^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$, suy ra

$d(AI,BC)=2d(O,(IAD))=2.OH=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



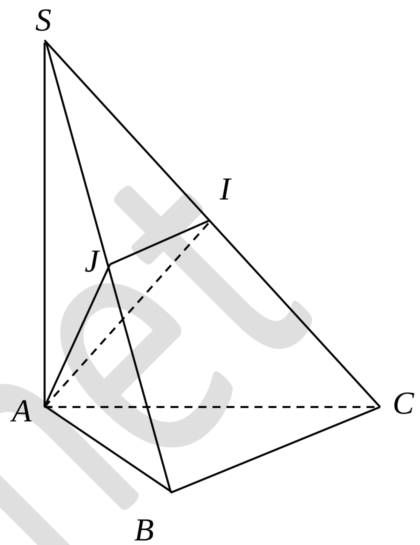
[Cách 2] Phương pháp tọa độ.

Gọi *O* là trung điểm của *AC*, vì tam giác *ABC* vuông cân tại *B* nên $OB\perp AC$.

Chọn hệ trục tọa độ *Oxyz*, với $Ox\equiv OB, Oy\equiv OC, Oz\equiv OI$.

Khi đó, $B\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), C(0;\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0), I\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{2}}{3}\right), A\left(0;-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$, suy ra $\overrightarrow{BC}\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$, $\overrightarrow{AI}\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)$, $\overrightarrow{BA}\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$. Suy ra

$$d(BC,AI)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AI}\right].\overrightarrow{BA}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AI}\right]\right|}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



[Cách 3] Phương pháp thể tích.

Kẻ $IJ//BC$, J thuộc cạnh SB. Suy ra $d(AI,BC)=d(BC,(AIJ))=d(S,(AIJ))$.

Ta có: Tam giác AIJ vuông tại J và $AJ=\frac{1}{2}SB=a$,

$IJ=\frac{1}{2}BC=\frac{a}{2}$ suy ra $S_{\Delta AIJ}=\frac{a^2}{4}$.

$\frac{V_{S.AIJ}}{V_{S.ABC}}=\frac{1}{4}\Rightarrow V_{S.AIJ}=\frac{1}{4}V_{S.ABC}=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

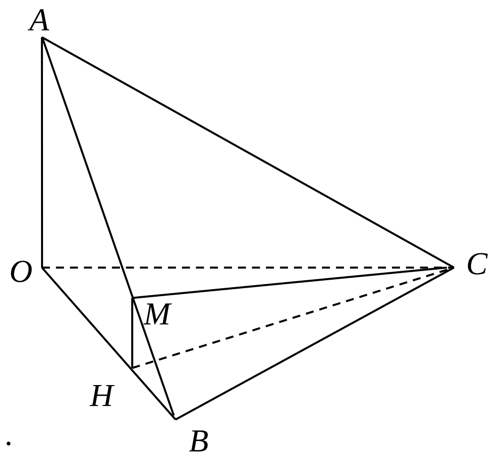
Suy ra $d(AI,BC)=d(S,(AIJ))=\frac{3V_{S.AIJ}}{S_{\Delta AIJ}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 8. Cho tứ diện *OABC* có *OA, OB, OC* đôi một vuông góc, góc *OCB* bằng 30^0, góc *ABO* bằng 60^0 và $AC=a\sqrt{6}$. Điểm *M* nằm trên cạnh *AB* sao cho *AM = 2 BM*. Tính góc giữa hai đường thẳng *CM* và *OA*.

A. $\arctan\frac{\sqrt{93}}{3}$. B. $\arctan\frac{\sqrt{31}}{3}$. C. $\arctan\frac{\sqrt{93}}{6}$. D. $\arctan\frac{\sqrt{31}}{2}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1] Phương pháp dựng hình



Gọi *H* là hình chiếu của *M* lên mp*(OBC)*.

Vì *AM = 2BM* nên *OH = 2HB*.

Suy ra $(OA,CM)=(MH,CM)=CMH$.

Đặt *OB = x*. Ta có $OA=x\sqrt{3},OC=x\sqrt{3}$

$OA^2+OC^2=6x^2=AC^2=6a^2\Rightarrow x=a$.

Ta có $MH=\frac{1}{3}OA=\frac{a\sqrt{3}}{3}$,

$HC=\sqrt{OC^2+OH^2}=\frac{a\sqrt{31}}{3}$. Suy ra $\tan(CMH)=\frac{HC}{HM}=\frac{\sqrt{93}}{3}$.

[Cách 2] Phương pháp tọa độ.

Chọn hệ trục tọa độ *Oxyz*, với $Ox\equiv OB,Oy\equiv OC,Oz\equiv OA$.

Đặt *OB = x*. Ta có $OA=x\sqrt{3},OC=x\sqrt{3}$, $OA^2+OC^2=6x^2=AC^2=6a^2\Rightarrow x=a$.

$MH=\frac{1}{3}OA=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Khi đó, $C(0;a\sqrt{3};0),A\left(0;0;a\sqrt{3}\right),M\left(\frac{2a}{3};0;\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)$, suy ra $\overrightarrow{MC}\left(-\frac{2a}{3};a\sqrt{3};-\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{a}{3}\left(2;-3\sqrt{3};\sqrt{3}\right)=\frac{a}{3}\vec{u}, \overrightarrow{OA}\left(0;0;a\sqrt{3}\right)=a\sqrt{3}\left(0;0;1\right)=a\sqrt{3}\vec{v}$ suy ra

$\cos(OA,CM)=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right|=\frac{\left|\vec{u},\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|}=\sqrt{\frac{3}{34}}\Rightarrow \tan(OA,CM)=\frac{\sqrt{93}}{3}$.

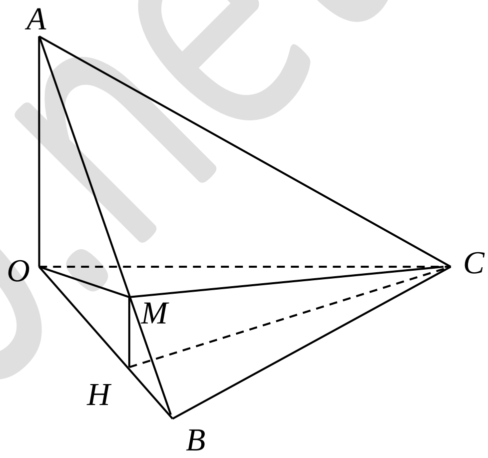
Câu 9. Cho tứ diện *OABC* có *OA, OB, OC* đôi một vuông góc, góc *OCB* bằng 30^0, góc *ABO* bằng 60^0 và $AC=a\sqrt{6}$. Điểm *M* nằm trên cạnh *AB* sao cho *AM = 2 BM*. Tính góc giữa hai mặt phẳng *(OCM)* và *(ABC)*.

A. $\arcsin\sqrt{\frac{34}{35}}$ B. $\arcsin\sqrt{\frac{1}{35}}$ C. $\arcsin\sqrt{\frac{14}{35}}$ D. $\arcsin\sqrt{\frac{3}{7}}$

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

[Cách 1] Phương pháp thể tích



Gọi *H* là hình chiếu của *M* lên mp*(OBC)*.

Vì *AM = 2 BM* nên *OH = 2HB*.

Suy ra $(OA,CM)=(MH,CM)=CMH$

Đặt *OB = x*. Ta có $OA=x\sqrt{3}, OC=x\sqrt{3}$

$OA^2+OC^2=6x^2=AC^2=6a^2\Rightarrow x=a$.

Ta có $MH=\frac{1}{3}OA=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, suy ra

$OM=\sqrt{MH^2+OH^2}=\frac{a\sqrt{7}}{3}$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng *(OMC)* và *(ABC)*.

Suy ra $\sin\varphi=\frac{d(O,(ABC))}{d(O,CM)}$.

Ta có: $V_{OABC}=\frac{1}{6}OA.OB.OC=\frac{a^3}{2}$. Tam giác ABC có $AB=BC=2a, AC=a\sqrt{6}$ suy ra $S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{15}}{2}$,

suy ra $d(O,(ABC))=\frac{3V_{OABC}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{3.\frac{a^3}{2}}{a^2.\frac{\sqrt{15}}{2}}=\frac{3a}{\sqrt{15}}$. Vì tam giác *OCM* vuông tại *O* nên

$d(O,CM)=\frac{OM.OC}{\sqrt{OM^2+OC^2}}=a\sqrt{\frac{21}{34}}$. Suy ra $\sin\varphi=\frac{d(O,(ABC))}{d(O,CM)}=\frac{\frac{3a}{\sqrt{15}}}{a\sqrt{\frac{21}{34}}}=\sqrt{\frac{34}{35}}$.

[Cách 2] Phương pháp tọa độ.

Chọn hệ trục tọa độ *Oxyz*, với $Ox\equiv OB, Oy\equiv OC, Oz\equiv OA$.

Đặt *OB = x*. Ta có $OA=x\sqrt{3}, OC=x\sqrt{3}$, $OA^2+OC^2=6x^2=AC^2=6a^2\Rightarrow x=a$.

$MH=\frac{1}{3}OA=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Khi đó, $C(0;a\sqrt{3};0), A\left(0;0;a\sqrt{3}\right), M\left(\frac{2a}{3};0;\frac{a\sqrt{3}}{3}\right), B\left(a;0;0\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{OC}(0;a\sqrt{3};0)=a\sqrt{3}\left(0;1;0\right)=a\sqrt{3}.\vec{x},$

$\overrightarrow{OM}\left(\dfrac{2a}{3};0;\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{a}{3}\left(2;0;\sqrt{3}\right)=\dfrac{a}{3}.\vec{y};$

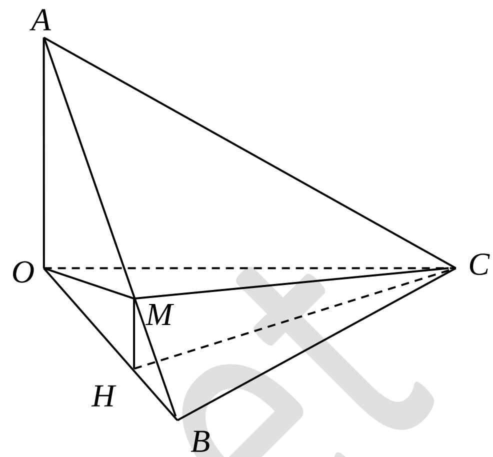
$\overrightarrow{BC}\left(a;-a\sqrt{3};0\right)=a\left(1;-\sqrt{3};0\right)=a.\vec{u};$

$\overrightarrow{BA}\left(-a;0;a\sqrt{3}\right)=-a\left(1;0;-\sqrt{3}\right)=-a\vec{v}$

$\vec{n}=[\vec{x},\vec{y}]=\left(\sqrt{3};0;-2\right)$ và $\vec{k}=[\vec{u},\vec{v}]=\left(3;\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$.

Suy ra $\cos\varphi=\dfrac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}.\sqrt{15}}=\dfrac{1}{\sqrt{35}}$.

Vậy $\sin\varphi=\sqrt{\dfrac{34}{35}}$.



Câu 10. Cho tứ diện *OABC* có *OA, OB, OC* đôi một vuông góc. Góc giữa đường thẳng *AC* và mp*(OBC)* bằng 60^0, $OB=a$, $OC=a\sqrt{2}$. Gọi *M* là trung điểm của cạnh *OB*. Góc giữa đường thẳng *OA* với mặt phẳng *(ACM* bằng:

A. $\arcsin\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$. B. $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{7}}$. C. $\arcsin\dfrac{3}{2\sqrt{7}}$. D. $\arcsin\dfrac{3}{4\sqrt{7}}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1] Phương pháp thể tích]

Ta có Góc giữa *AC* và mp*(OBC)* bằng 60^0.

Suy ra $OA=OC.\tan 60^0=a\sqrt{6}$.

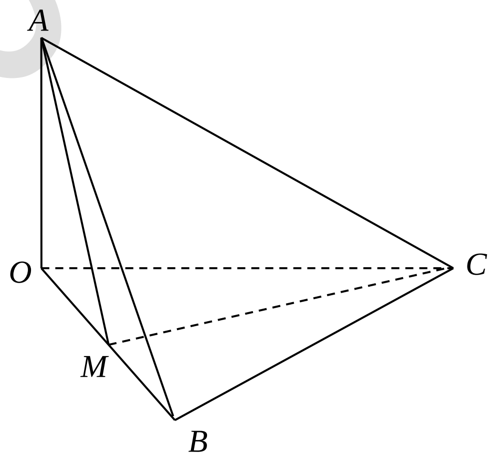
$AM=\sqrt{OA^2+OM^2}=\dfrac{5a}{2}$.

$CM=\sqrt{OC^2+OM^2}=\dfrac{3a}{2}$.

$AC=\sqrt{OC^2+OA^2}=2\sqrt{2}a$. Suy ra $S_{\Delta ACM}=\dfrac{a^2\sqrt{14}}{2}$.

$V_{A.OCM}=\dfrac{1}{6}OA.OC.OM=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Suy ra $d(O,(ACM))=\dfrac{3V_{O.ACM}}{S_{\Delta ACM}}=a\sqrt{\dfrac{3}{14}}$.



Gọi φ là góc giữa *OA* với *(ACM)*, suy ra $\sin\varphi=\dfrac{d(O,(ACM))}{OA}=\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$.

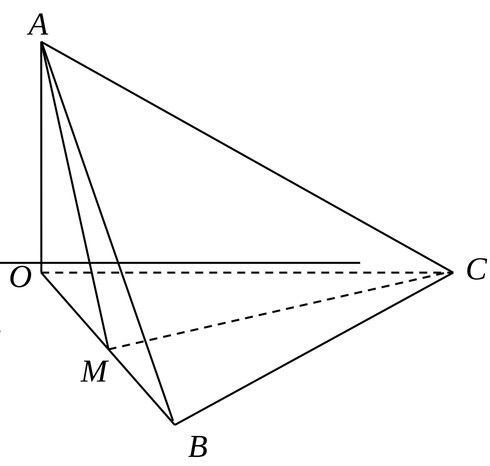
[Cách 2] Phương pháp tọa độ.

Chọn hệ trục tọa độ *Oxyz*, với

$Ox\equiv OB, Oy\equiv OC, Oz\equiv OA$.

$C(0;a\sqrt{2};0), A\left(0;0;a\sqrt{6}\right), M\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$.

Suy ra, $\overrightarrow{MA}=\left(-\dfrac{a}{2};0;a\sqrt{6}\right)=-\dfrac{a}{2}\left(1;0;-2\sqrt{6}\right)=-\dfrac{a}{2}\vec{x},$



$\overrightarrow{MC}=\left(-\frac{a}{2};a\sqrt{2};0\right)=-\frac{a}{2}\left(1;-2\sqrt{2};0\right)=-\frac{a}{2}.\vec{y}$,

$\vec{n}=[\vec{x},\vec{y}]=2\left(4\sqrt{3};-\sqrt{6};-\sqrt{2}\right)$ và

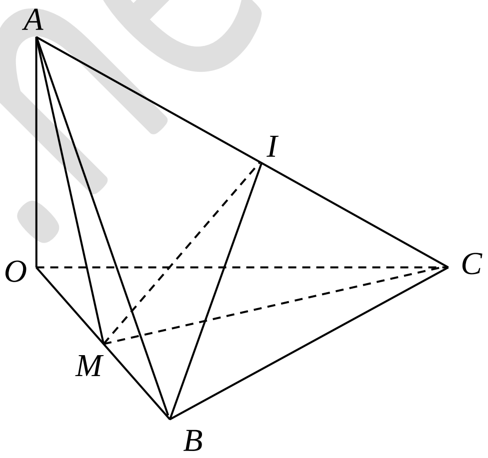
$\overrightarrow{OA}=\left(0;0;a\sqrt{6}\right)=a\sqrt{6}\left(0;0;1\right)=a\sqrt{6}.\vec{k}$.

Gọi φ là góc giữa *OA* với *(ACM)*, Suy ra $\sin\varphi=\frac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|}=\frac{1}{2\sqrt{7}}$.

Câu 11. Cho tứ diện *OABC* có *OA*, *OB*, *OC* đôi một vuông góc. Góc giữa đường thẳng *AC* và mp*(OBC)* bằng 60^0, $OB=a$, $OC=a\sqrt{2}$. Gọi *M* là trung điểm của cạnh *OB*. Tính góc giữa hai mặt phẳng *(AMC)* và *(ABC)* bằng:

A. $\arcsin\sqrt{\frac{3}{35}}$.   B. $\arcsin\sqrt{\frac{32}{35}}$.   C. $\arcsin\sqrt{\frac{1}{35}}$.   D. $\arcsin\sqrt{\frac{34}{35}}$.

[Cách 1] Phương pháp thể tích



Ta có Góc giữa *AC* và *mp(OBC)* bằng 60^0.

Suy ra $OA=OC.\tan 60^0=a\sqrt{6}$.

$AM=\sqrt{OA^2+OM^2}=\frac{5a}{2}$.

$CM=\sqrt{OC^2+OM^2}=\frac{3a}{2}$.

$AC=\sqrt{OC^2+OA^2}=2\sqrt{2}a$. Suy ra $S_{\Delta ACM}=\frac{a^2\sqrt{14}}{2}$.

$V_{A.OCM}=\frac{1}{6}OA.OC.OM=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. Suy ra

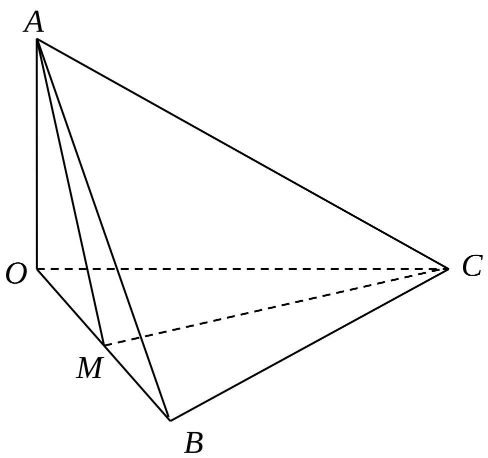
$d(O,(ACM))=\frac{3V_{O.ACM}}{S_{\Delta ACM}}=a\sqrt{\frac{3}{14}}=d(B,(ACM))$.

Kẻ *OI* vuông góc với *AC* tại *I* suy ra *BI* vuông góc với *AC* và $d(O,AC)=OI=\frac{OA.OC}{AC}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Tam giác *OIB* vuông tại O có $OI=\frac{a\sqrt{6}}{2}, OB=a\Rightarrow BI=\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

$\sin\left((ACM),(ABC)\right)=\frac{d(B,(ACM))}{BI}=\sqrt{\frac{3}{35}}$.

[Cách 2] Phương pháp tọa độ.



Chọn hệ trục tọa độ *Oxyz*, với

$Ox\equiv OB, Oy\equiv OC, Oz\equiv OA$.

$C(0;a\sqrt{2};0), A\left(0;0;a\sqrt{6}\right), M\left(\frac{a}{2};0;0\right), B\left(a;0;0\right)$.

Suy ra, $\overrightarrow{MA}=\left(-\frac{a}{2};0;a\sqrt{6}\right)=-\frac{a}{2}\left(1;0;-2\sqrt{6}\right)=-\frac{a}{2}\vec{x}$,

$\overrightarrow{MC}=\left(-\frac{a}{2};a\sqrt{2};0\right)=-\frac{a}{2}\left(1;-2\sqrt{2};0\right)=-\frac{a}{2}.\vec{y}$

$[\vec{x},\vec{y}]=2\left(4\sqrt{3};-\sqrt{6};-\sqrt{2}\right)=2.\vec{n}$, $\overrightarrow{BA}=\left(-a;0;a\sqrt{6}\right)=-a\left(1;0;-\sqrt{6}\right)=-a.\vec{u}$,

$\overrightarrow{BC}=\left(-a;a\sqrt{2};0\right)=-a\left(1;-\sqrt{2};0\right)=-a.\vec{v}$, $\vec{k}=\left[\vec{u},\vec{v}\right]=\left(2\sqrt{3};-\sqrt{6};-\sqrt{2}\right)$.

Gọi φ là góc giữa *(ABC)* với *(ACM)*, Suy ra $\cos\varphi=\dfrac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|}=4\sqrt{\dfrac{2}{35}}\Rightarrow\sin\varphi=\sqrt{\dfrac{3}{35}}$.

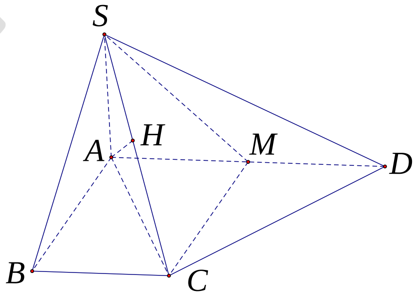
KHỐI CHÓP CÓ CẠNH BÊN VUÔNG GÓC VỚI MẶT ĐÁY

Câu 12. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thang *ABCD* vuông tại *A* và *B*. Biết $AD=2a$, $AB=BC=SA=a$. Cạnh bên *SA* vuông góc với mặt đáy, gọi *M* là trung điểm của *AD*. Tính khoảng cách *h* từ *M* đến mặt phẳng (SCD).

A. $h=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. B. $h=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. C. $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$. D. $h=\dfrac{a}{3}$.

Hướng dẫn giải

C1: phương pháp dựng hình.



Tứ giác *ABCM* là hình vuông nên $CM=a=\dfrac{1}{2}AD$ suy ra tam giác *ACD* vuông tại *C*

Ta có $CD\perp AC, CD\perp SA\Rightarrow CD\perp(SAC)$

Kẻ $AH\perp SC$ tại *H* khi đó do

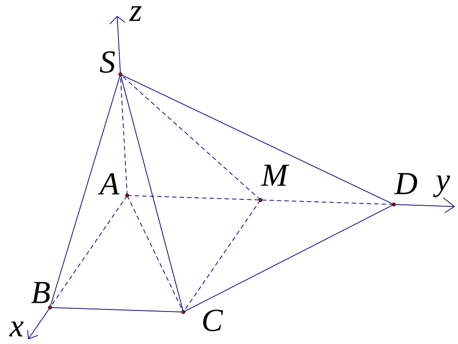
$CD\perp(SAC)\Rightarrow CD\perp AH\Rightarrow AH\perp(SCD)$

Vậy $d\left(M,(SCD)\right)=\dfrac{1}{2}d\left(A,(SCD)\right)=\dfrac{1}{2}AH$

Tam giác *SAC* vuông tại *A*, đường cao *AH* nên $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{2a^2}=\dfrac{3}{2a^2}$

Suy ra $AH=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow d\left(M,(SCD)\right)=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

C2: Phương pháp tọa độ



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, khi đó ta có :

$A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;2a;0), S(0;0;a)$

Từ đó suy ra $M(0;a;0), C(a;a;0)\Rightarrow\overrightarrow{SM}=(0;a;-a)$

$\overrightarrow{SC}=(a;a;-a), \overrightarrow{SD}=(0;2a;-a)$

$\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right]=\left(a^2;a^2;2a^2\right), \left|\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right]\right|=\sqrt{6}a^2$

Vậy khoảng cách từ *M* đến mặt phẳng (SCD) là

$$d\left(M,(SCD)\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right].\overrightarrow{SM}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right]\right|}=\frac{a^3}{a^2\sqrt{6}}=\frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Câu 13. Cho hình tứ diện *OABC* có đáy *OBC* là tam giác vuông tại *O*, $OB = a$, $OC = a\sqrt{3}$. Cạnh *OA* vuông góc với mặt phẳng *(OBC)*, $OA = a\sqrt{3}$, gọi *M* là trung điểm của *BC*. Tính khoảng cách *h* giữa hai đường thẳng *AB* và *OM*.

A. $h = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. B. $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $h = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$. D. $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{15}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1 : phương pháp dựng hình

Gọi *N* là điểm đối xứng của *C* qua *O*. Khi đó $OM // BN$ (tính chất đường trung bình)

do đó $OM // (ABN)$. Suy ra $d(OM, AB) = d(OM, (ABN)) = d(O, (ABN))$.

Dựng $OK \perp BN$, $OA \perp (OBC) \Rightarrow BN \perp OA \Rightarrow BN \perp AK$

Dựng $OH \perp AK$ khi đó $OH \perp (ABN)$. Từ đó $d(OM, AB) = OH$.

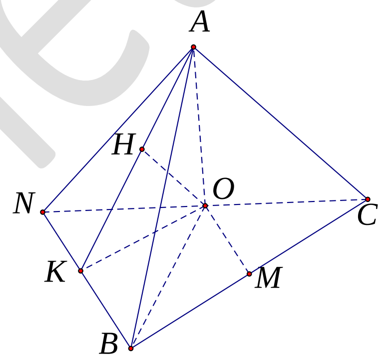
Tam giác *ONB* vuông tại *O*, đường cao *OK* nên

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2}$$

Tam giác *AOK* vuông tại *O*, đường cao *OH* nên

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{OA^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{15}}{5}$$

Vậy $d(OM, AB) = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$



Cách 2 : Phương pháp tọa độ

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó

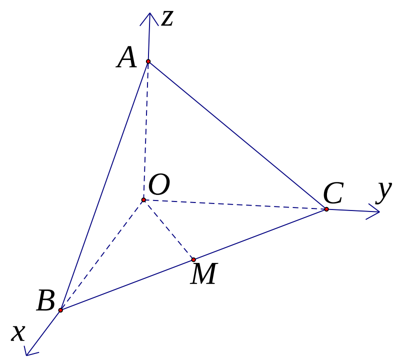
$O(0;0;0), A(0;0;a\sqrt{3}), B(a;0;0), C(0;a\sqrt{3};0)$

$M\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$. Suy ra

$\overrightarrow{OM}\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right), \overrightarrow{AB} = (a;0;-a\sqrt{3}), \overrightarrow{OB} = (a;0;0)$

$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OM}\right] = \left(\dfrac{3a^2}{2};\dfrac{-a^2\sqrt{3}}{2};\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}\right), \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OM}\right]\right| = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{2}$

Vậy $d(AB, OM) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OM}\right].\overrightarrow{OB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OM}\right]\right|} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$

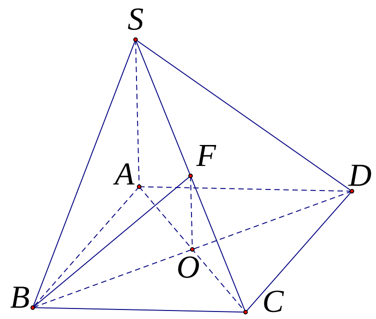


Câu 14. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*, *SA* vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = 2a$. Gọi *F* là trung điểm *SC*, tính góc φ giữa hai đường thẳng *BF* và *AC*.

A. $\varphi = 90^0$. B. $\varphi = 60^0$. C. $\varphi = 30^0$. D. $\varphi = 45^0$.

Hướng dẫn giải

C1 : Phương pháp dựng hình



Gọi O là giao điểm của AC và BD khi đó

$OF//SA \Rightarrow OF \perp (ABCD) \Rightarrow OF \perp AC$.

Lại có $AC \perp BD$ nên $AC \perp (BDF) \Rightarrow AC \perp BF$.

Vậy $(AC, BF) = 90^0$

Cách 2 : phương pháp tọa độ

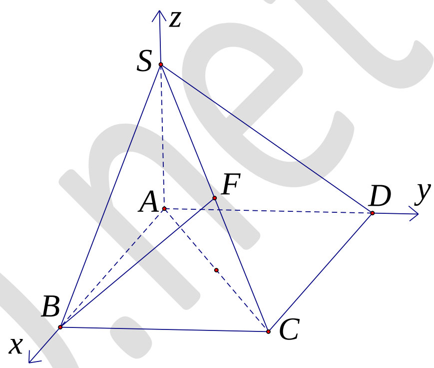
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, khi đó ta có :

$A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), S(0;0;2a)$

Suy ra $F\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};a\right), \overrightarrow{BF} = \left(-\frac{a}{2};\frac{a}{2};a\right), \overrightarrow{AC} = (a;a;0)$

Vậy $\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow BF \perp AC$

$\Rightarrow (BF, AC) = 90^0$.

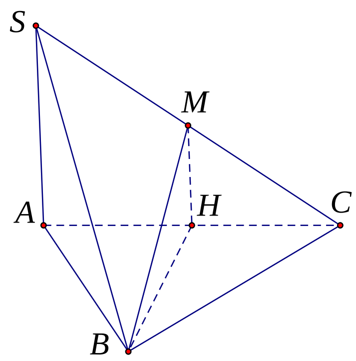


Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, cạnh SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của SC. Tính côsin của góc φ giữa đường thẳng BM và mặt phẳng (ABC).

A. $\cos\varphi = \frac{\sqrt{21}}{7}$. B. $\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{10}$. C. $\cos\varphi = \frac{\sqrt{7}}{14}$. D. $\cos\varphi = \frac{\sqrt{5}}{7}$.

Hướng dẫn giải

C1 : phương pháp dựng hình



Gọi H là trung điểm của AC khi đó $MH//SA \Rightarrow MH \perp (ABC)$

Vậy hình chiếu của BM lên mặt phẳng (ABC) là BH

Suy ra $(BM, (ABC)) = (BM, BH) = MBH$

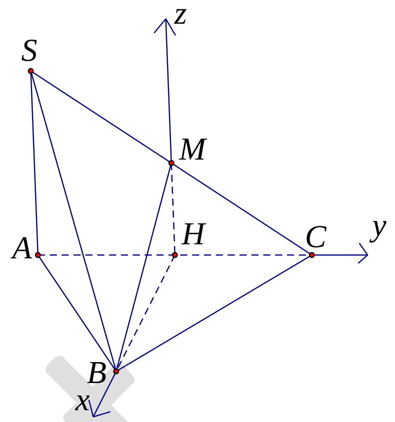
Ta có : $MH = a, BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, SB = SC = a\sqrt{5}$

Tam giác MHB vuông tại H nên

$BM = \sqrt{BH^2 + MH^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

$\cos MBH = \frac{BH}{BM} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

C2 : phương pháp tọa độ



Gọi H là trung điểm của AC khi đó $MH//SA \Rightarrow MH \perp (ABC)$

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, khi đó

$H(0;0;0), M(0;0;a), B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \left(\frac{-a\sqrt{3}}{2};0;a\right), \overrightarrow{HM} = (0;0;a)$

Giả sử góc giữa BM và mặt phẳng *(ABC)* là φ thì ta có :

$\sin\varphi = \frac{|\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{HM}|}{|\overrightarrow{BM}|.|\overrightarrow{HM}|} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\sqrt{21}}{7}$

Câu 16. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*, cạnh bên *SA* vuông góc với đáy và $SA = a$. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SDC).

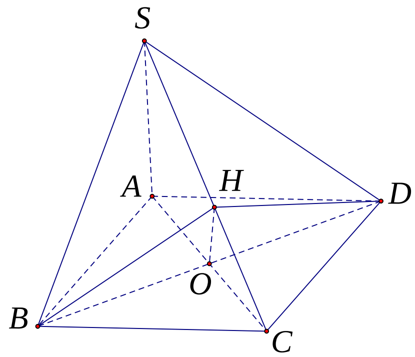
A. $\varphi = 60^0$. B. $\varphi = 90^0$. C. $\varphi = 30^0$. D. $\varphi = 45^0$.

Hướng dẫn giải

C1 : phương pháp dựng hình

Ta chứng minh được $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB, CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$.

Kẻ $BH \perp SC$ (1). Ta có $BD \perp (SAC) \Rightarrow SC \perp BD$ (2).



Từ $(1),(2) \Rightarrow SC \perp (BHD) \Rightarrow SC \perp DH$

Vậy $((SBC),(SDC)) = (BH, DH)$

Tam giác *SBC* vuông tại *B*, đường cao *BH* nên ta có

$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow BH = DH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Áp dụng định lí cô sin vào tam giác *BHD* ta có

$\cos BHD = \frac{BH^2 + DH^2 - BD^2}{2BH.DH} = \frac{-1}{2}$

Vậy $\cos((SBC),(SDC)) = \cos(BH, DH) = \frac{1}{2} \Rightarrow ((SBC),(SDC)) = 60^0$

C2 : phương pháp tọa độ

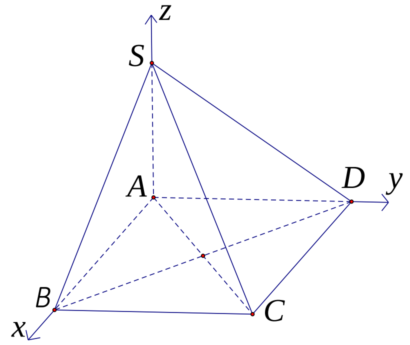
Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, khi đó
$A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0), S(0;0;a)$.

Suy ra $\overrightarrow{SB}(a;0;-a), \overrightarrow{SC}(a;a;-a), \overrightarrow{SD}(0;a;-a)$,

Mặt phẳng (SBC) có một VTPT là : $\vec{n} = \left[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}\right] = (a^2;0;a^2)$

Mặt phẳng (SDC) có một VTPT là : $\vec{k} = \left[\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{SC}\right] = (0;-a^2;-a^2)$

Vậy $\cos((SBC),(SDC)) = \dfrac{|\vec{n}.\vec{k}|}{|\vec{n}|.|\vec{k}|} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow ((SBC),(SDC)) = 60^0$



Câu 17. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi tâm *O* cạnh *a*, góc $\widehat{BAD} = 120^0$. Các mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Gọi *M* là trung điểm *SD*, thể tích khối chóp *S.ABCD* là $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$. Hãy tính khoảng cách *h* từ *M* tới mặt phẳng (SBC) theo *a*.

A. $h = \dfrac{a\sqrt{228}}{38}$. B. $h = \dfrac{a\sqrt{228}}{19}$. C. $h = \dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. D. $h = \dfrac{2\sqrt{5}a}{19}$.

Hướng dẫn giải

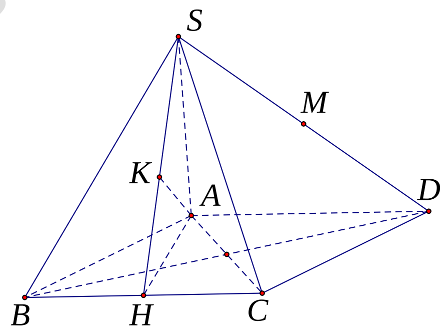
Cách 1 : phương pháp dựng hình

Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cắt nhau theo giao tuyến *SA* và cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên $SA \perp (ABCD)$.

$\dfrac{DM}{DS} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow d(M,(SBC)) = \dfrac{1}{2}d(D,(SBC))$

$AD//BC \Rightarrow AD//(SBC) \Rightarrow d(D,(SBC)) = \dfrac{1}{2}d(A,(SBC))$

Vậy $d(M,(SBC)) = \dfrac{1}{2}d(A,(SBC))$



Gọi *H* là trung điểm của *BC*, do tam giác *ABC* đều nên $AH \perp BC$,
lại có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$ nên $BC \perp (SAH) \Rightarrow (SBC) \perp (SAH)$

Dựng $AK \perp SH \Rightarrow AK \perp (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = AK$.

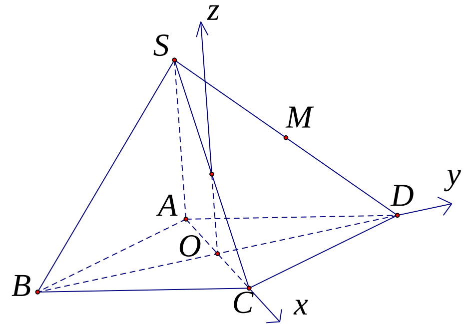
Diện tích hình thoi *ABCD* là : $S_{ABCD} = AB.BC.\sin 60^0 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Từ đó suy ra $SA = \dfrac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}} = 2a$. Tính được $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Tam giác *SAH* vuông tại *A*, đường cao *AK* nên :

$\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AH^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{4}{3a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{19}{12a^2} \Rightarrow AK = \dfrac{a\sqrt{228}}{19}$. Vậy $d(M,(SBC)) = \dfrac{1}{2}AK = \dfrac{a\sqrt{228}}{38}$

Phương pháp tọa độ



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, $Oz//SA$. Khi đó ta có

$$O(0;0;0), A\left(\frac{-a}{2};0;0\right), B\left(0;\frac{-a\sqrt{3}}{2};0\right), C\left(\frac{a}{2};0;0\right)$$

$$D\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right) \Rightarrow S\left(\frac{-a}{2};0;2a\right), M\left(\frac{-a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};a\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{SB}=\left(\frac{a}{2};\frac{-a\sqrt{3}}{2};-2a\right), \overrightarrow{SC}=(a;0;-2a), \overrightarrow{SM}=\left(\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4};-a\right)$$

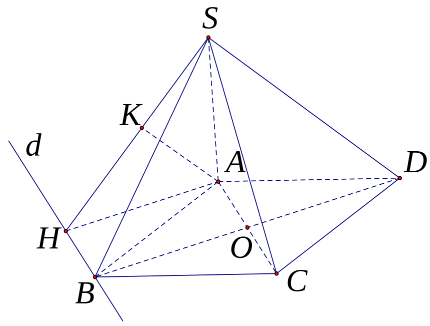
Vậy $d(M,(SBC))=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{SM}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right]\right|}=\dfrac{a\sqrt{228}}{38}$

Câu 18. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi tâm *O* cạnh $2a$, góc $BAD=120^0$. Các mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Thể tích khối chóp *S.ABCD* là $\dfrac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. Hãy tính khoảng cách *h* giữa hai đường thẳng *SB* và *AC* theo *a*.

A. $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $h=\dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$. C. $h=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. D. $h=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1 : phương pháp dựng hình



Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cắt nhau theo giao tuyến *SA* và cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên $SA\perp(ABCD)$.

Dựng đường thẳng *d* qua *B* và song song với *AC*.

Dựng $AH\perp d, AK\perp SH$. Ta chứng minh được $AK\perp(SBH)$

$AC//HB \Rightarrow AC//(SBH) \Rightarrow d(AC,SB)=d(AC,(SBH))=AK$

$BO\perp AC, AH\perp HB \Rightarrow AH\perp AC$ suy ra $AH//BO$.

Vậy tứ giác *AHBO* là hình chữ nhật nên $AH=BO=a\sqrt{3}$

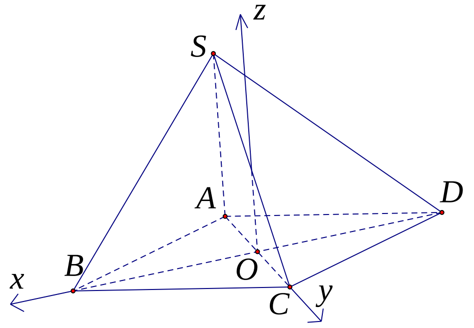
Diện tích hình thoi *ABCD* là $S_{ABCD}=AB.BC.\sin 60^0=2\sqrt{3}a^2$

Suy ra $AH=\dfrac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}}=a$

Tam giác *SAH* vuông tại *A*, đường cao *AK* nên $\dfrac{1}{AK^2}=\dfrac{1}{AH^2}+\dfrac{1}{SA^2}=\dfrac{1}{3a^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{4}{3a^2}\Rightarrow AK=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d(AC,SB)=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Cách 2 : phương pháp tọa độ



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, $Oz//SA$. Khi đó ta có

$O(0;0;0), A(-a;0;0), B\left(0;\sqrt{3}a;0\right), C(a;0;0), S(-a;0;a)$

Suy ra $\overrightarrow{SB}=\left(a;a\sqrt{3};-a\right), \overrightarrow{OB}=\left(0;a\sqrt{3};0\right), \overrightarrow{OC}=(a;0;0)$

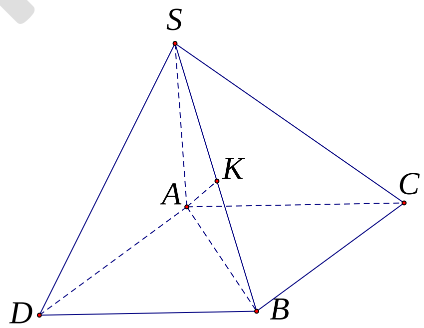
Vậy $d(AC,SB)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{OC},\overrightarrow{SB}\right].\overrightarrow{OB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{OC},\overrightarrow{SB}\right]\right|}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB=a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính góc φ tạo bởi hai đường thẳng SB và AC.

A. $\varphi=60^0$. B. $\varphi=90^0$. C. $\varphi=30^0$. D. $\varphi=45^0$.

Hướng dẫn giải

Cách 1 : phương pháp dựng hình



Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cắt nhau theo giao tuyến SA và cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên $SA\perp(ABCD)$.

Dựng $AK\perp SB$. Ta có :

$BC\perp AB, BC\perp SA\Rightarrow BC\perp(SAC)\Rightarrow BC\perp AK$

Vậy $AK\perp(SBC)$, từ đó suy ra $AK=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Tam giác SAB vuông tại A, đường cao AK nên ta có :

$\dfrac{1}{SA^2}=\dfrac{1}{AK^2}-\dfrac{1}{AB^2}=\dfrac{2}{a^2}-\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{a^2}\Rightarrow SA=a$

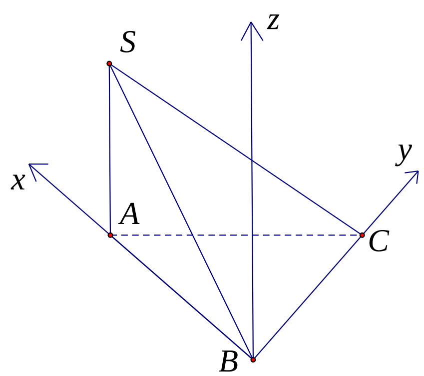
Dựng hình bình hành $ACBD$ như hình vẽ, khi đó:

$AC//BD\Rightarrow(AC,SB)=(BD,SB)$

Tính được $SD=a\sqrt{2}, SB=a\sqrt{2}, BD=a\sqrt{2}$ nên tam giác SBD đều

Vậy $(AC,SB)=SBD=60^0$.

Cách 2 : phương pháp tọa độ



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, $Bz//SA$. Khi đó theo cách 1 ta có :

$B(0;0;0), A(a;0;0), C(0;a;0), S(a;0;a)$.

Suy ra $\overrightarrow{BS}=(a;0;a), \overrightarrow{AC}=(-a;a;0)$.

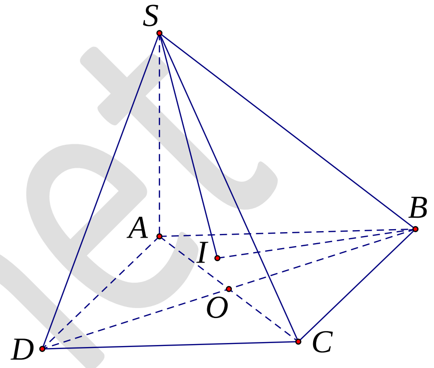
Vậy $\cos(AC,SB)=\dfrac{\left|\overrightarrow{BS}.\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{BS}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow(AC,SB)=60^0$

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $\frac{a^3}{3}$. Tính góc φ giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SCD).

A. $\varphi = 30^0$. B. $\varphi = 60^0$. C. $\varphi = 45^0$. D. $\varphi = 90^0$.

Hướng dẫn giải

Cách 1 : phương pháp dựng hình



Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cắt nhau theo giao tuyến SA và cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên $SA \perp (ABCD)$.

Do đó $SA = \frac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}} = a$

Tam giác SAD vuông tại A nên $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$

Ta có $CD \perp AD, CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$

Vậy diện tích tam giác SCD là : $S_{SCD} = \frac{1}{2}SD.CD = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

Gọi I là hình chiếu của B lên mặt phẳng (SCD) khi đó $(SB,(SCD)) = (SB, SI) = BSI$

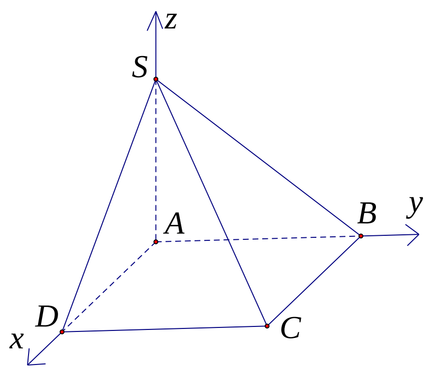
Mặt khác $BI = \frac{3V_{B.SCD}}{S_{SCD}} = \frac{3V_{S.ABCD}}{2S_{SCD}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Tam giác SAB vuông tại A nên $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{2}$

Tam giác SIB vuông tại I nên $\sin BSI = \frac{BI}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow BSI = 30^0$

Vậy $(SB,(SCD)) = 30^0$.

Cách 2 : phương pháp tọa độ



Chọn hệ tọa độ như hình vẽ, khi đó theo cách 1 ta tính được $SA = a$

Nên $A(0;0;0), D(a;0;0), B(0;a;0), C(a;a;0), S(0;0;a)$

Suy ra $\overrightarrow{SD} = (a;0;-a), \overrightarrow{SC} = (a;a;-a), \overrightarrow{SB} = (0;a;-a)$

Mặt phẳng (SCD) có một vectơ pháp tuyến là:

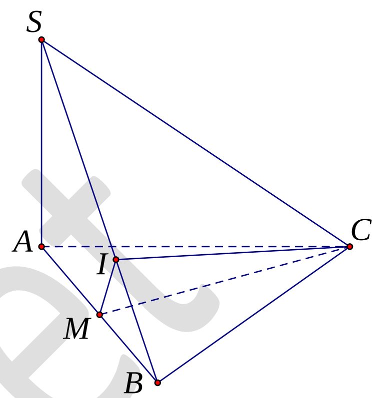
$\vec{n} = [\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{SC}] = (a^2; a^2; 2a^2)$.

Vậy $\sin(SB,(SCD)) = \frac{|\vec{n}.\overrightarrow{SB}|}{|\vec{n}|.|\overrightarrow{SB}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow (SB,(SCD)) = 30^0$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy tam giác đều cạnh a, hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Tính côsin của góc φ giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC).

A. $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. B. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{7}$. C. $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$. D. $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải
Cách 1 : phương pháp dựng hình



Hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cắt nhau theo giao tuyến *SA* và cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên $SA \perp (ABC)$.

Gọi *M* là trung điểm của *AB*, do tam giác *ABC* đều nên $CM \perp AB$, lại có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CM$ suy ra $CM \perp (SAB) \Rightarrow CM \perp SB$.

Dựng $CI \perp SB$ thì $SB \perp (CMI) \Rightarrow SB \perp IM$

Vậy $IM \perp SB, CI \perp SB \Rightarrow ((SAB),(SBC)) = (MI, CI)$

Hai tam giác *SAB* và *MIB* đồng dạng nên :

$$\frac{SA}{MI} = \frac{SB}{MB} \Rightarrow MI = \frac{MB.SA}{SB} = \frac{AB.SA}{2\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

Tam giác *CMB* vuông tại *M* nên : $CM = \sqrt{CB^2 - MB^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

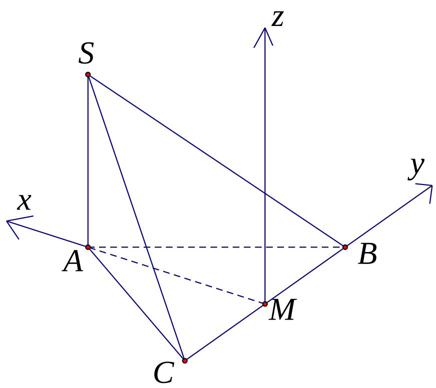
Tam giác *IMB* vuông tại *I* nên : $IB = \sqrt{MB^2 - IM^2} = \dfrac{a}{4}$

Tam giác *CIB* vuông tại *I* nên : $CI = \sqrt{CB^2 - IB^2} = \dfrac{\sqrt{15}a}{4}$

Áp dụng định lí côsin cho tam giác *IMC* ta có :

$$\cos CIM = \frac{CI^2 + IM^2 - CM^2}{2CI.IM} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Cách 2 : phương pháp tọa độ



Chọn hệ tọa độ như hình vẽ, *M* là trung điểm *BC*, *Oz*//*SA*

Khi đó $M(0;0;0), A\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right), B\left(0;\dfrac{a}{2};0\right), S\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0;a\sqrt{3}\right)$

$$\overrightarrow{SA} = (0;0;-a\sqrt{3}), \overrightarrow{SB} = \left(\frac{-a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};-a\sqrt{3}\right)$$

$$\overrightarrow{MS} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;a\sqrt{3}\right), \overrightarrow{MB} = \left(0;\frac{a}{2};0\right)$$

Mặt phẳng (SAB) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}\right] = \left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2};\dfrac{3a^2}{2};0\right)$

Mặt phẳng (SBC) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{k} = \left[\overrightarrow{MS}, \overrightarrow{MB}\right] = \left(\dfrac{-a^2\sqrt{3}}{2};0;\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$

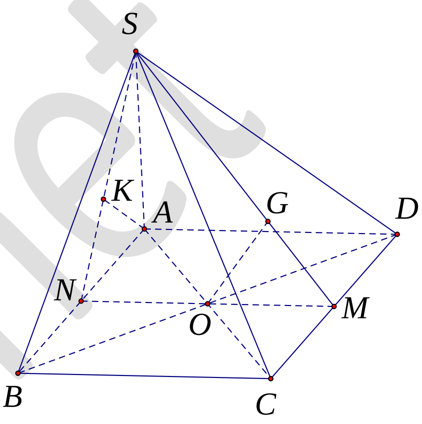
Vậy $\cos((SAB),(SBC)) = \dfrac{|\vec{n}.\vec{k}|}{|\vec{n}|.|\vec{k}|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông tâm *O* cạnh *a*, cạnh *SA* vuông góc với mặt đáy. Góc giữa đường thẳng *SC* và mặt phẳng $(ABCD)$ là 45^0, gọi *G* là trọng tâm tam giác *SCD*. Tính khoảng cách *h* giữa hai đường thẳng chéo nhau *OG* và *AD*.

A. $h = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. B. $h = \dfrac{a\sqrt{5}}{3}$. C. $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $h = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1 : phương pháp dựng hình



Gọi *M*, *N* lần lượt là trung điểm của *CD*, *AB*.

$AD//MN \Rightarrow AD//(SMN)$

$\Rightarrow d(AD, MN) = d(AD,(SMN)) = d(A,(SMN))$

Ta có : $MN \perp AB, MN \perp SA \Rightarrow MN \perp (SAB) \Rightarrow (SMN) \perp (SAB)$

Dựng $AK \perp SN \Rightarrow AH \perp (SMN) \Rightarrow d(A,(SMN)) = AK$

Lại có $SA \perp (ABCD)$ nên *AC* là hình chiếu của *SC* lên mặt phẳng $(ABCD)$.

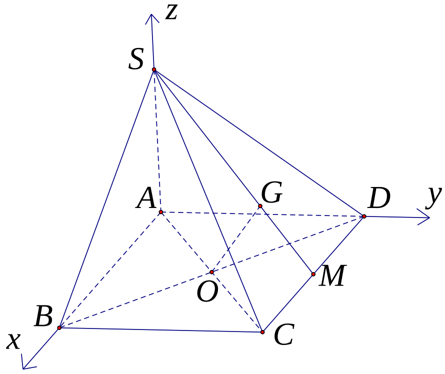
Từ đó suy ra $(SC,(ABCD)) = (SC, AC) = SCA = 45^0$

Vậy giác *SAC* vuông cân, suy ra $SA = AC = a\sqrt{2}$.

Tam giác *SAN* vuông tại *A*, đường cao *AK* suy ra :

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{9}{2a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Cách 2 : phương pháp tọa độ



Chọn hệ tọa độ như hình vẽ, theo cách 1 ta tính được $SA = a\sqrt{2}$

Khi đó $A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0), S(0;0;a\sqrt{2})$

Suy ra $O\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};0\right), G = \left(\dfrac{a}{3};\dfrac{2a}{3};\dfrac{a\sqrt{2}}{3}\right), \overrightarrow{OG} = \left(\dfrac{-a}{6};\dfrac{a}{6};\dfrac{a\sqrt{2}}{3}\right)$

$\overrightarrow{AD} = (0;a;0), \overrightarrow{AO} = \left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{2};0\right)$.

Vậy $d(AD, OG) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{OG}\right].\overrightarrow{AO}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{OG}\right]\right|} = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Câu 22. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình thoi tâm *O*, cạnh *a*, $BAD = 120^0$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) cùng vuông góc với mặt đáy, góc giữa đường thẳng *SC* và mặt phẳng $(ABCD)$ là 45^0. Gọi *G* là trọng tâm tam giác *ABC*, tính khoảng cách *h* từ *G* đến mặt phẳng (SCD) theo *a*.

A. $h=\dfrac{2\sqrt{21}a}{21}$. B. $h=\dfrac{\sqrt{21}a}{7}$. C. $h=\dfrac{\sqrt{7}a}{14}$. D. $h=\dfrac{\sqrt{3}a}{7}$.

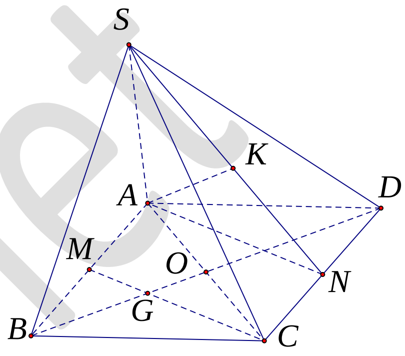
Hướng dẫn giải

Cách 1 : phương pháp dựng hình

Hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) cắt nhau theo giao tuyến SA và cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ nên $SA\perp(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD khi đó $G=CM\cap BO$.

Ta có $AM//CD\Rightarrow d(M,(SCD))=d(A,(SCD))$

Lại có $\dfrac{GC}{MC}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow d(G,(SCD))=\dfrac{2}{3}d(M,(SCD))=\dfrac{2}{3}d(A,(SCD))$



Tam giác ACD đều nên $AN\perp CD$, mà

$CD\perp SA\Rightarrow CD\perp(SAN)\Rightarrow(SAN)\perp(SCD)$

Dựng $AK\perp SN\Rightarrow AK\perp(SCD)\Rightarrow d(A,(SCD))=AK$

Do $SA\perp(ABCD)$ nên AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$ suy ra

$(SC,(ABCD))=(SC,AC)=SCA=45^0\Rightarrow AC=SA=a$

Ta tính được $AN=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Tam giác SAN vuông tại A, đường cao AK nên ta có :

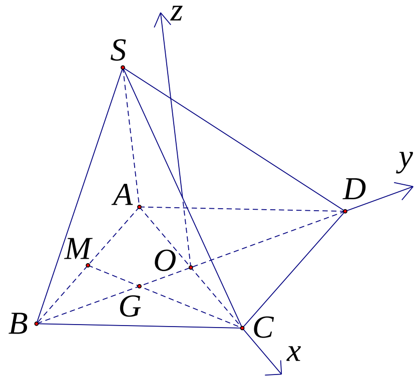
$$\frac{1}{AK^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AN^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{4}{3a^2}=\frac{7}{3a^2}\Rightarrow AK=\frac{\sqrt{21}a}{7}$$

Vậy $d(G,(SCD))=\dfrac{2}{3}AK=\dfrac{2\sqrt{21}a}{21}$

Cách 2 : phương pháp tọa độ

Chọn hệ tọa độ như hình vẽ, theo cách 1 ta tính được $SA=a$

Khi đó $O(0;0;0),A\left(\dfrac{-a}{2};0;0\right),C\left(\dfrac{a}{2};0;0\right),D\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$



$G\left(0;\dfrac{-a\sqrt{3}}{6};0\right),S\left(\dfrac{-a}{2};0;a\right)\Rightarrow\overrightarrow{CS}=(-a;0;a)$

$\overrightarrow{CD}=\left(\dfrac{-a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right),\overrightarrow{CG}=\left(\dfrac{-a}{2};\dfrac{-a\sqrt{3}}{6};0\right)$

Vậy $d(G,(SCD))=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{CS},\overrightarrow{CD}\right].\overrightarrow{CG}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{CS},\overrightarrow{CD}\right]\right|}=\dfrac{2\sqrt{21}a}{21}$

KHỐI CHÓP CÓ MẶT BÊN VUÔNG GÓC MẶT ĐÁY – HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách h từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) .

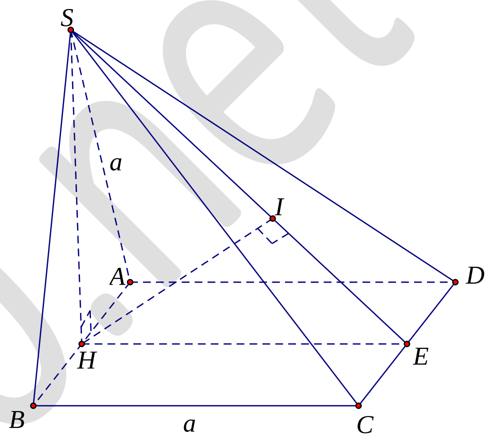
A. $h=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$. B. $h=a$. C. $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $h=\dfrac{a\sqrt{3}}{7}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình

<u>*Hướng dẫn giải*</u>:

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình.



Gọi H là trung điểm AB, ta có:

$$\begin{cases}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(ABCD)=AB\\SH\perp AB, SH\subset(SAB)\end{cases}\Rightarrow SH\perp(ABCD)$$

$d\left(A,(SCD)\right)=d\left(H,(SCD)\right)$ (vì $AH//(SCD)$)

Gọi E là trung điểm CD, kẻ $HI\perp SE,\ I\in SE$ thì $d\left(H,(SCD)\right)=HI$.

Tam giác SHE vuông tại H :

$$HI=\frac{SH.HE}{\sqrt{SH^2+HE^2}}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}.a}{\sqrt{\frac{3a^2}{4}+a^2}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Vậy: $d\left(A,(SCD)\right)=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

[Cách 2]: Phương pháp thể tích đổi đỉnh.

Ta tính được $V_{S.ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SH=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

$$d\left(A,(SCD)\right)=\frac{3.V_{S.ACD}}{S_{SCD}}=\frac{3.\frac{1}{2}.V_{S.ABCD}}{S_{SCD}}$$

Tính diện tích tam giác SCD:

Ta có: $CD=a$; $HC=HD=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}\Rightarrow SC=SD=\sqrt{SH^2+HC^2}=a\sqrt{2}$

Vì $SC=SD$ nên gọi E là trung điểm CD: $SE=\sqrt{SC^2-CE^2}=\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$

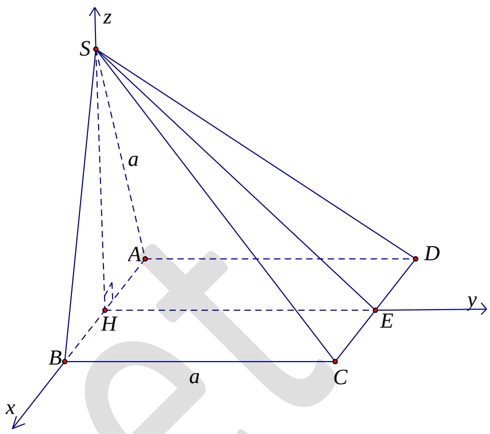
$\Rightarrow S_{\Delta SCD}=\dfrac{1}{2}SE.CD=\dfrac{\sqrt{7}}{4}.a^2\Rightarrow d\left(A,(SCD)\right)=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

(Có thể dùng công thức Hê-rông kết hợp MTCT để tính diện tích tam giác SCD).

[Cách 3]: Phương pháp tọa độ.

Chọn hệ trục tọa độ có gốc tại H, trục hoành là HA, trục tung là HE, trục cao là HS như hình.

$H(0;0;0)$, $A\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$, $S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(\frac{a}{2};a;0\right)$;



$D\left(-\frac{a}{2};a;0\right)$

$$\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right]=\left(0;\frac{a^2\sqrt{3}}{2};-a^2\right)$$

Vậy

$$d\left(A,(SCD)\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SD}\right]\right|}=\frac{\left|\frac{a^3\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{\frac{3a^4}{4}+a^4}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt đáy. Tính theo a khoảng cách h giữa hai đường thẳng SA, BC.

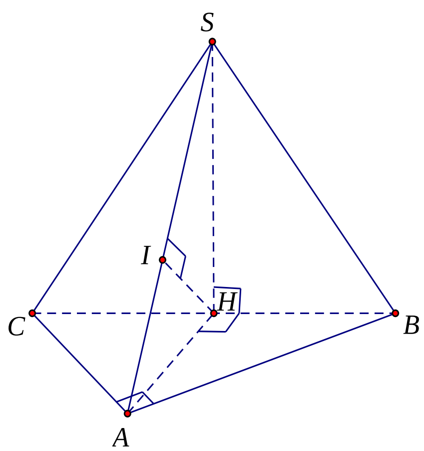
A. $h=\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $h=\frac{a}{2}$. C. $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $h=\frac{3a}{4}$.

Hướng dẫn giải:

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình

Trước tiên, ta cần kiểm tra xem SA và BC có vuông góc với nhau không.

Gọi H là trung điểm BC, SH là đường cao của hình chóp $S.ABC$.



Ta nhận thấy $SA\subset(SHA)$ có $SH\perp BC$, và do ABC là tam giác vuông cân tại A nên: $AH\perp BC$. Suy ra: $BC\perp(SHA)$ nên $BC\perp SA$.

BC cắt (SHA) tại H, kẻ $HI\perp SA$ $(I\in SA)$.

Suy ra HI là đoạn vuông góc chung của SA và BC nên $d(SA,BC)=HI$.

Ta có: $HI=\frac{SH\cdot HA}{\sqrt{SH^2+HA^2}}=\frac{\sqrt{3}a}{4}$.

Vậy $d\left(SA,BC\right)=\dfrac{\sqrt{3}a}{4}$.

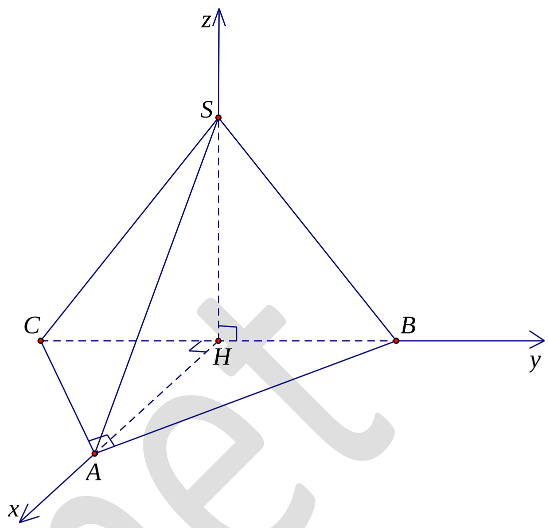
[Cách 2]: Phương pháp tọa độ.

Chọn hệ trục tọa độ có gốc tại H, trục hoành là HA, trục tung là HB, trục cao là HS. Ta có:

$A\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(0;-\dfrac{a}{2};0\right)$;

$B\left(0;\dfrac{a}{2};0\right)$.

Vậy $d\left(SA,BC\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right]\right|}=\dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.



Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA=a$; $SB=a\sqrt{3}$ và mặt phẳng $\left(SAB\right)$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,BC. Tính côsin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.   B. $\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.   C. $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$.   D. $\dfrac{a\sqrt{5}}{4}$.

Hướng dẫn giải:

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình

Gọi E là trung điểm AD, F là trung điểm AE.

Ta có $MF//BE//ND$

$\Rightarrow\left(SM,DN\right)=\left(SM,MF\right)$.

$SM^2=\dfrac{SB^2+SA^2}{2}-\dfrac{AB^2}{4}=a$

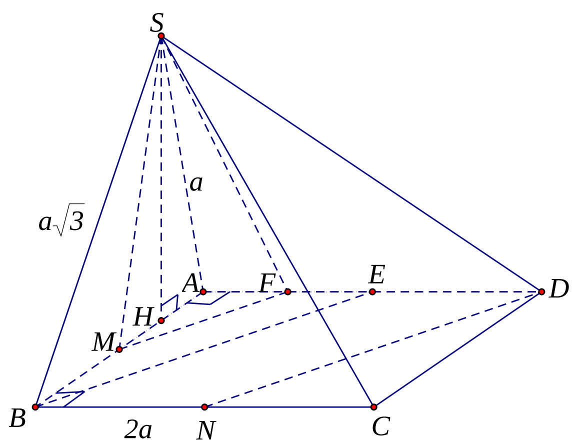
$\Rightarrow SM=SA\Rightarrow SH\perp MA$, với H là trung điểm MA.

$\Rightarrow SH\perp\left(ABCD\right)$

$BE=\sqrt{AB^2+AE^2}=a\sqrt{5}\Rightarrow MF=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$;

$HF=\dfrac{1}{4}BD=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; $SH=\sqrt{SA^2-HA^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$SF=\sqrt{SH^2+HF^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$ (ΔSHF vuông tại H)



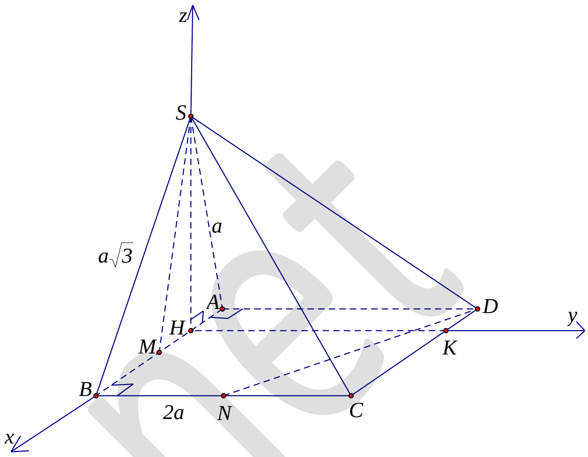
Định lí côsin trong ΔSMF : $SF^2 = SM^2 + MF^2 - 2SM.MF\cos SMF$

$\Leftrightarrow \frac{5a^2}{4} = a^2 + \frac{5a^2}{4} - 2.a.\frac{a\sqrt{5}}{2}\cos SMF \Leftrightarrow \cos SMF = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow \cos(SM, MF) = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

[Cách 2]: Phương pháp tọa độ.

Chọn hệ trục tọa độ có gốc tại H , trục hoành HB , trục tung là HK , trục cao là HS .



$SH = \sqrt{SA^2 - HA^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$M\left(\frac{a}{2};0;0\right)$, $S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $D\left(-\frac{a}{2};2a;0\right)$;

$N\left(\frac{3a}{2};a;0\right)$.

Vậy $\cos(SM, DN) = \frac{\left|\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{DN}\right|}{\left|\overrightarrow{SM}\right|.\left|\overrightarrow{DN}\right|} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

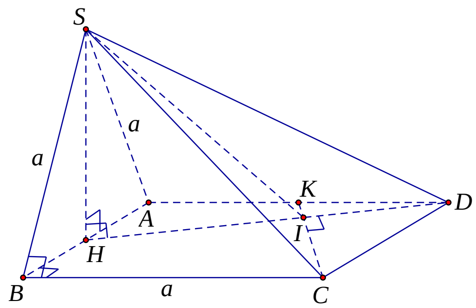
Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi H là trung điểm của AB. Tính côsin của góc giữa SC và (SHD).

A. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

Hướng dẫn giải:

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình

Gọi K là trung điểm AD, $I = CK \cap HD$



Ta có: $\begin{cases} CI \perp HD \\ CI \perp SH \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SHD)$ tại I

$\Rightarrow SI$ là hình chiếu của SC lên (SHD) và tam giác SIC vuông tại I

$\Rightarrow \cos(SC,(SHD)) = \cos(SC, SI) = \cos CSI$

$DI = \frac{DK.DC}{\sqrt{DK^2 + DC^2}} = \frac{a}{\sqrt{5}}$; $IC = \sqrt{DC^2 - ID^2} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$;

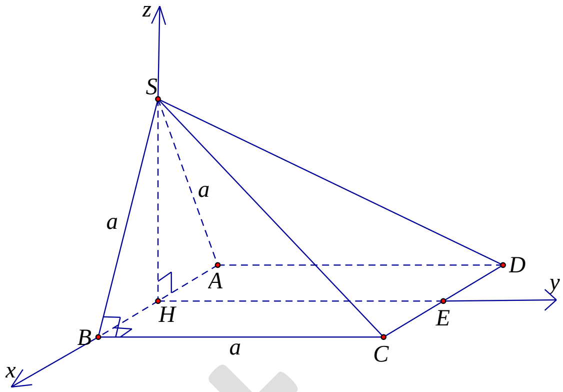
$SI = \sqrt{SC^2 - CI^2} = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$.

Vậy $\cos(SC,(SHD)) = \cos CSI = \frac{SI}{SC} = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

[Cách 2]: Phương pháp tọa độ.

Chọn hệ trục tọa độ có gốc tại H ,

trục hoành là HB, trục tung là HE, trục cao là HS.



$H(0;0;0)$, $S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(\dfrac{a}{2};a;0\right)$; $D\left(-\dfrac{a}{2};a;0\right)$

.

Ta có:

$\left[\overrightarrow{HS},\overrightarrow{HD}\right]=\left(-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2};-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4};0\right)\Rightarrow\vec{n}=(2;1;0)$ là

một vectơ pháp tuyến của (SHD).

$\Rightarrow\sin(SC,(SHD))=\left|\cos\left(\overrightarrow{SC},\vec{n}\right)\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{SC}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{SC}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

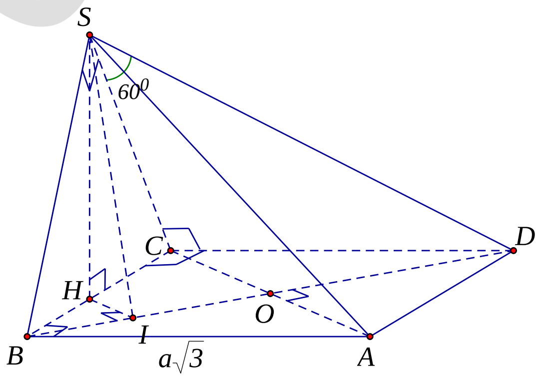
Vậy $\cos\left(\overrightarrow{SC},(SHD)\right)=\sqrt{1-\dfrac{2}{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$. Tam giác SBC vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, đường thẳng SD tạo với mặt phẳng (SBC) một góc 60^0. Tính góc giữa (SBD) và $(ABCD)$.

A. $\dfrac{\pi}{4}$. B. $\dfrac{\pi}{3}$. C. $\dfrac{\pi}{6}$. D. $\dfrac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải:

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình



Từ S dựng $SH\perp BC$, suy ra $SH\perp(ABCD)$. Từ H dựng $HI\,//\,AC, I\in BD$, suy ra $HI\perp BD$.

Góc giữa (SBD) và $(ABCD)$ .là SIH .

Ta có: $\begin{cases}DC\perp BC\\DC\perp SH\end{cases}\Rightarrow DC\perp(SBC)$

$\Rightarrow(SD,(SBC))=DSC=60^0$ và $DC\perp SC$.

$\Rightarrow SC=\dfrac{CD}{\tan 60^0}=a$

$\Rightarrow SH=\dfrac{SB.SC}{BC}=a\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$BH=\sqrt{SB^2-SH^2}=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

Theo Ta-let: $\dfrac{BH}{BC}=\dfrac{IH}{OC}\Rightarrow IH=\dfrac{BH.OC}{BC}=a\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

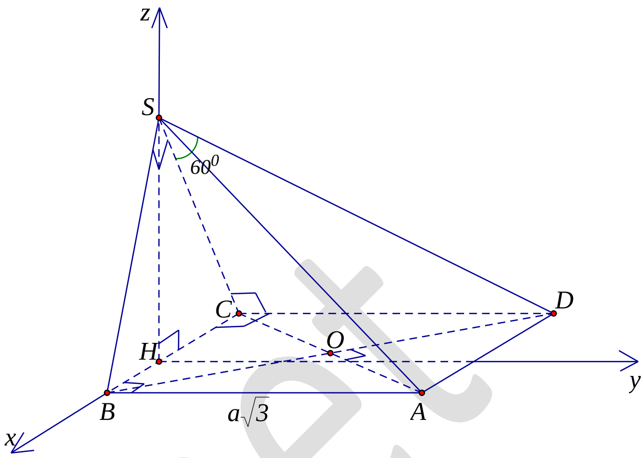
$\Rightarrow SH=IH\Rightarrow\Delta SHI$ vuông cân tại H

Vậy $SIH=\dfrac{\pi}{4}$.

[Cách 2]: Phương pháp tọa độ.

Từ S dựng $SH \perp BC$, suy ra $SH \perp (ABCD)$. Từ H dựng $HI // AC, I \in BD$, suy ra $HI \perp BD$.

Góc giữa (SBD) và $(ABCD)$ .là SIH .



Chọn hệ trục tọa độ có gốc tại H, trục hoành là HB, trục tung là Hy song song CD, trục cao là HS.

Ta có: $\begin{cases} DC \perp BC \\ DC \perp SH \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SBC)$

$\Rightarrow (SD,(SBC)) = DSC = 60^0$ và $DC \perp SC$.

$\Rightarrow SC = \dfrac{CD}{\tan 60^0} = a \Rightarrow SH = \dfrac{SB.SC}{BC} = a\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow BH = \sqrt{SB^2 - SH^2} = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

$H(0;0;0)$, $S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$, $B\left(\dfrac{2a}{\sqrt{3}};0;0\right)$;

$D\left(-\dfrac{a}{\sqrt{3}};a\sqrt{3};0\right)$ (vì $HC = BC - BH = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$)

Ta có: $\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SD}\right] = \left(a^2\sqrt{2};a^2\sqrt{2};2a^2\right) \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = \left(1;1;\sqrt{2}\right)$ là một vectơ pháp tuyến của (SBD).

$\left[\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HD}\right] = \left(0;0;2a^2\right) \Rightarrow \overrightarrow{n_2} = (0;0;1)$ là một vectơ pháp tuyến của $(ABCD)$.

$\Rightarrow \cos((SBD),(ABCD)) = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy $SIH = \dfrac{\pi}{4}$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SD = \dfrac{3a}{2}$, hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$ là trung điểm cạnh AB. Tính theo a khoảng cách h từ A đến mặt phẳng (SBD).

A. $h = \dfrac{2a}{3}$.   B. $h = \dfrac{a}{3}$.   C. $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.   D. $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình.

Gọi H là trung điểm AB, ta có:

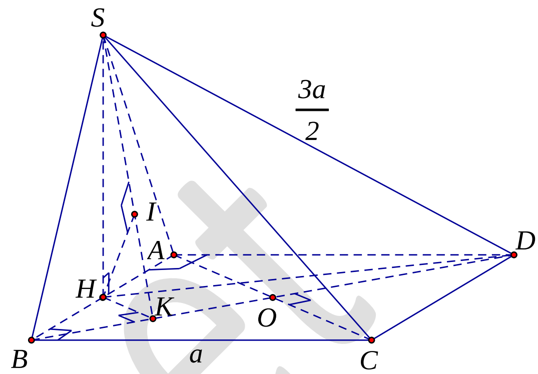
$SH \perp (ABCD)$

Gọi K là trung điểm OB thì $HK \perp OB$, kẻ $HI \perp SK$, $I \in SK$ thì $d(H,(SBD)) = HI$.

$AH \cap (SBD) = B,\ AB = 2HB$

$$\Rightarrow d\left(A,(SBD)\right)=2d\left(H,(SBD)\right)=2HI=2.\frac{SH.HK}{\sqrt{SH^2+HK^2}}=2.\frac{a.\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{a^2+\frac{a^2}{8}}}=\frac{2a}{3}$$ với

$SH=\sqrt{SD^2-HD^2}=a; HK=\frac{1}{4}AC=\frac{a\sqrt{2}}{4}$



[Cách 2]: Phương pháp thể tích đổi đỉnh.

Ta tính được $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.\text{SH}=\frac{a^3}{3}$.

$$d\left(A,(SBD)\right)=\frac{3.V_{S.ABD}}{S_{SBD}}=\frac{3.\frac{1}{2}.V_{S.ABCD}}{S_{SBD}}=\frac{2a}{3}.$$

Tính diện tích tam giác SBD:

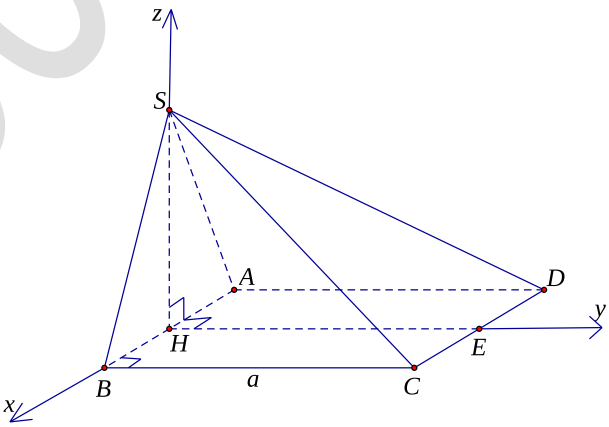
Ta có: $BD=a\sqrt{2}$; $SD=\frac{3a}{2}$ $SB=\sqrt{SH^2+HB^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$

Dùng công thức Hê-rông kết hợp MTCT:

$$p=\frac{SB+SD+BD}{2}; S_{SBD}=\sqrt{p\left(p-\frac{a\sqrt{5}}{2}\right)\left(p-\frac{3a}{2}\right)\left(p-\sqrt{2}\right)}=\frac{3a^2}{4}$$

[Cách 3]: Phương pháp tọa độ.

Chọn hệ trục tọa độ có gốc tại H, trục hoành là HA, trục tung là HE, trục cao là HS như hình.



$SH=\sqrt{SD^2-HD^2}=a$

$H(0;0;0)$, $A\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$, $S(0;0;a)$,

$B\left(\frac{a}{2};0;0\right)$; $D\left(-\frac{a}{2};a;0\right)$

$\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SD}\right]=\left(a^2;a^2;-\frac{a^2}{2}\right)$

$$d\left(A,(SBD)\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SD}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SD}\right]\right|}=\frac{a^3}{\frac{3a^2}{2}}=\frac{2a}{3}.$$

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA=2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0. Tính khoảng cách h giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

A. $h=\frac{\sqrt{42}a}{8}$. B. $h=\frac{\sqrt{42}a}{12}$. C. $h=\frac{\sqrt{42}a}{12}$. D. $h=\frac{\sqrt{42}a}{12}$.

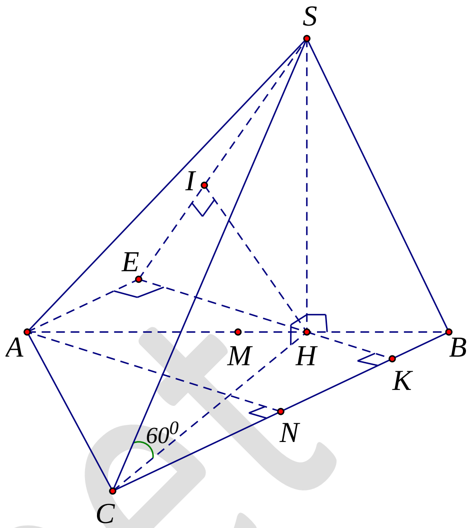
Hướng dẫn giải:

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình

$d(SA,BC)=d\left(BC,(SAt)\right), At//BC$

$= d\left(B,\left(SAt\right)\right)$, vì $BC//\left(SAt\right)$

Gọi N là trung điểm BC, qua H dựng $EK//AN, E \in At, K \in BC \Rightarrow AEKN$ là hình chữ nhật, $\left(SAt\right)$ là $\left(SAE\right)$. Dựng $HI \perp SE$ ta có:



$$d\left(H,\left(SAE\right)\right) = HI = \frac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}}$$

$$MH = \frac{1}{6}AB = \frac{1}{6}a \Rightarrow CH = \sqrt{CM^2 + MH^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

$$\left(SC,\left(ABC\right)\right) = SCH = 60^0, \tan 60^0 = \frac{SH}{CH} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{21}}{3}$$

$$HK = \frac{1}{3}AN \Rightarrow EH = \frac{2}{3}AN = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$d\left(H,\left(SAE\right)\right) = HI = \frac{SH.HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{a\sqrt{42}}{12}.$$

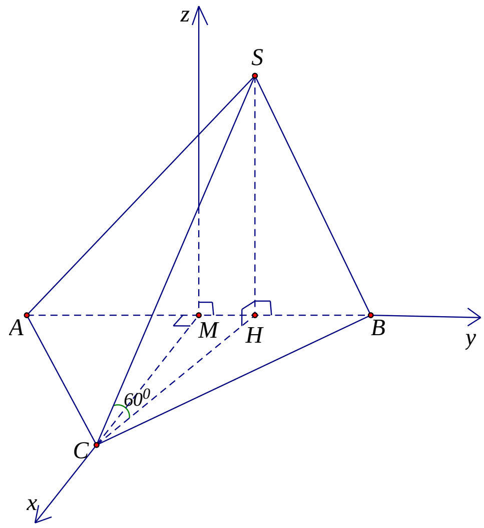
$$BH \cap \left(SAE\right) = A, BA = \frac{3}{2}HA$$

$$\Rightarrow d\left(B,\left(SAE\right)\right) = \frac{3}{2}d\left(H,\left(SAE\right)\right) = \frac{a\sqrt{42}}{8}.$$

Vậy $d\left(SA,BC\right) = \frac{a\sqrt{42}}{8}$.

[Cách 2]: Phương pháp tọa độ.

Chọn hệ trục tọa độ có gốc tại M, trục hoành là MC, trục tung là MB, trục cao là $Mz//HS$. Ta có:



$$MH = \frac{1}{6}AB = \frac{1}{6}a \Rightarrow CH = \sqrt{CM^2 + MH^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$$

$$\left(SC,\left(ABC\right)\right) = SCH = 60^0, \tan 60^0 = \frac{SH}{CH} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{21}}{3}$$

$$A\left(0;-\frac{a}{2};0\right),\ S\left(0;\frac{a}{6};\frac{a\sqrt{21}}{3}\right),\ B\left(0;\frac{a}{2};0\right);\ B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right).$$

$$\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right] = \left(\frac{a^2\sqrt{21}}{6};\frac{a^2\sqrt{7}}{2};-\frac{a^2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\Rightarrow d\left(SA,BC\right) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{BC}\right]\right|} = \frac{a\sqrt{42}}{8}.$$

Câu 30. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, O là giao điểm hai đường chéo AC và BD, có $AB = a; AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S lên $\left(ABCD\right)$ là trung điểm H của OD, $SH = 2a$. Tính côsin của góc $\left(AB,SD\right)$.

A. $\frac{\sqrt{17}}{34}$. B. $-\frac{\sqrt{17}}{34}$. C. $\frac{2}{\sqrt{17}}$. D. $\frac{1}{34}$.

Hướng dẫn giải:

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình

$(AB,SD)=(DC,SD)$

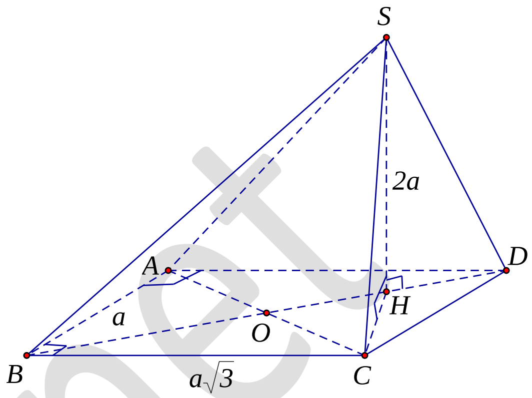
$SD=\sqrt{SH^2+HD^2}=\frac{a\sqrt{17}}{2}$

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=2a\Rightarrow OC=a;$

$OC=CD=OD=a\Rightarrow CH\perp OD$

$\Rightarrow CH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

$SC=\sqrt{SH^2+HC^2}=\frac{a\sqrt{19}}{2}$



Định lí côsin trong tam giác SDC:

$SC^2=SD^2+CD^2-2SD.CD.\cos SDC$

$\Rightarrow \cos SDC=\frac{\sqrt{17}}{34}\Rightarrow \cos(AB,SD)=\cos(DC,SD)=\cos SDC=\frac{\sqrt{17}}{34}$.

[Cách 2]: Phương pháp tọa độ.

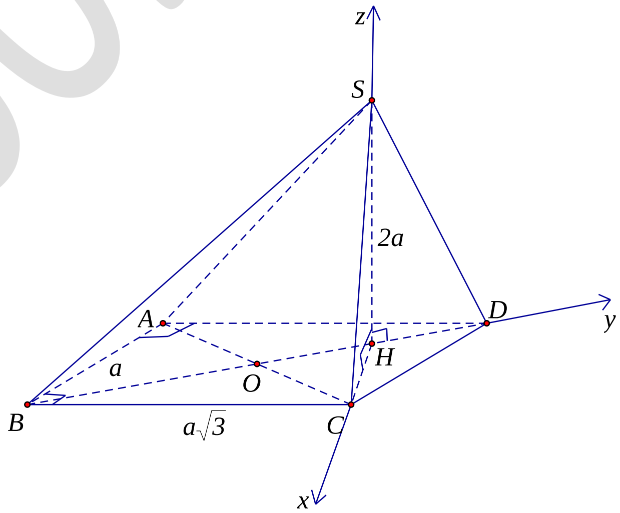
Chọn hệ trục tọa độ có gốc tại H, trục hoành là HC, trục tung là HD, trục cao là HS.

$H(0;0;0)$, $S(0;0;2a)$, $C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right)$;

$D\left(0;\frac{a}{2};0\right)$.

$\Rightarrow \cos(DC,SD)=\left|\cos\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DS}\right)\right|$

$=\frac{\left|\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DS}\right|}{\left|\overrightarrow{DC}\right|.\left|\overrightarrow{DS}\right|}=\frac{\sqrt{17}}{34}$.

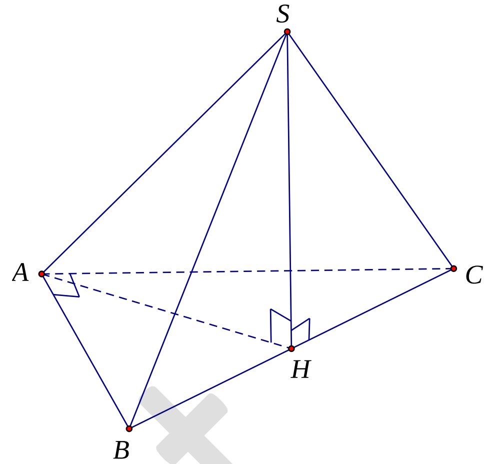


Câu 31. Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $SA=SB=SC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $BC=a$. Tính cosin của góc giữa SA và (ABC).

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình



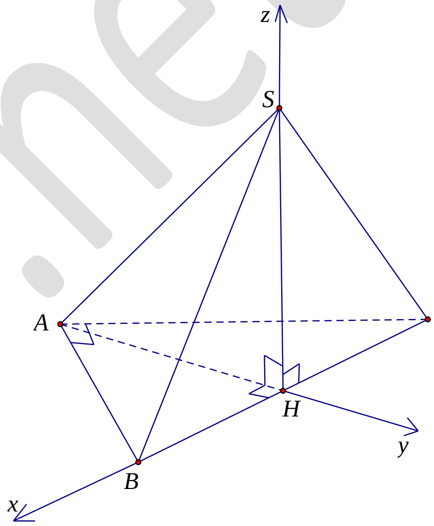
Gọi H là trung điểm cạnh BC, suy ra $SH \perp (ABC)$ (vì $SA = SB = SC$).

$(SA,(ABC)) = SAH$

$AH = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$

Vậy $\cos(SA,(ABC)) = \cos SAH = \frac{AH}{SA} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

[Cách 2]: Phương pháp tọa độ.



Ta thấy A di chuyển trên đường tròn đường kính BC nên AB, AC thay đổi, và góc giữa SA và (ABC) không đổi. Ta chọn vị trí A sao cho tam giác ABC vuông cân tại A. Khi đó với H là trung điểm BC thì $AH \perp BC$. Chọn hệ trục tọa độ có gốc tại H, trục hoành là HB, trục tung là AH, trục cao là HS.

$AH = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$, $SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$;

$H(0;0;0)$, $S\left(0;0;\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$, $A\left(0;-\frac{a}{2};0\right)$; $B\left(\frac{a}{2};0;0\right)$

Ta có: $\left[\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HB}\right] = \left(0;0;-\frac{a^2}{4}\right)$

$\Rightarrow \vec{n} = (0;0;1)$ là một vectơ pháp tuyến của (ABC).

$\Rightarrow \sin(SA,(ABC)) = \left|\cos\left(\overrightarrow{SA},\vec{n}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{SA}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{SA}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{SA},(ABC)\right) = \sqrt{1-\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại đỉnh A, cạnh $BC = a$, $AC = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, các cạnh bên $SA = SB = SC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc tạo bởi mặt bên (SAB) và mặt phẳng đáy (ABC).

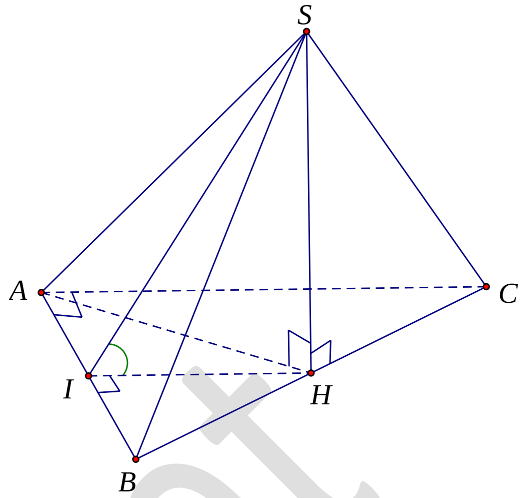
A. $\frac{\pi}{3}$. B. $\frac{\pi}{6}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. $\arctan 3$.

Hướng dẫn giải:

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình

Gọi I là trung điểm AB, ta có:
$IH \perp AB \Rightarrow AB \perp (SIH) \Rightarrow AB \perp SI$.
$((SAB),(ABC)) = SIH$.
$AH = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$, $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$;
$IH = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

$\tan SIH = \frac{SH}{IH} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{\frac{a\sqrt{6}}{6}} = \sqrt{3}$.



Vậy $((SAB),(ABC)) = SIH = \frac{\pi}{3}$.

[Cách 2]: Phương pháp tọa độ.

Chọn hệ trục tọa độ có gốc tại I, trục hoành là IB, trục tung là IH, trục cao là $Iz//HS$.

$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \frac{a}{\sqrt{3}}$;

$I(0;0;0)$, $B\left(\frac{a}{2\sqrt{3}};0;0\right)$, $H\left(0;\frac{a}{\sqrt{6}};0\right)$; $S\left(0;\frac{a}{\sqrt{6}};\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$

Ta có:

$\left[\overrightarrow{IS},\overrightarrow{IB}\right] = \left(0;\frac{a^2\sqrt{6}}{12};\frac{a^2\sqrt{2}}{12}\right)$

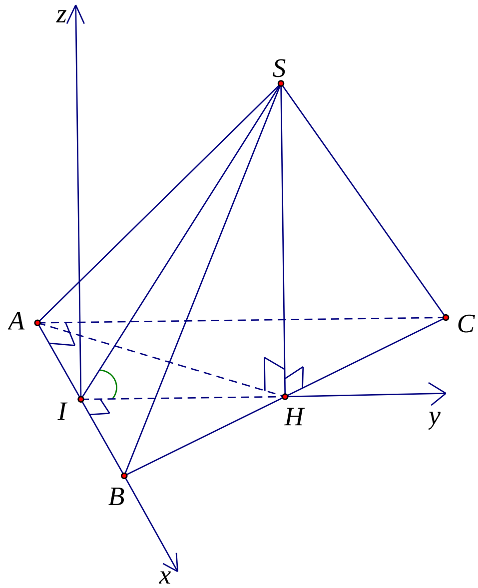
$\Rightarrow \overrightarrow{n_1} = (0;\sqrt{3};1)$ là một vectơ pháp tuyến của (SAB).

$\left[\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IH}\right] = \left(0;0;\frac{a^2\sqrt{2}}{12}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_2} = (0;0;1)$ là một vectơ pháp tuyến của (ABC).

$\Rightarrow \cos((SAB),(ABC)) = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{1}{2}$

Vậy $((SAB),(ABC)) = \frac{\pi}{3}$.



CHỦ ĐỀ LĂNG TRỤ ĐỨNG -
HÌNH HỘP CHỮ NHẬT- HÌNH LẬP PHƯƠNG

Câu 33. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy ABC là tam giác vuông tại B có $AB = a, AC = a\sqrt{3}, A'B = 2a$. Gọi M là trung điểm của AC. Khoảng cách từ M đến $(A'BC)$ là:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{3a}{2}$. D. $\frac{3a}{4}$.

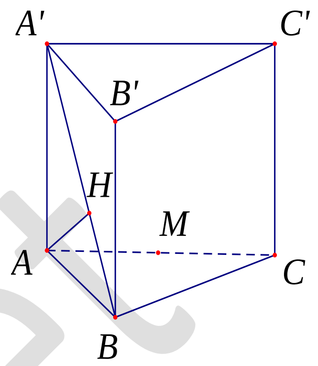
Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp cổ điển

+ Đi tính $d\left(A,(A'BC)\right)$

Kẻ $AH \perp A'B$,có:

$\begin{cases} AH \perp A'B \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (A'BC) \Rightarrow d\left(A,(A'BC)\right) = \text{AH}$



Có $A'A^2 = A'B^2 - AB^2 = 3a^2$

Có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Có $AM \cap (A'BC) = C$ và M là trung điểm AC

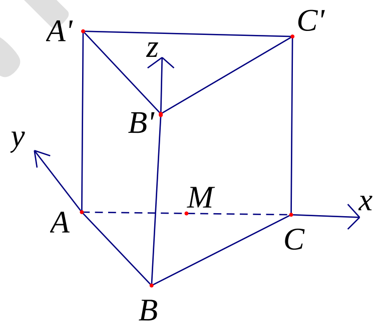
$\Rightarrow d\left(M,(A'BC)\right) = \frac{1}{2} d\left(A,(A'BC)\right) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

[Cách 2] : Phương pháp tọa độ:

Chọn hệ trục toa độ như hình vẽ. Khi đó ta có:

$B(0;0;0); A(0;a;0); C(a\sqrt{2};0;0);$

$A'(0;a;2a); M(\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a}{2};0)$



Ta có: $\overrightarrow{BA'} = (0;a;a\sqrt{3}); \overrightarrow{BC} = (a\sqrt{2};0;0)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BA'} \wedge \overrightarrow{BC} = (0;a^2\sqrt{6};-a^2\sqrt{2}) = a^2\sqrt{2}(0;\sqrt{3};1)$

Khi đó phương trình $(A'BC): \sqrt{3}y + z = 0$

Suy ra $d\left(M,(A'BC)\right) = \frac{\left|\frac{a\sqrt{3}}{2}\right|}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 34. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy là tam giác đều, cạnh $A'A = 3a$. Biết góc giữa $(A'BC)$ và đáy bằng 45^0. Tính khoảng cách hai đường chéo nhau $A'B$ và CC' theo a là:

A. $3a$. B. a. C. $\frac{3a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1]: phư ơng pháp cổ điển:

Ta có $C'C // A'A \Rightarrow C'C // (A'ABB')$

Suy ra $d(C'C, A'B) = d(C,(A'ABB'))$

Kẻ $CH \perp AB$

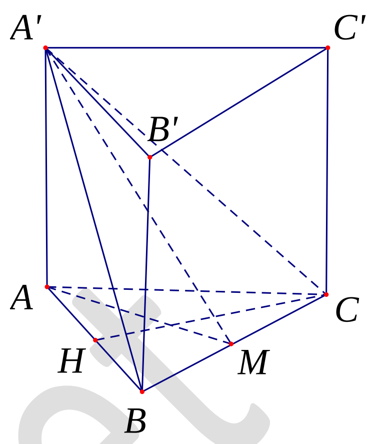
Ta chứng minh đư ợc $CH \perp (ABB'A')$

Khi đó $d(C,(ABB'C')) = CH$

Ta có $BC = (A'BC) \cap (ABC)$

Kẻ $AM \perp BC$

Ta chứng minh được $BC \perp (A'AM)$



Ta có $\begin{cases} AM = (A'AM) \cap (ABC) \\ A'M = (A'AM) \cap (A'BC) \end{cases}$

Suy ra $((A'AM),(ABC)) = (AM, A'M) = 45^0$

Khi đó $\Delta A'AM$ vuông cân tại A $\Rightarrow A'A = AM = 3a$

Mà ΔABC đều nên $CH = AM = 3a$

Vậy $d(A'B, C'C) = 3a$

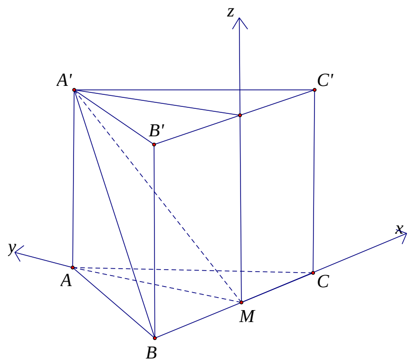
[Cách 2]: Phương pháp tọa độ

Ta tính được $AB = 2a\sqrt{3}$

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó ta có

$M(0;0;0); A'(0;3a;3a); B(-a\sqrt{3};0;0);$

$C(a\sqrt{3};0;0); C'(a\sqrt{3};0;3a)$



Ta có:

$\overrightarrow{A'B} = (-a\sqrt{3};-3a;-3a); \overrightarrow{CC'} = (0;0;3a);$

$\overrightarrow{BC} = (2a\sqrt{3};0;0)$

Lại có: $\overrightarrow{BA'} \wedge \overrightarrow{BC} = (-9a^2; 3a^2\sqrt{3}; 0)$

Ta tính được: $\begin{cases} \left(\overrightarrow{A'B} \wedge \overrightarrow{CC'}\right).\overrightarrow{BC} = -18a^3\sqrt{3} \\ \left|\overrightarrow{A'B} \wedge \overrightarrow{CC'}\right| = 6a^2\sqrt{3} \end{cases}$

Khi đó ta có: $d\left(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{CC'}\right) = \dfrac{\left|\left(\overrightarrow{A'B} \wedge \overrightarrow{CC'}\right).\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\overrightarrow{A'B} \wedge \overrightarrow{CC'}\right|} = 3a$

Câu 35. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên $2a$, góc tạo bởi $A'B$ và mặt đáy là 60^0 . Gọi M là trung điểm BC .Tính cosin góc tạo bởi 2 đường thẳng $A'C$ và AM .

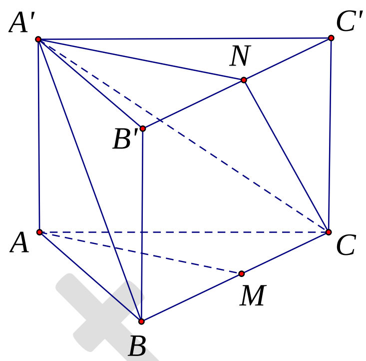
A. $\dfrac{2\sqrt{15}}{5}a$. B. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}a$. C. $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}a$. D. $\dfrac{\sqrt{39}}{13}a$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp tích vô hướng

Lăng trụ đều là lăng trụ đứng có đáy là tam giác đều

Áp dụng công thức: $\cos\left(A'C, AM\right) = \dfrac{\left|\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{AM}\right|}{A'C.AM}$



Ta có $\left(A'B,(ABC)\right) = \left(A'B, AB\right) = ABA' = 60^0$

Trong Δ_v $A'AB$ có: $\tan B = \dfrac{A'A}{AB} \Rightarrow AB = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

Lại có

$$\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{AM} = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA'}\right) \times \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(AC^2 + AB.AC.\cos 60^0\right)$$

$= a^2$.

[Cách 2]: Phương pháp dựng hình

Mặt khác $A'C = \sqrt{A'A^2 + AC^2} = \dfrac{4a}{\sqrt{3}}$;

$AM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{2a}{\sqrt{3}} = a$ (Trung tuyến trong tam giác đều)

Khi đó $\cos\left(A'C, AM\right) = \dfrac{a^2}{\dfrac{4a}{\sqrt{3}} \times a} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Gọi N là trung điểm của $B'C'$

$\Rightarrow A'N // AM \Rightarrow \left(A'C, AM\right) = \left(A'C, A'N\right)$

Suy ra $\cos\left(A'C, AM\right) = \cos\left(A'C, AN\right) = \left|\cos CA'N\right|$

Xéttam giác $A'NC$ có : $\cos CA'N = \dfrac{A'C^2 + A'N^2 - CN^2}{2A'C.A'N}$

Ta có :

$A'N = AM = a$

$A'C = \dfrac{4a}{\sqrt{3}}$

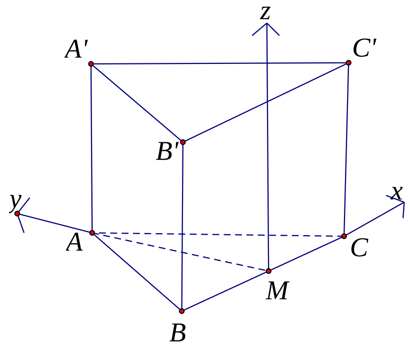
$CN^2 = CC'^2 + CN^2 = \dfrac{13a^2}{3}$

Khi đó $\cos CA'N = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \cos\left(A'C, AM\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

[Cách 3]: Phương pháp hệ trục tọa độ

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó:

$M(0;0;0); A(0;a;0); C(\frac{a}{\sqrt{3}};0;0); A'(0;a;2a)$



Ta có

$\overrightarrow{A'C} = (-\frac{a}{\sqrt{3}};a;2a) \Rightarrow A'C = \frac{4a}{\sqrt{3}}$

$\overrightarrow{AM} = (0;a;0) \Rightarrow AM = a$

Khi đó: $\cos\left(A'C, AM\right) = \frac{\left|\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{AM}\right|}{A'C.AM} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 36. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = 5a, AC = 6a, BC = 7a; A'A = 3a$. Tính góc tạo bởi đường thẳng BC' và $(ACC'A)$

A. $\arctan\frac{2\sqrt{51}}{17}$. B. $\arctan\frac{\sqrt{51}}{17}$. C. $\arcsin\frac{2\sqrt{51}}{17}$. D. $\arcsin\frac{2\sqrt{51}}{17}$.

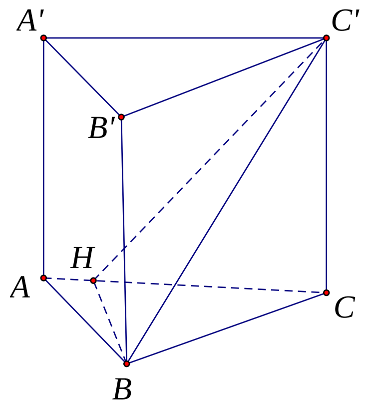
Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp cổ điển

Kẻ $BH \perp AC \Rightarrow BH \perp (ACC'A')$

Suy ra HC là hình chiếu vuông góc của BC' trên $(ACC'A')$

Khi đó $\left(BC',(ACC'A')\right) = \left(BC', HC'\right) = BC'H$



Ta có $p = \frac{AB + AC + BC}{2} = 9a$

$S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = 6a^2\sqrt{6}$

Mà $S_{ABC} = \frac{1}{2}BH.AC \Rightarrow BH = 2a\sqrt{6}$

Có $HC^2 = BC^2 - BH^2 \Rightarrow HC = 5a$

Ta có $HC'^2 = CC'^2 + HC^2 \Rightarrow HC' = a\sqrt{34}$

Xét $\Delta_v BHC'$ có $\tan BC'H = \frac{BH}{HC'} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{34}} = \frac{2\sqrt{51}}{17}$

Khi đó $BC'H = acr\tan\frac{2\sqrt{51}}{17}$.

[Cách 2] : Phương pháp tọa độ

Ta tính được $BH = 2a\sqrt{6}; AH = a$

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó ta có:

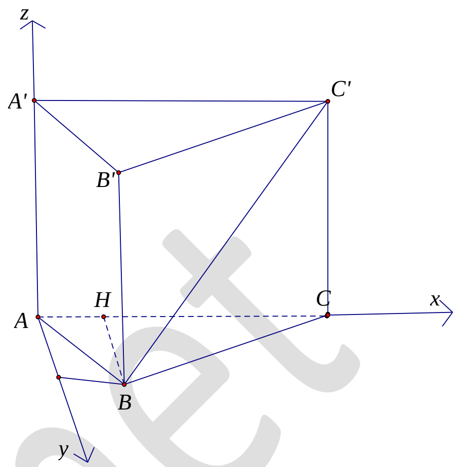
$A(0;0;0); C'(6a;0;3a); B(a;2a\sqrt{6};0)$

Ta có $(A'ACC') \equiv (Oxz) \Rightarrow (A'ACC'): y = 0$

Lại có : $\overrightarrow{BC'} = (5a; 2a\sqrt{6}; 3a) = a(5; 2\sqrt{6}; 3)$

Ta có : $(ACC'A')$ có VTPT là $\vec{n} = (0;1;0)$

BC' có VTCP là $\vec{u} = (5; 2\sqrt{6}; 3)$



Khi đó $\sin\left(BC';(ACC'A')\right) = \dfrac{|\vec{n}.\vec{u}|}{|\vec{n}|.|\vec{u}|} = \dfrac{2\sqrt{87}}{29}$

Đặt $\alpha = \left(BC', (ACC'A')\right)$

ADCT

$1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \cot^2\alpha = \dfrac{17}{12} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{2\sqrt{51}}{17}$

Vậy góc giữa BC' và $(ACC'A')$ là $\alpha = \arctan\dfrac{2\sqrt{51}}{17}$.

Câu 37. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ với đáy ABC là tam giác vuông tại C có $AB = 8cm$ $BAC = 60^0$,diện tích tam giác $A'CC'$ là $10cm^2$. Tính tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(C'AB)$ và (ABC) .

A. $\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$. B. $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$. C. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1]:Phương pháp cổ điển

Ta có $AB = (ABC) \cap (C'AB)$

Kẻ $CH \perp AB$

Ta chứng minh được $AB \perp (C'CH)$

Ta có $\begin{cases} CH = (C'AB) \cap (C'HC) \\ C'H = (C'AB) \cap (ABC) \end{cases}$

Nên $\left((C'AB), (ABC)\right) = \left(C'H, CH\right) = C'HC$

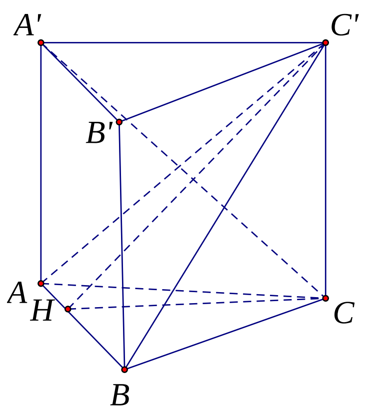
Trong $\Delta_V ABC$ có $\cos CAB = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow AC = 4cm$

Trong $\Delta_V AHC: CH = AC.\sin 60^0 = 2\sqrt{3}\,cm$

Có $S_{A'C'C} = \dfrac{1}{2}C'A'.C'C \Rightarrow C'C = 5cm$

Trong $\Delta_V C'CH$ ta có:

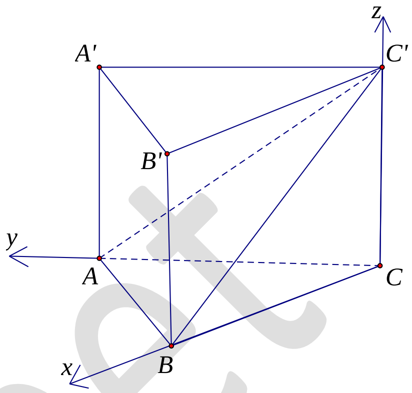
$\tan CHC' = \dfrac{CC'}{CH} = \dfrac{5\sqrt{3}}{6}$.



[Cách 2]: Phương pháp tọa độ

Chọn hệ trục toa độ như hình vẽ. Khi đó ta có
$C(0;0;0);A(0;4;0)B(4\sqrt{3};0;0);C'(0;0;5)$
Ta có $(ABC)\equiv(Oxy)\Rightarrow(ABC):z=0$
Lại có $\overrightarrow{C'A}=(0;4;-5);\overrightarrow{C'B}=(4\sqrt{3};0;-5)$
$\Rightarrow\overrightarrow{C'A}\wedge\overrightarrow{C'B}=(-20;-20\sqrt{3};-16\sqrt{3})$
Suy ra $(C'AB)$ có VTPT là $\vec{n}=(5;5\sqrt{3};4\sqrt{3})$
và (ABC) có VTPT là $\vec{n'}=(0;0;1)$

Khi đó $\cos\left((C'AB),(ABC)\right)=\dfrac{\left|\vec{n'}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{n'}\right|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{37}}$



Do đó:

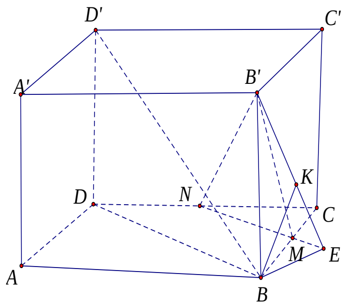
$1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\tan\left((C'AB),(ABC)\right)=\dfrac{5\sqrt{3}}{6}$

Câu 38. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=3a,AD=5a$, góc tạo bởi $D'B$ và mặt đáy là 45^0 . Gọi M là trung điểm của BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau BD và $B'M$

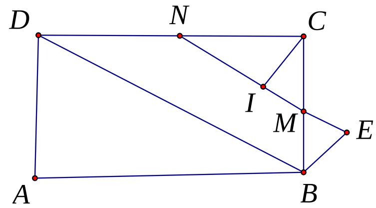
A. $\dfrac{30a}{\sqrt{661}}$. B. $\dfrac{20a}{\sqrt{661}}$. C. $\dfrac{a\sqrt{661}}{30}$. D. $\dfrac{a\sqrt{661}}{20}$.

[Cách 1]: Phương pháp cổ điển:

Gọi N là trung điểm DC



Tacó $BD//(B'MN)$
$\Rightarrow d\left(BD,B'M\right)=d\left(BD,(B'MN)\right)=d\left(B,(B'MN)\right)$
Kẻ $BE\perp MN, BK\perp B'E$
Chứngminh được $BK\perp(B'MN)$
$\Rightarrow d\left(B,(B'MN)\right)=BK$
Kẻ đường cao CI của $\triangle CMN$ ta có $CI=BE$



Ta có $\dfrac{1}{CI^2}=\dfrac{1}{CN^2}+\dfrac{1}{CM^2}\Rightarrow CI=\dfrac{6a}{5}=BE$
Ta có $\left(D'B,(ABCD)\right)=D'BD=45^0$
Suy ra $\Delta BD'D$ vuông cân tại $D\Rightarrow BD=D'D=5a$
Lại có $\dfrac{1}{B}$ $\dfrac{1}{BH^2}=\dfrac{1}{BE^2}+\dfrac{1}{BB'^2}\Rightarrow BH=\dfrac{30a}{\sqrt{661}}$

[Cách 2]: Phương pháp tọa độ

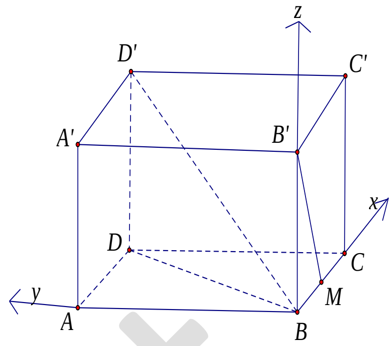
Chọn hệ trục toa độ như hình vẽ. khi đó : $B(0;0;0); M(\frac{3a}{2};0;0); B'(0;0;5a); D(3a;4a;0)$

Có $\overrightarrow{BD}=(3a;4a;0); \overrightarrow{B'M}=(\frac{3a}{2};0;5a); \overrightarrow{BM}=(\frac{3a}{2};0;0)$

Ta có : $\overrightarrow{BD}\wedge\overrightarrow{B'M}=(20a^2;-15a^2;6a^2);$

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{BD}\wedge\overrightarrow{B'M}\right|=a^2\sqrt{611};\ \left(\overrightarrow{BD}\wedge\overrightarrow{B'M}\right).\overrightarrow{BM}=3a^3$

Khi đó $d\left(BD,B'M\right)=\dfrac{\left|\left(\overrightarrow{BD}\wedge\overrightarrow{B'M}\right).\overrightarrow{BM}\right|}{\left|\overrightarrow{BD}\wedge\overrightarrow{B'M}\right|}=\dfrac{30a}{\sqrt{661}}$



Câu 39. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có diện tích tam giác $B'AB$ bằng $2a^2$. Tính khoảng cách giữa điểm B' và mặt phẳng $(C'BD)$ là:

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. B. $2a\sqrt{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp cổ điển

Gọi $O=AC\cap BD$; $I=B'C\cap BC'$

Do $B'C\cap(C'BD)=I \Rightarrow \dfrac{d\left(B',(C'BD)\right)}{d\left(C,(C'BD)\right)}=\dfrac{IB'}{IC}=1$

$\Rightarrow d\left(B',(C'BD)\right)=d\left(C,(C'BD)\right)$

Kẻ $CH\perp C'O$

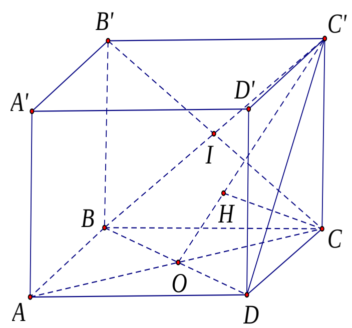
Ta có: $CH\perp(C'BD)\Rightarrow d\left(C,(C'BD)\right)=CH$

Đặt $AB=x$

Có $S_{\Delta B'A'B}=\frac{1}{2}x^2=2a^2\Rightarrow x=2a$

Có $\dfrac{1}{CH^2}=\dfrac{1}{CO^2}+\dfrac{1}{CC'^2}\Rightarrow CH=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Khi đó $d\left(B',(C'BD)\right)=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



[Cách 2]: Phương pháp tọa độ

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó :
$C(0;0;0); D(2a;0;0); B(0;2a;0); C'(0;0;2a); B'(0;2a;2a)$

Ta có

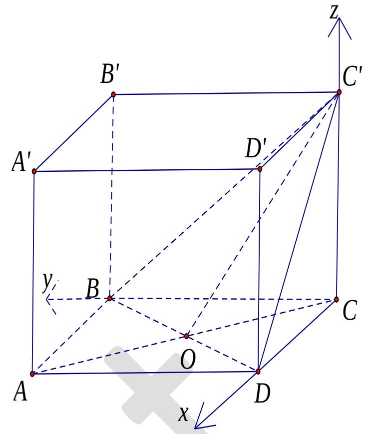
$\overrightarrow{C'B}=(0;-2a;2a); \overrightarrow{C'D}=(-2a;0;2a)$

$\Rightarrow \overrightarrow{C'B}\wedge\overrightarrow{C'D}=(-4a^2;-4a^2;-4a^2)=-4a^2(1;1;1)$

Suy ra $(C'BD)$ nhận $\vec{n}=(1;1;1)$ là VTPT và qua điểm $D(2a;0;0)$

Nên $(C'BD)$ có PT: $x+y+z-2a=0$

Khi đó $d\left(B',(C'BD)\right)=\dfrac{|2a+2a-2a|}{\sqrt{3}}=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.



Câu 40. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a, AD=a\sqrt{2}$, góc tạo bởi đường thẳng $A'C$ và mặt đáy là 60^0 .Gọi I là trung điểm của CD .Tính góc giữa hai đường thẳng BD' và AI

A. $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. B. $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. D. $\arccos\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Phương pháp tích vô hướng

Áp dụng công thức: $\cos\left(BD',AI\right)=\dfrac{\left|\overrightarrow{BD'}.\overrightarrow{AI}\right|}{BD'.AI}$

Ta có : $\left(A'C,(ABCD)\right)=\widehat{A'CA}=60^0$; $AC=a\sqrt{3}$

Trong $\Delta_V A'AC$ có $A'A=AC.\tan 60^0=3a$

Ta có

$\overrightarrow{BD'}.\overrightarrow{AI}=(\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}).(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DI})$

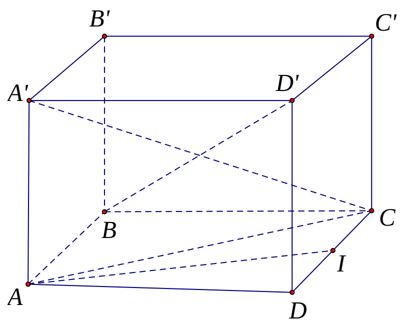
$=(\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}).(\overrightarrow{BC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA})$

$=-\dfrac{1}{2}BA^2+BC^2=\dfrac{3a^2}{2}$

Ta tính được: $BD'=2a\sqrt{3}; AI=\dfrac{3a}{2}$

Khi đó $\cos\left(BD',AI\right)=\dfrac{\left|\dfrac{3a^2}{2}\right|}{2a\sqrt{3}.\dfrac{3a}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

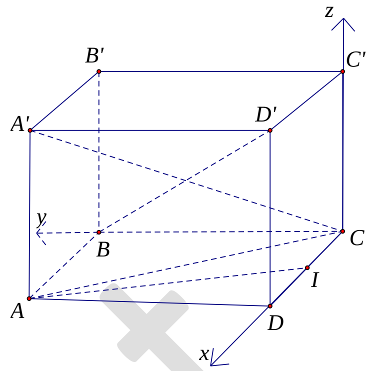
Vậy $\left(BD',AI\right)=\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{6}$



[Cách 2]: Phương pháp tọa độ:

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó ta có

$C(0;0;0); A(a;a\sqrt{2};0); B(0;a\sqrt{3};0); I(\frac{a}{2};0;0); D'(a;0;3a)$



Ta có

$\overrightarrow{BD'} = (a;-a\sqrt{2};3a) \Rightarrow BD' = 2a\sqrt{3}$

$\overrightarrow{AI} = (\frac{a}{2};a\sqrt{2};0) \Rightarrow AI = \frac{3a}{2}$

Khi đó $\cos(BD', AI) = \frac{\left|\overrightarrow{BD'}.\overrightarrow{AI}\right|}{BD'.AI} = \frac{\left|\frac{-3a^2}{2}\right|}{2a\sqrt{3}.\frac{3a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

Vậy: $(BD', AI) = \arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 41. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích là $27cm^3$. Tính tan góc tạo bởi đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$.

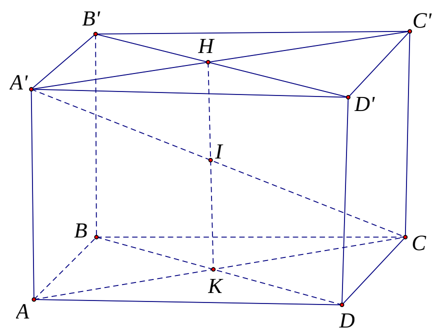
A. $\sqrt{2}$. B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. D. $2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải:

[Cách 1]: Phương pháp cổ điển

Gọi $H = A'C' \cap B'D'; K = AC \cap BD; I = HK \cap A'C$

Ta chứng minh: $AH \perp (BB'D'D); CK \perp (BB'D'D)$



Suy ra HK là hình chiếu vuông góc của $A'C$ lên $(BB'D'D)$

Nên $(A'C,(BB'D'D)) = (A'C, HK) = A'IK$

Đặt $AB = x$

Có thể tích hình lập phương là $27 = x^3 \Rightarrow x = 3cm$

Tính được $AC = 3\sqrt{2}$

Xét tam giác vuông $A'IK$ có $\tan A'IH = \frac{A'H}{IH} = \sqrt{2}$

Vậy góc giữa $A'C$ và mặt phẳng $(BB'D'D)$ là góc α thỏa mãn $\tan\alpha = \sqrt{2}$

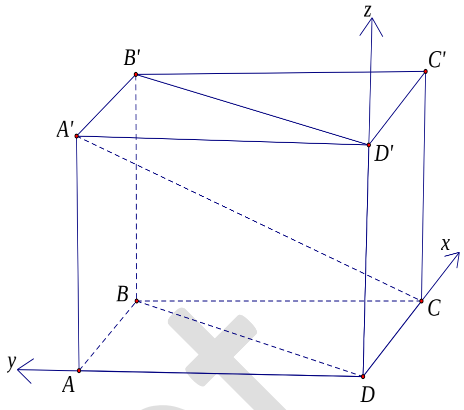
[Cách 2]: Phương pháp tọa độ

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó ta được:
$D(0;0;0); D'(0;0;3) B(3;3;0); C(3;0;0); A'(0;3;3)$

Ta có $\overrightarrow{DB}=(3;3;0); \overrightarrow{DD'}=(0;0;3); \overrightarrow{A'C}=(-3;3;3)$

$\Rightarrow \overrightarrow{DB}\wedge\overrightarrow{DD'}=(9;-9;0)=9(1;-1;0)$

Suy ra $(BB'D'D)$ có VTPT là $\vec{n}=(1;-1;0)$ và $A'C$ có VTCP là $\vec{u}=(-1;1;1)$



Khi đó $\sin\left(A'C,(BB'D'D)\right)=\dfrac{|\vec{n}.\vec{u}|}{|\vec{n}|.|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Đặt $\alpha=\left(A'C,(BB'D'D)\right)$

Do $1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\Rightarrow \cot\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow \tan\alpha=\sqrt{2}$

Câu 42. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a; AD=2a; A'A=4a$. Tính góc tạo bởi mặt phẳng $(C'BD)$ và mặt đáy.

A. $\arccos\dfrac{\sqrt{21}}{21}$. B. $\arccos\dfrac{\sqrt{21}}{42}$ C. $\arccos\dfrac{\sqrt{21}}{22}$. D. $\arccos\dfrac{\sqrt{21}}{12}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp cổ điển

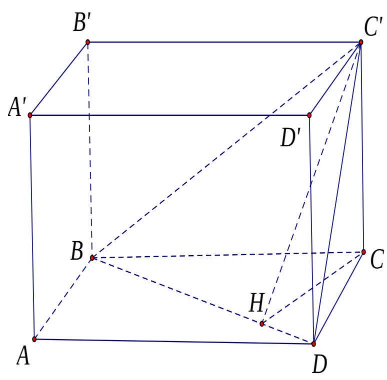
Ta có $BD=(C'BD)\cap(ABCD)$

Kẻ $CH\perp BD$

Ta chứng minh: $BD\perp(C'CH)$

Ta có $\begin{cases}(C'HC)\cap(C'BD)=C'H\\(C'HC)\cap(ABCD)=CH\end{cases}$

$\Rightarrow\left((C'BD),(ABCD)\right)=\left(C'H,CH\right)=C'HC$



Ta có $\dfrac{1}{CH^2}=\dfrac{1}{CD^2}+\dfrac{1}{CB^2}\Rightarrow CH=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$

Trong tam giác vuông $C'HC$ tại C có $\tan C'HC=\dfrac{C'C}{CH}=2\sqrt{5}$

Do $1+\tan^2C'HC=\dfrac{1}{\cos^2C'HC}\Rightarrow \cos C'HC=\dfrac{\sqrt{21}}{21}$

Suy ra $C'HC=\arccos\dfrac{\sqrt{21}}{21}$

Cách 2: Phương pháp tọa độ

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó ta có

$C(0;0;0); D(a;0;0); B(0;2a;0); C'(0;0;4a)$

Ta có $(ABCD) \equiv (Oxy) \Rightarrow (ABCD): z = 0$

Lại có $\overrightarrow{C'B} = (0;2a;-4a); \overrightarrow{C'D} = (a;0;-4a)$

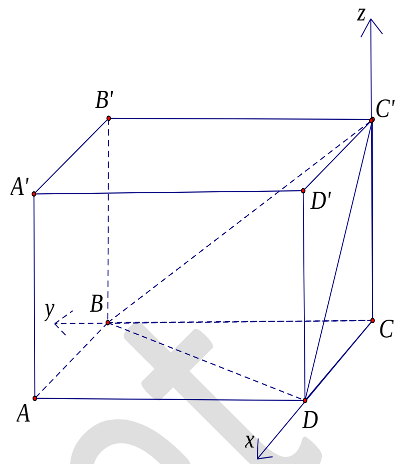
$\Rightarrow \overrightarrow{C'B} \wedge \overrightarrow{C'D} = (-8a^2;-4a^2;-2a^2) = -2a^2(4;2;1)$

Suy ra $(ABCD)$ có VTPT là $\vec{n} = (0;0;1)$

và $(C'BD)$ có VTPT là $\vec{n'} = (4;2;1)$

Khi đó $\cos\left((C'BD),(ABCD)\right) = \dfrac{\left|\vec{n}.\vec{n'}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{n'}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{21}}$

Vậy $\left((C'BD),(ABCD)\right) = \arccos\dfrac{\sqrt{21}}{21}$.



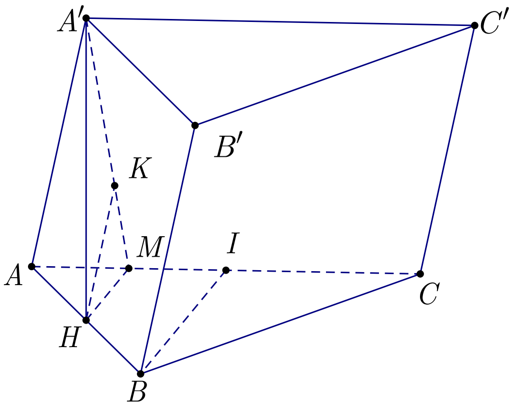
LĂNG TRỤ XIÊN

Câu 43. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh $AB = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng ABC trùng với trung điểm H của cạnh AB. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $ACC'A'$ theo a là:

A. $\dfrac{2\sqrt{15}}{5}a$. B. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}a$. C. $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}a$. D. $\dfrac{\sqrt{39}}{13}a$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình



Ta có: AH là hình chiếu vuông góc của AA' lên ABC nên:

$AA', ABC = AA', AH = 60^0$.

Gọi I là trung điểm của AC và M là trung điểm của IA.

Kẻ $HK \perp A'M$.

Khi đó: $A'H = a\sqrt{3}; BI = a\sqrt{3}; HM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có: $HK \perp ACC'A' \Rightarrow d\ H, ACC'A' = HK$

Xét tam giác $A'HM$ vuông tại H có: $HK = \dfrac{A'H.HM}{\sqrt{A'H^2 + HM^2}} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}a$

Mặt khác: $\dfrac{d\ H, ACC'A'}{d\ B, ACC'A'} = \dfrac{HA}{BA} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow d\ B, ACC'A' = 2HK = \dfrac{2\sqrt{15}}{5}a$.

[Cách 2]: Phương pháp dùng thể tích

Ta có: $d\left(B,\left(ACC'A'\right)\right)=d\left(B,\left(ACA'\right)\right)=\dfrac{3V_{BACA'}}{S_{ACA'}}=\dfrac{V_{ABC.A'B'C'}}{S_{ACA'}}$.

$V_{ABC.A'B'C'}=A'H.S_{ABC}=3a^3$.

$\Delta ACA'$ có:

$AC=2a; AA'=\sqrt{AH^2+A'H^2}=2a;\ A'C=\sqrt{A'H^2+CH^2}=a\sqrt{6}$. Suy ra: $S_{ACA'}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}a^2$.

Vậy $d\left(B,\left(ACC'A'\right)\right)=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}a$.

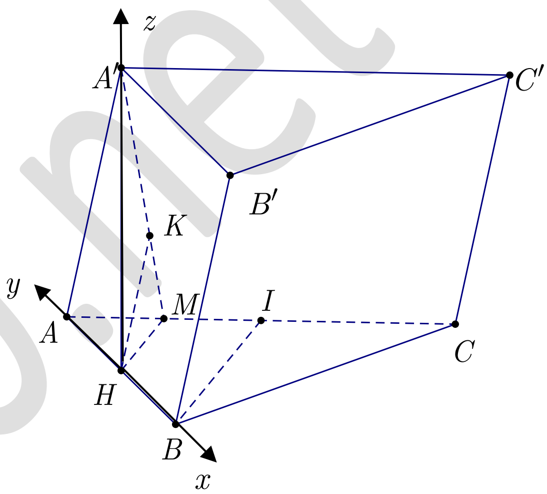
[Cách 3]: Chọn hệ trục tọa độ

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho:

$H\left(0;0;0\right)$, $B\left(a;0;0\right)$, $A\left(-a;0;0\right)$, $C\left(0;a\sqrt{3};0\right)$, $A'\left(0;0;a\sqrt{3}\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{AC}=\left(a;a\sqrt{3};0\right)$; $\overrightarrow{AA'}=\left(a;0;a\sqrt{3}\right)$; $\overrightarrow{AB}=\left(a;a;0\right)$.

Vậy $d\left(B,\left(ACC'A'\right)\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AA'}\right]\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AA'}\right]\right|}=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}a$.

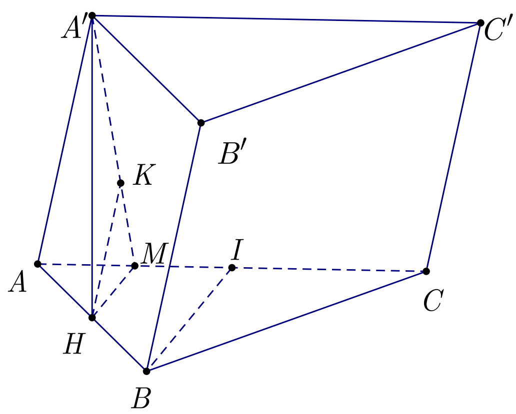


Câu 44. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh $AB=2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ trùng với trung điểm H của cạnh AB. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0. Tính khoảng cách hai đường chéo nhau AC và BB' theo a là:

A. $\dfrac{2\sqrt{15}}{5}a$. B. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}a$. C. $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}a$. D. $\dfrac{\sqrt{39}}{13}a$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình



Ta có: AH là hình chiếu vuông góc của AA' lên $\left(ABC\right)$ nên:

$\left(AA',\left(ABC\right)\right)=\left(AA',AH\right)=60^0$.

Khi đó: $A'H=a\sqrt{3}; BI=a\sqrt{3}; HM=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi I là trung điểm của AC và M là trung điểm của IA.

Kẻ $HK\perp A'M$.

Ta có: $HK\perp\left(ACC'A'\right)\Rightarrow d\left(H,\left(ACC'A'\right)\right)=HK$

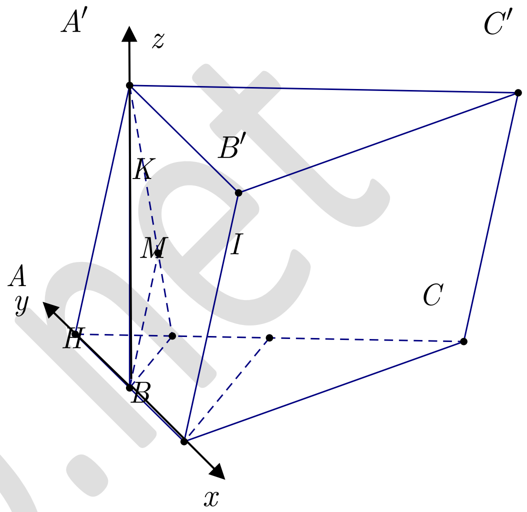
Xét tam giác $A'HM$ vuông tại H có: $HK=\dfrac{A'H.HM}{\sqrt{A'H^2+HM^2}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}a$

Mặt khác: $\dfrac{d\left(H,\left(ACC'A'\right)\right)}{d\left(B,\left(ACC'A'\right)\right)}=\dfrac{HA}{BA}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow d\left(B,\left(ACC'A'\right)\right)=2HK=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}a$

Chọn $AC\subset\left(ACC'A'\right)$ và có $BB'//\left(ACC'A'\right)$.

nên: $d\left(AC,BB'\right)=d\left(BB',\left(ACC'A'\right)\right)=d\left(B,\left(ACC'A'\right)\right)=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}a$.

[Cách 2]: Phương pháp tọa độ



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho:

$H\left(0;0;0\right)$, $B\left(a;0;0\right)$, $A\left(-a;0;0\right)$, $C\left(0;a\sqrt{3};0\right)$, $A'\left(0;0;a\sqrt{3}\right)$

Vì $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AA'}\Rightarrow B'\left(2a;0;a\sqrt{3}\right)$. Ta có:

$\overrightarrow{AC}=\left(a;a\sqrt{3};0\right)$; $\overrightarrow{BB'}=\left(a;0;a\sqrt{3}\right)$; $\overrightarrow{AB}=\left(a;a;0\right)$

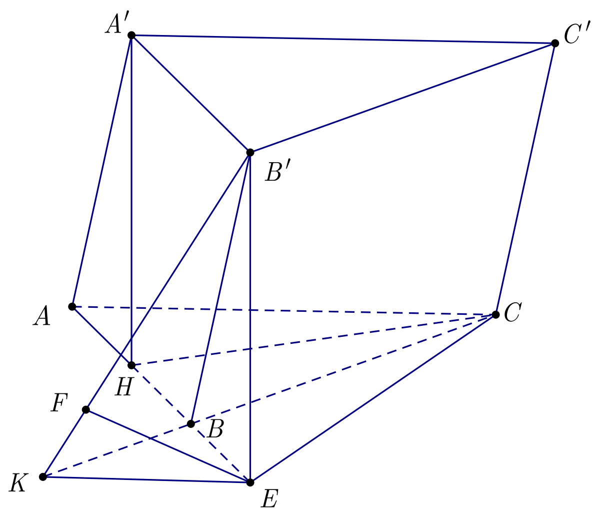
$$d\left(AC,BB'\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BB'}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BB'}\right]\right|}=\frac{2\sqrt{15}}{5}a.$$

Câu 45. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh $AB=2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $\left(ABC\right)$ trùng với trung điểm H của cạnh AB. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0. Tính khoảng cách hai đường chéo nhau BC và AA$'$ theo a là:

A. $\dfrac{2\sqrt{15}}{5}a$. B. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}a$. C. $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}a$. D. $\dfrac{\sqrt{39}}{13}a$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình



Ta có: $AA'//BB'$ nên:

$d\left(AA',BC\right)=d\left(AA',\left(BCC'B'\right)\right)=d\left(A,\left(BCC'B'\right)\right)$

Gọi E là điểm đối xứng với H qua điểm B ta có:

$A'H//B'E$ và $B'E\perp\left(ABC\right)$.

Vì: $\dfrac{d\left(A,\left(BCC'B'\right)\right)}{d\left(\mathrm{E},\left(BCC'B'\right)\right)}=\dfrac{AB}{EB}=2$.

Nên: $d\left(AA',BC\right)=2d\left(E,\left(BCC'B'\right)\right)$.

Kẻ $EK\perp BC$; $EF\perp B'K$.

Chứng minh được:

$EF\perp\left(BCC'B'\right)\Rightarrow d\left(E,\left(BCC'B'\right)\right)=EF$.

Xét tam giác KEB vuông tại K và $KBE = 60^0$ ta có: $EK = BE\sin 60^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

Xét tam giác $B'EK$ vuông tại E ta có: $EF = \dfrac{EK.B'E}{\sqrt{EK^2 + B'E^2}} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}a$.

Vậy $d\ AA',BC\ = 2EF = \dfrac{2\sqrt{15}}{5}a$.

[Cách 2]: Phương pháp dùng thể tích

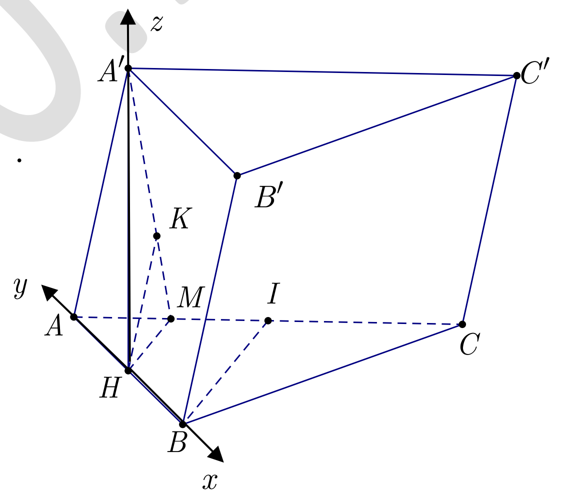
Ta có: $d\ AA',BC\ = d\ AA',\ BCC'B'\ = d\ A,\ BCC'B'\ = d\ A,\ BCB'\ = \dfrac{3V_{ABCB'}}{S_{BCB'}} = \dfrac{V_{ABC.A'B'C'}}{S_{BCB'}}$

$V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{ABC} = 3a^3$.

$\Delta BCB'$ có: $BC = 2a; BB' = AA' = \sqrt{AH^2 + A'H^2} = 2a; B'C = \sqrt{B'E^2 + CE^2} = a\sqrt{6}$.

Suy ra: $S_{BCB'} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}a^2$. Vậy $d\ AA',BC\ = \dfrac{2\sqrt{15}}{5}a$.

[Cách 3]: Chọn hệ trục tọa độ



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho:

$H\ 0;0;0\ ,\ B\ a;0;0\ , A\ -a;0;0\ , C\ 0;a\sqrt{3};0\ , A'\ 0;0;a\sqrt{3}\ $.

Ta có:

$\overrightarrow{BC} = \ -a;a\sqrt{3};0\ ;\ \overrightarrow{AA'} = \ a;0;a\sqrt{3}\ ;\ \overrightarrow{AB} = \ a;a;0$

Vậy $d\ AA',BC\ = \dfrac{\left|\ \overrightarrow{AA'} \wedge \overrightarrow{BC}\ .\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\ \overrightarrow{AA'} \wedge \overrightarrow{BC}\ \right|} = \dfrac{2\sqrt{15}}{5}a$.

Câu 46. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh $AB = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng ABC trùng với trung điểm H của cạnh AB. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AC và BB'. Khi đó $\cos\varphi$:

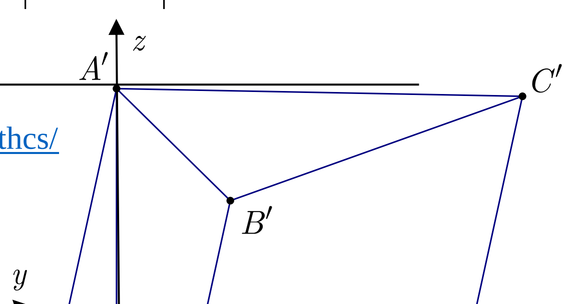
A. $\cos\varphi = \dfrac{1}{4}$. B. $\cos\varphi = \dfrac{1}{3}$. C. $\cos\varphi = \dfrac{2}{5}$. D. $\cos\varphi = \dfrac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp cổ điển

Ta có: $BB' // AA'$ nên: $\cos\ AC,BB'\ = \cos\ AC,AA'\ = \left|\cos A'AC\right|$

Tính được: $AA' = 2a$, $AC = 2a, A'C = a\sqrt{6}$



Áp dụng định lý cosin trong tam giác $A'AC$ ta được:

$A'C^2 = A'A^2 + AC^2 - 2A'A.AC.\cos A'AC$

$\Rightarrow \cos A'AC = \dfrac{1}{4}$.

Vậy $\cos\varphi = \dfrac{1}{4}$.

[Cách 2]: Phương pháp tọa độ

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho:

$H(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $A(-a;0;0)$, $C(0;a\sqrt{3};0)$, $A'(0;0;a\sqrt{3})$.

Vì $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'} \Rightarrow B'(2a;0;a\sqrt{3})$.

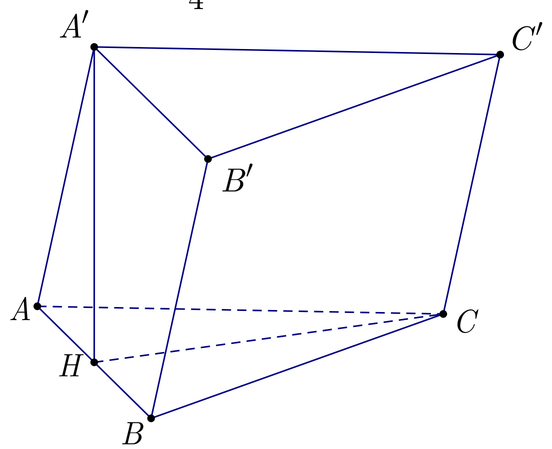
Ta có: $\overrightarrow{AC} = (a;a\sqrt{3};0)$; $\overrightarrow{BB'} = (a;0;a\sqrt{3})$.

Ta có: $\cos(AC,BB') = \dfrac{\left|\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BB'}\right|}{AC.BB'} = \dfrac{1}{4}$. Vậy $\cos\varphi = \dfrac{1}{4}$.

Câu 47. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh $AB = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh AB. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0. Tính góc giữa hai đường thẳng $A'C$ và (ABC) là:

A. $\dfrac{\pi}{4}$. B. $\dfrac{\pi}{6}$. C. $\dfrac{\pi}{3}$. D. $\arcsin\dfrac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải



[Cách 1]: Phương pháp cổ điển

Ta có: $A'H \perp (ABC)$ nên:

CH là hình chiếu vuông góc của $A'C$ lên (ABC)

Khi đó:

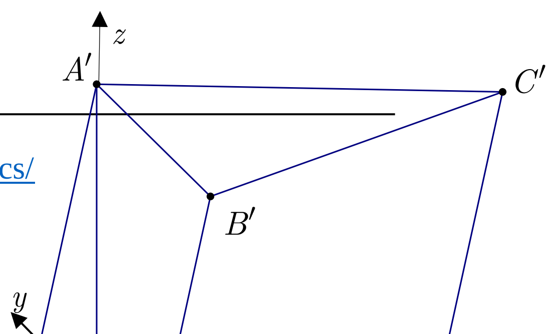
$(A'C,(ABC)) = (A'C,CH) = A'CH$.

Xét tam giác $A'CH$ vuông tại H ta có:

$\tan A'CH = \dfrac{A'H}{CH} = 1$.

Vậy $(A'C,(ABC)) = \dfrac{\pi}{4}$.

[Cách 2]: Phương pháp tọa độ



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho:

$H\ \ 0;0;0\ \ ,\ B\ \ a;0;0\ \ ,A\ \ -a;0;0\ \ ,C\ \ 0;a\sqrt{3};0\ \ ,A'\ \ 0;0;a\sqrt{3}\ \ .$

Mặt phẳng $\ ABC\ \ : z = 0$ có vtpt $\vec{k} = \ \ 0;0;1$

VTCP của đường thẳng $A'C$ là:
$\vec{u} = \overrightarrow{A'C} = a\ \ 0;-\sqrt{3};\sqrt{3}\ \ .$

Khi đó: $\sin\ \ A'C,\ ABC\ \ = \dfrac{\left|\vec{u}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

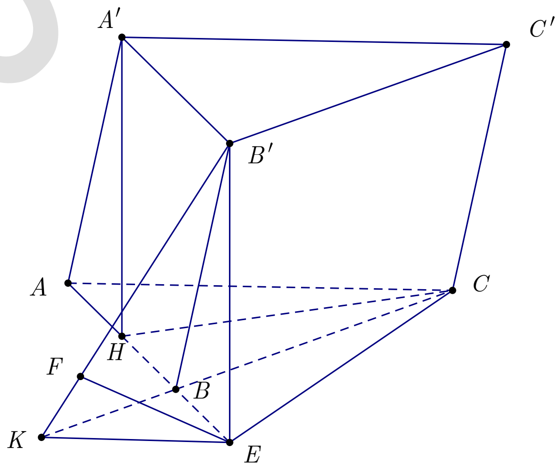
Vậy $\ A'C,\ ABC\ \ = \dfrac{\pi}{4}.$

Câu 48. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy là tam giác đều cạnh $AB = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $\ ABC\ $ trùng với trung điểm H của cạnh AB. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0. Tính góc giữa hai mặt phẳng $\ BCC'B'\ $ và $\ ABC\ $ là:

A. $\arctan 2$. B. $\arctan \dfrac{1}{4}$. C. $\arctan 4$. D. $\arctan \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: [Phương pháp dựng hình]



Gọi E là điểm đối xứng với H qua điểm B ta có:
$A'H // B'E$ và $B'E \perp\ \ ABC$

$\Rightarrow B'E = A'H = a\sqrt{3}$.
Kẻ $EK \perp BC$; $EF \perp B'K$.
Ta có: $BC \perp\ \ B'EK\ \ \Rightarrow BC \perp B'K$.

Khi đó: $\ \ BCC'B'\ \ ,\ ABC\ \ = \ B'K, EK\ \ = B'KE$

Xét tam giác KEB vuông tại K và $KBE = 60^0$ ta có: $EK = BE\sin 60^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

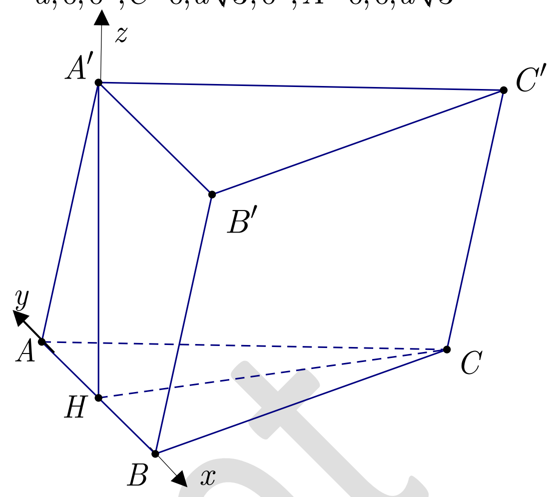
Xét tam giác $B'EK$ vuông tại E có:

$\tan B'KE = \dfrac{B'E}{EK} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = 2.$

Vậy $\ \ BCC'B'\ \ ,\ ABC\ \ = \arctan 2$.

Cách 2: [Phương pháp tọa độ]

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: $H(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $A(-a;0;0)$, $C(0;a\sqrt{3};0)$, $A'(0;0;a\sqrt{3})$



Mặt phẳng $(ABC): z=0$ có vtpt $\vec{k}=(0;0;1)$.

Mặt phẳng (BCB') có vtpt:

$\vec{n}=\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BB'}=a^2\sqrt{3}(\sqrt{3};1;-1)$.

$$\cos\left((BCC'B'),(ABC)\right)=\frac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$\Rightarrow \tan\left((BCC'B'),(ABC)\right)=2$.

Vậy $\left((BCC'B'),(ABC)\right)=\arctan 2$.

Câu 49. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a, AC=2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30^0. Tính khoảng cách từ điểm C' đến $(ABB'A')$ là:

A. $\frac{2\sqrt{85}}{17}a$. B. $\frac{\sqrt{5}}{5}a$. C. $\frac{3\sqrt{5}}{2}a$. D. $\frac{2\sqrt{13}}{3}a$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: [Phương pháp dựng hình]

Tam giác ABC vuông tại A có: $S_{ABC}=a^2$.

$BC=a\sqrt{5}$; $AH=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Vì $A'H\perp(ABC)$ nên AH là hình chiếu vuông góc của AA' lên (ABC), khi đó:

$\left(AA',(ABC)\right)=\left(AA',A'H\right)=30^0$.

Suy ra, $A'H=AH.\tan 30^0=\frac{\sqrt{15}}{6}a$.

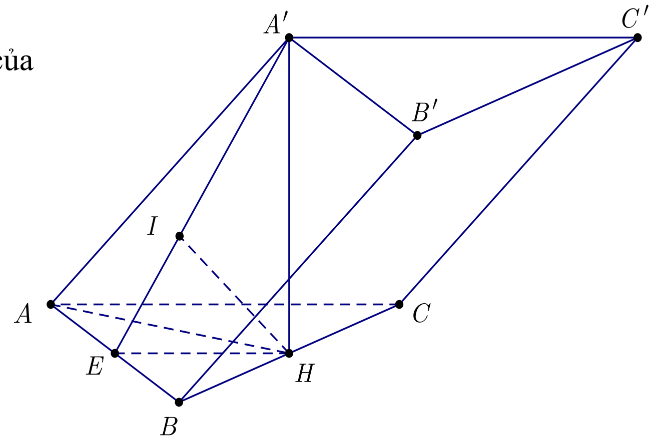
Ta có: $CC'\parallel BB'$ nên:

$d\left(C',(ABB'A')\right)=d\left(C,(ABB'A')\right)$.

Vì: $\frac{d\left(C,(ABB'A')\right)}{d\left(H,(ABB'A')\right)}=\frac{CB}{CH}=2$.

Nên: $d\left(C',(ABB'A')\right)=2d\left(H,(ABB'A')\right)$.

Kẻ $HE\perp AB$; $HI\perp A'E$.



Chứng minh được: $IH\perp(ABB'A')\Rightarrow d\left(H,(ABB'A')\right)=IH$. Ta có: $EH=\frac{AC}{2}=a$

Xét tam giác $A'EH$ vuông tại H ta có: $IH = \dfrac{EH.A'H}{\sqrt{EH^2 + A'H^2}} = \dfrac{\sqrt{85}}{17}a$

Vậy $d\ C',\ ABB'A' \ = 2IH = \dfrac{2\sqrt{85}}{17}a$.

[Cách 2]: Phương pháp dùng thể tích

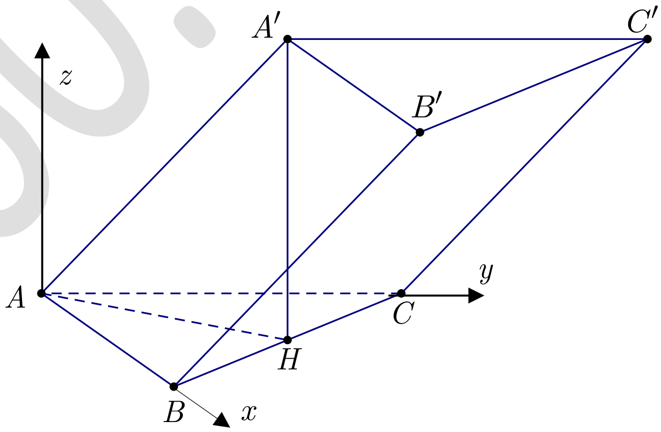
Ta có: $d\ C',\ ABB'A' \ = d\ C,\ ABB'A' \ = d\ C',\ ABA' \ = \dfrac{3V_{C'ABA'}}{S_{ABA'}} = \dfrac{V_{ABC.A'B'C'}}{S_{ABA'}}$.

$V_{ABC.A'B'C'} = A'H.S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{15}}{6}a^3$

$\Delta A'AB$ có: $AB = a; AA' = \sqrt{AH^2 + A'H^2} = \dfrac{\sqrt{15}}{3}a; A'B = \sqrt{A'H^2 + BH^2} = \dfrac{\sqrt{15}}{3}a$.

Suy ra: $S_{ABA'} = \dfrac{\sqrt{51}}{12}a^2$. Vậy $d\ C',\ ABB'A' \ = \dfrac{2\sqrt{85}}{17}a$.

[Cách 3]: Phương pháp tọa độ



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho:

$A\ 0;0;0\ ,\ B\ a;0;0\ , C\ 0;2a;0\ ,$

$H\left(\dfrac{a}{2};a;0\right), A'\left(\dfrac{a}{2};a;\dfrac{\sqrt{15}}{6}a\right)$.

Vì $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'} \Rightarrow C'\left(\dfrac{a}{2};3a;\dfrac{\sqrt{15}}{6}a\right)$.

Phương trình mặt phẳng $ABB'A'$ là:

$\sqrt{15}.y - 6z = 0$.

Vậy $d\ C',\ ABB'A' \ = d\ C,\ ABB'A' \ = d\ C',\ ABA' \ = \dfrac{2\sqrt{85}}{17}a$.

Câu 50. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng ABC trùng với trung điểm H của cạnh BC. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30^0. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AA' và BC là:

A. $\dfrac{\sqrt{6}}{4}a$. B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$. C. $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}a$. D. $\dfrac{5\sqrt{29}}{7}a$.

Hướng dẫn giải

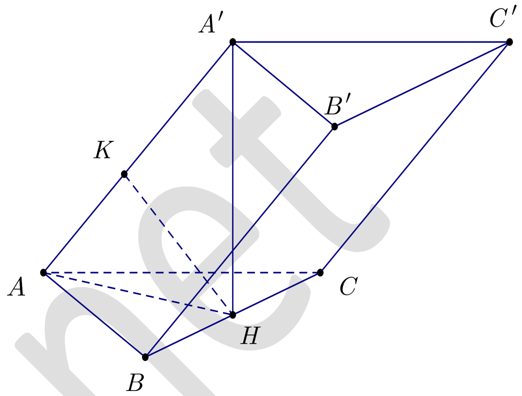
Cách 1: [Phương pháp dựng hình]

Tam giác ABC vuông cân tại A có: $S_{ABC} = \dfrac{3}{2}a^2$.

$BC = a\sqrt{6}$; $AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

Vì $A'H \perp (ABC)$ nên AH là hình chiếu vuông góc của AA' lên (ABC), khi đó:

$\widehat{(AA', (ABC))} = \widehat{(AA', A'H)} = 30^0$.



Suy ra, $A'H = AH.\tan 30^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

Kẻ $HK \perp AA'$, ta có: $HK \perp AA'$ nên: $HK \perp AA'$.

Suy ra, $d(AA', BC) = HK$.

Xét tam giác $A'AH$ vuông tại H có:

$$HK = \frac{AH.A'H}{\sqrt{AH^2 + A'H^2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}a.$$

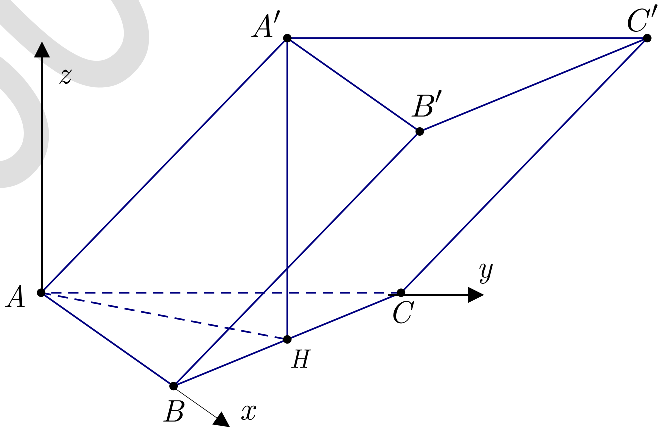
Vậy $d(AA', BC) = \dfrac{\sqrt{6}}{4}a$.

[Cách 2]: Phương pháp tọa độ

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho:

$A(0;0;0)$, $B(a\sqrt{3};0;0)$, $C(0;a\sqrt{3};0)$,

$$H\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), A'\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}a\right).$$



Ta có: $\overrightarrow{AA'} = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)$;

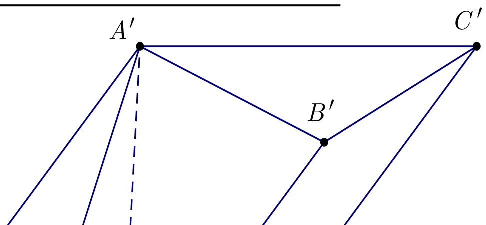
$\overrightarrow{BC} = (-a\sqrt{3};a\sqrt{3};0)$; $\overrightarrow{AB} = (a\sqrt{3};0;0)$

$$\text{Vậy } d(AA', BC) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AA'} \wedge \overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AA'} \wedge \overrightarrow{BC}\right]\right|} = \frac{\sqrt{6}}{4}a.$$

Câu 51. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt đáy ABC là tam giác đều cạnh $AB = 2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm G của tam giác ABC, biết $AA' = 3a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và (ABC) là:

A. $\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{12}$. B. $\arccos\dfrac{1}{3}$. C. $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{5}$. D. $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Hướng dẫn giải



Cách 1: [Phương pháp dựng hình]

Tính được: $AI = a\sqrt{3}$; $AG = AI = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$

Kẻ $GE \perp AB$. Ta có: $AB \perp A'E$

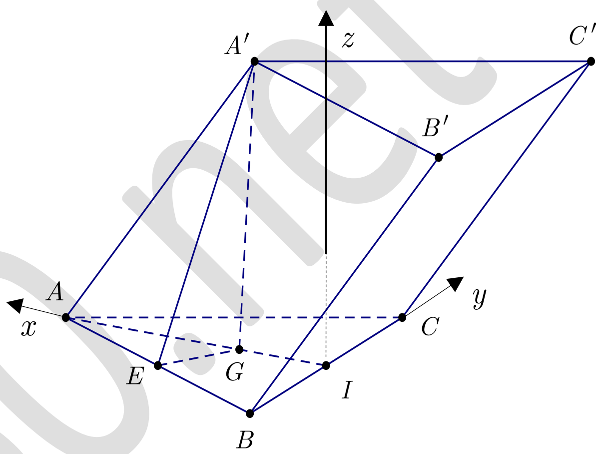
$EG = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$; $A'G = \sqrt{A'A^2 - AG^2} = \dfrac{\sqrt{69}}{3}a$

Vậy $\left((ABB'A'),(ABC)\right) = (A'E,EG) = \widehat{A'EG}$

Xét tam giác $A'EG$ vuông tại G ta được:

$\tan \widehat{A'EG} = \dfrac{A'G}{EG} = \sqrt{23} \Rightarrow \cos \widehat{A'EG} = \dfrac{\sqrt{6}}{12}$

Vậy $\left((ABB'A'),(ABC)\right) = \arccos \dfrac{\sqrt{6}}{12}$.



[Cách 2]: Phương pháp tọa độ

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho:

$I(0;0;0)$, $A(0;a\sqrt{3};0)$, $C(a;0;0)$, $B(-a;0;0)$,

$G\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{3};0\right)$, $A'\left(0;\dfrac{a\sqrt{3}}{3};\dfrac{\sqrt{69}}{3}a\right)$.

Mặt phẳng $(ABC): z = 0$ có vtpt $\vec{k} = (0;0;1)$

Mặt phẳng $(ABB'A')$ có vtpt $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}\right] = a^2\left(-\sqrt{23};\dfrac{\sqrt{69}}{3};\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ nên:

$$\cos\left((ABB'A'),(ABC)\right) = \frac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

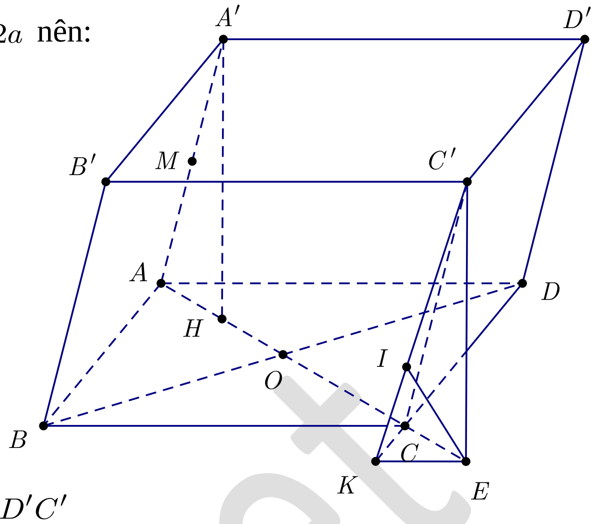
Vậy $\left((ABB'A'),(ABC)\right) = \arccos \dfrac{\sqrt{6}}{12}$.

Câu 52. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O có $AB = a, BC = 2a$. Gọi H, M lần lượt là trung điểm của OA, AA'. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với điểm H. Biết góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60^0. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(CDD'C')$:

A. $\dfrac{2\sqrt{285}}{19}a$.   B. $\dfrac{2\sqrt{85}}{17}a$.   C. $\dfrac{2\sqrt{29}}{13}a$.   D. $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}a$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: [Phương pháp dựng hình]



Do $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O có $AB = a, BC = 2a$ nên:

$AC = a\sqrt{5}$; $OA = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$; $OH = \dfrac{a\sqrt{5}}{4}$

Ta có: $A'H \perp (ABCD)$

Nên AH là hình chiếu vuông góc của AA' lên $(ABCD)$, suy ra:

$$\left(AA', (ABCD)\right) = \left(AA', AH\right) = A'AH = 60^0$$

$$A'H = AH.\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{15}}{4}$$

Vì $AA' // (CDD'C')$ nên: $d\left(M, (CDD'C')\right) = d\left(A, (CDD'C')\right)$

Dựng hình bình hành $A'HEC'$ ta có: $C'E \perp (ABCD)$, $C'E = A'H$ và $\dfrac{d\left(A, (CDD'C')\right)}{d\left(E, (CDD'C')\right)} = \dfrac{AC}{EC} = 4$.

Suy ra, $d\left(A, (CDD'C')\right) = 4.d\left(E, (CDD'C')\right)$.

Ta có: $KE // AD$ và $AC = 4CE$ nên tính được: $KE = \dfrac{a}{2}$.

Xét tam giác $C'KE$ vuông tại E có: $IE = \dfrac{KE.C'E}{\sqrt{KE^2 + C'E^2}} = \dfrac{\sqrt{285}}{38}a$.

Vậy $d\left(M, (CDD'C')\right) = \dfrac{2\sqrt{285}}{19}a$.

[Cách 2]: Phương pháp dùng thể tích

Ta có: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.A'H = \dfrac{\sqrt{15}}{2}a^3$.

$d\left(M, (CDD'C')\right) = d\left(A, (CDD'C')\right) = d\left(A, (CDC')\right) = \dfrac{3V_{ACDC'}}{S_{CDC'}} = \dfrac{V_{ABCD.A'B'C'D'}}{2S_{CDC'}}$.

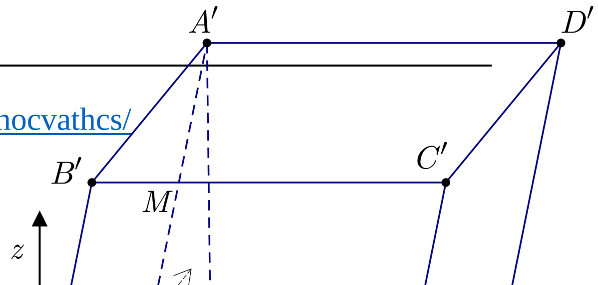
Xét tam giác CDC' ta có: $CD = a$, $CC' = AA' = \sqrt{A'H^2 + AH^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}a$.

$C'D = \sqrt{C'E^2 + ED^2} = \sqrt{C'E^2 + KD^2 + KE^2} = \dfrac{\sqrt{11}}{2}a$.

Suy ra, $S_{CDC'} = \dfrac{\sqrt{19}}{8}a^2$.

Vậy $d\left(M, (CDD'C')\right) = \dfrac{2\sqrt{285}}{19}a$.

[Cách 3]: Chọn hệ trục tọa độ



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho:

$B\ \ 0;0;0\ \ ,\ A\ \ 0;a;0\ \ ,C\ \ 2a;0;0\ \ ,$

$D\ \ 2a;a;0\ \ ,H\left(\frac{a}{2};\frac{3a}{4};0\right).$

A

$A'\left(\frac{a}{2};\frac{3a}{4};\frac{\sqrt{15}}{4}a\right),M\left(\frac{a}{4};\frac{7a}{8};\frac{\sqrt{15}}{8}a\right).$

Vì $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AA'}\Rightarrow C'\left(\frac{5a}{2};-\frac{a}{4};\frac{\sqrt{15}}{4}a\right);$

Ta có: $\overrightarrow{CD}=\ \ 0;a;0\ \ ;\ \overrightarrow{CC'}=\left(\frac{a}{2};-\frac{a}{4};\frac{\sqrt{15}}{4}a\right);\ \overrightarrow{MC}=\left(\frac{7a}{4};-\frac{7a}{8};-\frac{\sqrt{15}}{8}a\right).$

Vậy $d\ \ M,\ CDD'C'\ \ =\frac{\left|\overrightarrow{CD}\wedge\overrightarrow{CC'}\ \ \overrightarrow{MC}\right|}{\left|\overrightarrow{CD}\wedge\overrightarrow{CC'}\right|}=\frac{2\sqrt{285}}{19}a.$

CHỦ ĐỀ TỔNG HỢP

Câu 53. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, đỉnh S cách đều các điểm A,B,C. Biết $AC=2a,\ BC=a$, góc giữa đường thẳng SB và $mp\left(ABC\right)$ bằng 60^0. Tính khoảng cách từ trung điểm M của SC đến $mp\left(SAB\right)$ theo a.

A. $\frac{a\sqrt{39}}{13}$. B. $\frac{3a\sqrt{13}}{13}$. C. $\frac{a\sqrt{39}}{26}$. D. $\frac{a\sqrt{13}}{26}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình

Gọi hình chiếu của S xuống mặt phẳng $\left(ABC\right)$ là H. Suy ra $SH\perp\left(ABC\right)$.

Ta có : S cách đều các điểm A,B,C nên $SA=SB=SC$.

Vì $\Delta SHA=\Delta SHB=\Delta SHC$ (tam giác vuông có cạnh huyền bằng nhau)

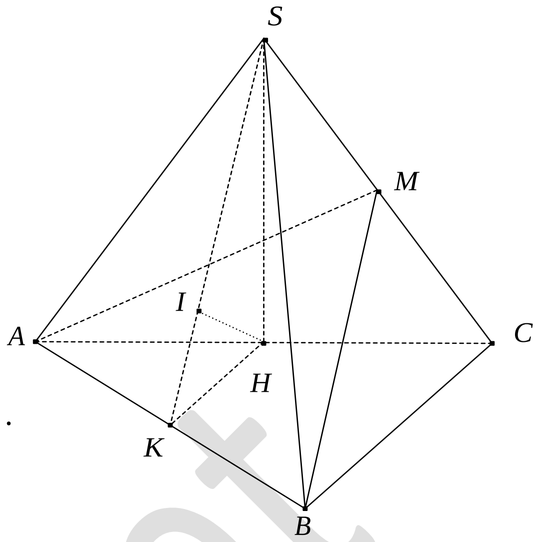
nên $HA=HB=HC$ hay H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Mà ΔABC vuông tại B nên H là trung điểm AC.

M là trung điểm của SC nên $d\left(M,\left(SAB\right)\right)=\frac{1}{2}d\left(C,\left(SAB\right)\right)=d\left(H,\left(SAB\right)\right)$

Gọi K là trung điểm $AB\Rightarrow HK\perp AB$.

Kẻ $HI\perp SK$ tại I.



Ta có : $\begin{cases} AB \perp SH \\ AB \perp HK \\ HK \cap SH = \{K\} \\ HK, SH \subset (SHK) \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHK)$.

Mà $HI \subset (SHK)$ nên $AB \perp HI$.

Lại có : $\begin{cases} HI \perp SK \\ HI \perp AB \\ SK \cap AB = \{K\} \\ SK, AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow HI \perp (SAB) \Rightarrow d(H,(SAB)) = HI$.

Góc giữa đường thẳng SB và $mp(ABC)$ bằng góc nhọn $SBH = 60^0$.

Ta có $HB = \frac{1}{2}AC = a$; $HK = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$.

Xét $\Delta SHB : SH = \tan 60^0.HB = a\sqrt{3}$.

Xét ΔSHK vuông tại H suy ra $\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{4}{a^2} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Vậy $d(M,(SAB)) = HI = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

[Cách 2]: Phương pháp dùng thể tích

Ta có : $d(M,(SAB)) = \frac{3V_{MSAB}}{S_{\Delta SAB}}$.

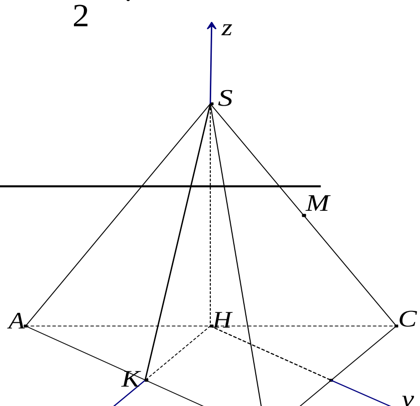
Tam giác ABC vuông tại B $\Rightarrow AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Mặt khác : $\frac{V_{SAMB}}{V_{SABC}} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{SAMB} = \frac{1}{2}V_{SABC}$.

Lại có : $V_{SABC} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}SH.\frac{1}{2}AB.BC = \frac{1}{6}a\sqrt{3}.a\sqrt{3}.a = \frac{a^3}{2} \Rightarrow V_{SAMB} = \frac{1}{2}V_{SABC} = \frac{a^3}{4}$.

Tam giác SHK vuông tại H nên $SK = \sqrt{SH^2 + HK^2} = \sqrt{3a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$.

Do đó : $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}SK.AB = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{13}}{2}.a\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{39}}{4}$.



Vậy : $d\left(M,(SAB)\right)=\dfrac{3V_{MSAB}}{S_{\Delta SAB}}=\dfrac{a\sqrt{39}}{13}$.

[Cách 3]: Phương pháp toạ độ.

Chọn hệ trục toạ độ Oxyz như hình vẽ.

Khi đó $H\equiv O(0;0;0)$, $K\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$, $S\left(0;0;a\sqrt{3}\right)$

$A\left(-\dfrac{a}{2};-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $M\left(-\dfrac{a}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

Suy ra: $\overrightarrow{KS}=\left(-\dfrac{a}{2};0;a\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{KA}=\left(-a;-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $\overrightarrow{KM}=\left(-\dfrac{3a}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{4};\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)$.

Vậy $d\left(M,(SAB)\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{KS},\overrightarrow{KA}\right].\overrightarrow{KM}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{KS},\overrightarrow{KA}\right]\right|}=\dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$.

Câu 54. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a, $ABC=60^0$, $SA=SB=SC=2a$. Tính khoảng cách giữa AB và SC

A. $\dfrac{a\sqrt{11}}{4}$. B. $\dfrac{a\sqrt{11}}{12}$. C. $\dfrac{a^2\sqrt{11}}{8}$. D. $\dfrac{3a\sqrt{11}}{4}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình

ΔABC có $AB=BC,\ ABC=60^0$ nên ΔABC đều

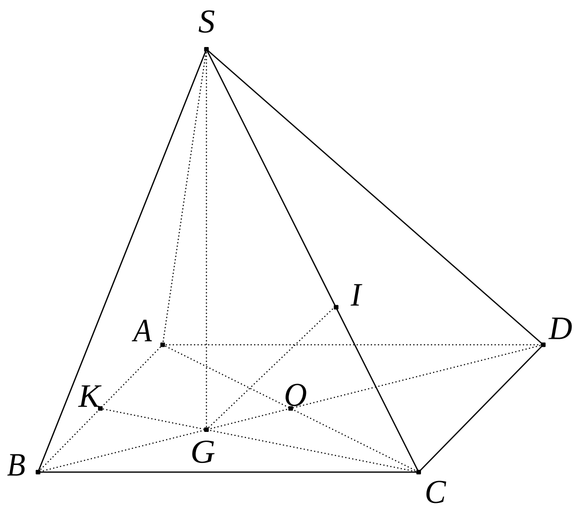
Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, K là trung điểm của AB.

Ta có : $SA=SB=SC$ nên $SG\perp(ABCD)$.

Mặt khác: $AB//(SCD)\Rightarrow d(AB,SC)=d\left(AB,(SCD)\right)=d\left(B,(SCD)\right)=\dfrac{3}{2}d\left(G,(SCD)\right)$.

Vì G là trọng tâm ΔABC đều nên $CG\perp AB$ hay $CG\perp CD$.

Kẻ $GI\perp SC$



Ta có: $\begin{cases} CD\perp SG \\ CD\perp CG \\ SG\cap CG=\{G\} \\ SG,CG\subset(SCG) \end{cases}\Rightarrow CD\perp(SGC)$.

mà $GI\subset(SGC)$ nên $CD\perp GI$.

Lại có $\begin{cases} GI\perp SC \\ GI\perp DC \\ SC\cap CD=\{C\} \\ SC,CD\subset(SCD) \end{cases}\Rightarrow GI\perp(SCD)$

hay $d\left(G,\left(SCD\right)\right)=GI$.

ΔABC đều có cạnh bằng a nên $CG=\frac{2}{3}CK=\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác SGC vuông tại G suy ra $SG=\sqrt{SC^2-GC^2}=\sqrt{4a^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$.

$\frac{1}{GI^2}=\frac{1}{SG^2}+\frac{1}{GC^2}\Rightarrow GI=\frac{a\sqrt{11}}{6}$.

Vậy $d\left(AB,SC\right)=\frac{3}{2}d\left(G,\left(SCD\right)\right)=\frac{3}{2}\frac{a\sqrt{11}}{6}=\frac{a\sqrt{11}}{4}$.

[Cách 2]: Phương pháp dùng thể tích

$AB//\left(SCD\right)\Rightarrow d\left(AB,SC\right)=d\left(AB,\left(SCD\right)\right)=d\left(B,\left(SCD\right)\right)=\frac{3V_{BSCD}}{S_{\Delta SCD}}$.

Tam giác SGC vuông tại G suy ra $SG=\sqrt{SC^2-GC^2}=\sqrt{4a^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}}$.

Tam giác ABC đều có cạnh bằng a nên: $OC=\frac{a}{2}$, $OB=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

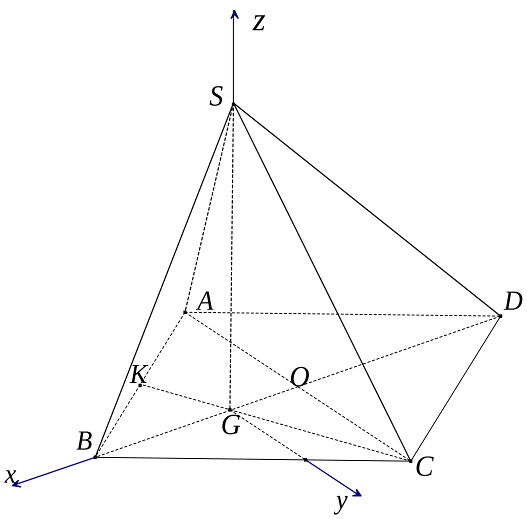
Tam giác BCO vuông tại O : $S_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}OC.BD=\frac{1}{2}.\frac{a}{2}.a\sqrt{3}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Do đó: $V_{SBCD}=\frac{1}{3}SG.S_{\Delta BCD}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{11}}{12}$.

Ta có: $\begin{cases} CD\perp SG \\ CD\perp CG \\ SG\cap CG=\{G\} \\ SG,CG\subset\left(SCG\right)\end{cases}\Rightarrow CD\perp\left(SGC\right)\Rightarrow CD\perp SC$.

Tam giác SCD vuông tại C : $S_{\Delta SCD}=\frac{1}{2}SC.CD=\frac{1}{2}.2a.a=a^2$.

Vậy $d\left(AB,SC\right)=\frac{3V_{BSCD}}{S_{\Delta SCD}}=\frac{a\sqrt{11}}{4}$.



[Cách 3]: Phương pháp toạ độ.

Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ trong đó:

$G\left(0;0;0\right)$, $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{3};0;0\right)$, $S\left(0;0;\frac{a\sqrt{33}}{3}\right)$, $C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};\frac{a}{2};0\right)$, $D\left(-\frac{2a\sqrt{3}}{3};0;0\right)$

Suy ra: $\overrightarrow{CS}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{6};-\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{33}}{3}\right)$, $\overrightarrow{CD}=\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};0\right)$

$$\overrightarrow{CB}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};0\right)$$

Suy ra: $d\left(AB,SC\right)=d\left(B,\left(SCD\right)\right)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CS}\right].\overrightarrow{CB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CS}\right]\right|}=\dfrac{a\sqrt{11}}{4}$.

Câu 55. Cho tứ diện $OABC$ có $OA,\ OB,\ OC$ đôi một vuông góc và $OA=OB=OC=a$, I là trung điểm của BC. Tính góc giữa hai đường thẳng AI và OB.

A. $\arctan\sqrt{5}$. B. $\arctan 5$. C. $\arctan\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. D. $\arctan\dfrac{1}{5}$.

Hướng dẫn giải

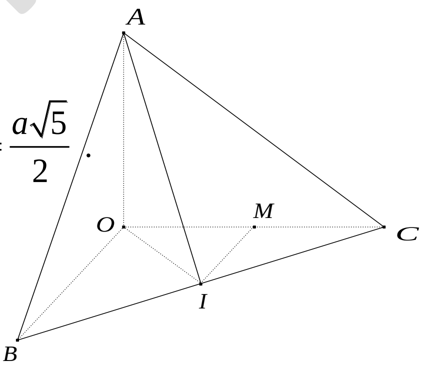
[Cách 1]: Phương pháp dựng hình

Gọi M là trung điểm của OC. Ta có $IM//OB$

Nên góc giữa AI và OB là góc giữa AI và IM và bằng góc AIM

Ta có : $\begin{cases}OB\perp OC\\ OB\perp OA\end{cases}\Rightarrow OB\perp\left(OAC\right)$ mà $IM//OB$ nên $IM\perp\left(OAC\right)$.

Lại có $AM\subset\left(OAC\right)$ nên $IM\perp AM$.



Xét tam giác AIM vuông tại M nên ta có:

$IM=\frac{1}{2}OB=a$; $AM^2=AO^2+OM^2=a^2+\frac{a^2}{4}=\frac{5a^2}{4}\Rightarrow AM=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

$\tan AIM=\frac{AM}{IM}=\sqrt{5}\Rightarrow AIM=\arctan\sqrt{5}$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng AI và OB bằng $\arctan\sqrt{5}$.

[Cách 2]: Phương pháp dùng tích vô hướng

Ta có: $\cos\left(AI,OB\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{OB}\right)\right|$

Ta xét: $\cos\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{OB}}{AI.OB}$

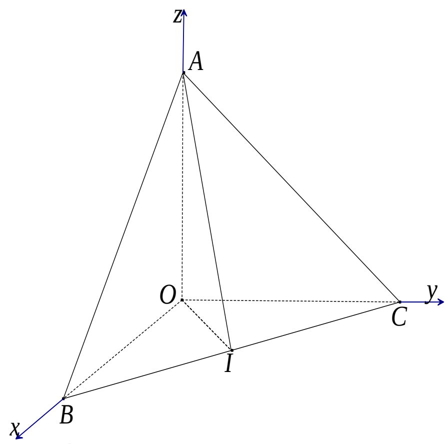
Có: $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{OB}=\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OI}\right)\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OB}=OI.OB.\cos\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.a.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{a^2}{2}$

Do đó: $\cos\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{OB}}{AI.OB}=\dfrac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.a}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\Rightarrow\cos\left(AI,OB\right)=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\Rightarrow\tan\left(AI,OB\right)=\sqrt{5}$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng AI và OB bằng $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{6}}=\arctan\sqrt{5}$

[Cách 3]: Phương pháp toạ độ.

Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ:



Ta có: $O(0;0;0)$, $A(0;0;a)$, $B(a;0;0)$, $C(0;a;0)$, $I\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$

Suy ra: $\overrightarrow{AI}=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};-a\right)$; $\overrightarrow{OB}=(a;0;0)$

$\cos(AI,OB)=\left|\cos\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{OB}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{OB}\right|}{AI.OB}=\frac{1}{\sqrt{6}}\Rightarrow\tan\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{OB}\right)=\sqrt{5}$

Vậy góc giữa hai đường thẳng AI và OB bằng $\arctan\sqrt{5}$.

Câu 56. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, cạnh bên bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB và CD. Tính góc giữa MN và mặt phẳng (SAC).

A. $\arctan 2\sqrt{2}$.   B. $\arctan 2$.   C. $\arctan\sqrt{2}$.   D. $\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}$.

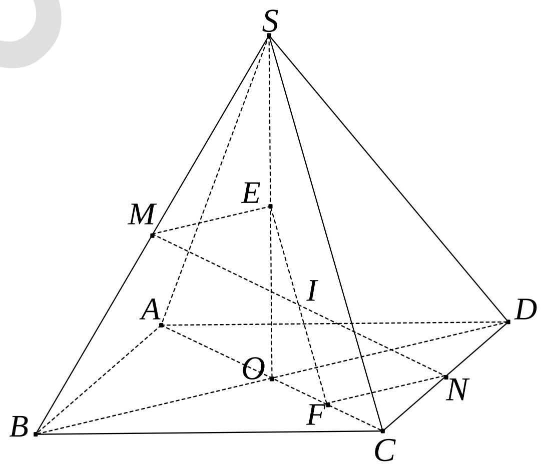
Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SO, OC

Vì hình chóp $SABCD$ đều, O là tâm của đáy $ABCD$ nên $SO\perp(ABCD)$.

Lại có $ABCD$ là hình vuông nên $BD\perp AC$.



Ta có $\begin{cases}BD\perp AC\\BD\perp SO\\SO\cap AC=\{O\}\\SO,AC\subset(SAC)\end{cases}\Rightarrow BD\perp(SAC)$.

Ta có : $\begin{cases}ME//BD\\BD\perp(SAC)\end{cases}\Rightarrow ME\perp(SAC)$.

Lại có : $NF\perp(SAC)$

Do đó : Hình chiếu của MN lên mặt phẳng (SAC) là EF.

Nên góc giữa MN và mặt phẳng (SAC) là góc giữa MN và EF bằng góc NIF.

Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh a nên $BD=a\sqrt{2}$.

NF là đường trung bình của tam giác ODC $\Rightarrow NF=\frac{a\sqrt{2}}{4}$

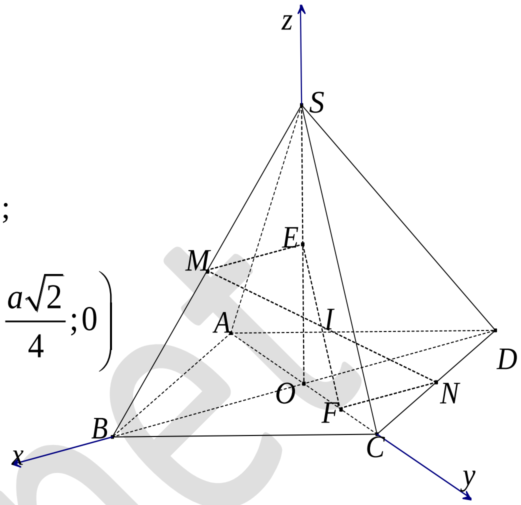
Mặt khác $EF=\frac{1}{2}SC=\frac{a}{2}$.

Tứ giác $MNEF$ là hình bình hành nên hai đường chéo MN, EF cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường

$\Rightarrow FI=\frac{1}{2}EF=\frac{a}{4}$.

Tam giác NFI vuông tại F nên $\tan NIF = \dfrac{FN}{FI} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{4}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow NIF = \arctan 2\sqrt{2}$.

Vậy góc giữa MN và mặt phẳng (SAC) bằng $\arctan 2\sqrt{2}$.



[Cách 3]: Phương pháp toạ độ.

Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ:

Ta có $O(0;0;0)$, $S\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $A\left(0;-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$, $B\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$;

$C\left(0;\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$, $D\left(0;-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$, $M\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4};0;\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)$, $N\left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{4};\dfrac{a\sqrt{2}}{4};0\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\dfrac{a\sqrt{2}}{4};-\dfrac{a\sqrt{2}}{4}\right)$

Véctơ pháp tuyến của (SAC) là: $\vec{n} = \vec{i} = (1;0;0)$

$\sin\left(MN,(SAC)\right) = \left|\cos\left(\overrightarrow{MN},\vec{n}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{MN}.\vec{n}\right|}{MN.\left|\vec{n}\right|} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \tan\left(MN;(SAC)\right) = 2\sqrt{2}$.

Câu 57. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều ABC cạnh a, cạnh bên bằng $2a$ và $A'A = A'B = A'C$. Tính giá trị $\tan\alpha$ với α là góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt phẳng (ABC).

A. $2\sqrt{11}$. B. $2\sqrt{5}$. C. $2a\sqrt{11}$. D. $2a\sqrt{5}$.

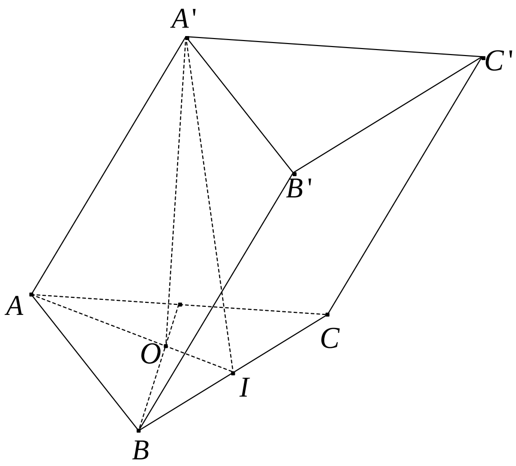
Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình

Gọi O là tâm của đáy ABC. Suy ra $A'O \perp (ABC)$

Gọi I là trung điểm BC. Ta có $AI \perp BC$ (tam giác ABC đều)

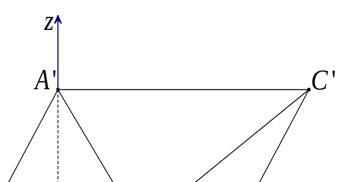
Ta có : $\begin{cases} BC \perp A'O \\ BC \perp AI \\ A'O \cap AI = \{O\} \\ A'O, AI \subset (A'AI) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'AI) \Rightarrow BC \perp A'I$.



Mặt khác : $\begin{cases} (A'BC) \cap (ABC) = BC \\ (ABC): AI \perp BC \\ (A'BC): A'I \perp BC \end{cases}$

Nên góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt phẳng (ABC) bằng góc $A'IA = \alpha$.

Có $OI = \dfrac{1}{3}AI = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $A'O^2 = AA'^2 - AO^2 = (2a)^2 - \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{11a^2}{3} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{A'O}{OI} = 2\sqrt{11}$.



[Cách 2]:Phương pháp toạ độ.

Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ:

$O(0;0;0)$, $A\left(0;-\dfrac{a\sqrt{3}}{3};0\right)$, $B\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{6};0\right)$, $C\left(-\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{6};0\right)$

$A'O=\sqrt{A'A^2-AO^2}=\dfrac{a\sqrt{33}}{3}\Rightarrow A'\left(0;0;\dfrac{a\sqrt{33}}{3}\right)$.

$\overrightarrow{A'B}=\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a\sqrt{3}}{6};-\dfrac{a\sqrt{33}}{3}\right)$; $\overrightarrow{BC}=(-a;0;0)$.

Véctơ pháp tuyến của $(A'BC)$ là: $\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{BC}\right]=\left(0;\dfrac{a^2\sqrt{33}}{3};\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}\right)$.

Véctơ pháp tuyến của (ABC) là: $\vec{n}=\vec{k}=(0;0;1)$.

Ta có: $\cos\alpha=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\vec{n}\right)\right|=\sqrt{\dfrac{3}{135}}\Rightarrow\tan\alpha=2\sqrt{11}$.

Câu 58. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a,\ AD=2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và cạnh bên SC tạo với đáy một góc 60^0. Gọi M, N là trung điểm các cạnh bên SA và SB. Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (DMN).

A. $\dfrac{a\sqrt{60}}{31}$.   B. $\dfrac{a\sqrt{31}}{\sqrt{60}}$.   C. $\dfrac{a\sqrt{31}}{2\sqrt{5}}$.   D. $\dfrac{2a\sqrt{5}}{\sqrt{31}}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình

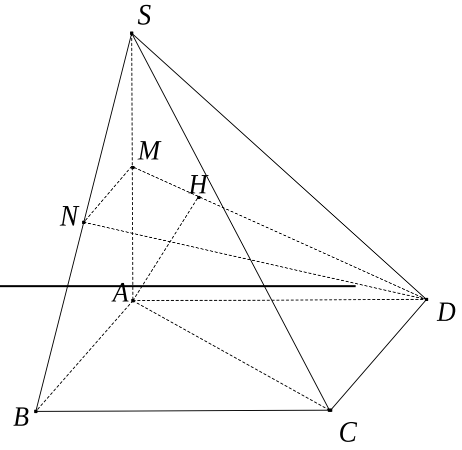
Ta có SA cắt (DMN) tại M $\Rightarrow\dfrac{d(S,(DMN))}{d(A,(DMN))}=\dfrac{SM}{AM}=1$

$\Rightarrow d(S,(DMN))=d(A,(DMN))$.

Kẻ $AH\perp MD$

Ta có : $\begin{cases}MN//AB\\AB\perp(SAD)\end{cases}\Rightarrow MN\perp(SAD)$.

Mà $AH\subset(SAD)\Rightarrow MN\perp AH$.



Ta có: $\begin{cases}AH\perp MD\\AH\perp MN\\MD\cap MN=\{M\}\\MD,MN\subset(DMN)\end{cases}\Rightarrow AH\perp(DMN)$

hay $d(A,(DMN))=AH$.

Ta có AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Nên góc giữa SC và $(ABCD)$ bằng góc $SCA = 60^0$.

Tam giác SAC vuông tại A suy ra: $SA = \tan 60^0.AC = a\sqrt{15}$.

Xét tam giác MAD vuông tại A nên: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{4}{15a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{31}{60a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{60}}{\sqrt{31}}$.

Vậy $d\left(S,(DMN)\right) = \frac{a\sqrt{60}}{\sqrt{31}}$.

[Cách 2]: Phương pháp dùng thể tích

Ta có: $d\left(S,(DMN)\right) = \frac{3V_{SMND}}{S_{\Delta MND}}$.

Ta có: $\begin{cases} MN//AB \\ AB \perp (SAD) \end{cases} \Rightarrow MN \perp (SAD) \Rightarrow MN \perp MD$.

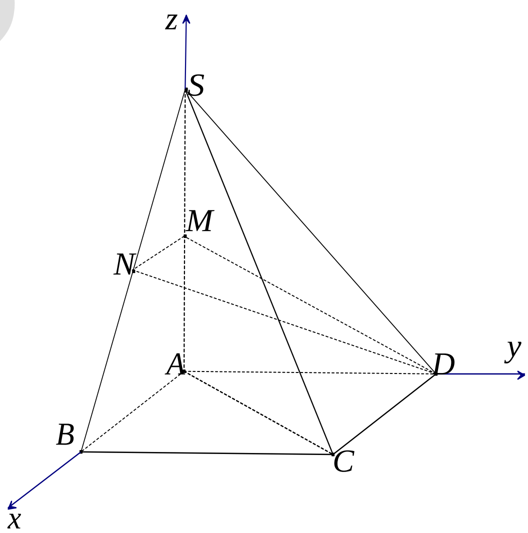
Tam giác MND vuông tại M : $S_{\Delta MND} = \frac{1}{2}MN.MD = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a\sqrt{31}}{2} = \frac{a^2\sqrt{31}}{8}$.

Mặt khác $\frac{V_{SMND}}{V_{SABD}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SN}{SB} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{SMND} = \frac{1}{4}V_{SABD} = \frac{1}{4}.\frac{1}{2}V_{SABD} = \frac{1}{8}\frac{1}{3}SA.AB.AD = \frac{a^3\sqrt{15}}{12}$.

Vậy $d\left(S,(DMN)\right) = \frac{a\sqrt{60}}{\sqrt{31}}$.

[Cách 3]: Phương pháp toạ độ.

Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ:



$A(0;0;0)$; $S\left(0;0;a\sqrt{15}\right)$; $D(0;2a;0)$;

$M\left(0;0;\frac{a\sqrt{15}}{2}\right)$; $N\left(\frac{a}{2};0;\frac{a\sqrt{15}}{2}\right)$.

$\overrightarrow{DM} = \left(0;-2a;\frac{a\sqrt{15}}{2}\right)$; $\overrightarrow{DN} = \left(\frac{a}{2};-2a;\frac{a\sqrt{15}}{2}\right)$;

$\overrightarrow{DS} = \left(0;-2a;a\sqrt{15}\right)$

$d\left(S;(DMN)\right) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{DN}\right].\overrightarrow{DS}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{DN}\right]\right|} = \frac{a\sqrt{60}}{31}$.

Câu 59. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Góc giữa SB và mặt phẳng (SAC) bằng 60^0. Gọi M là trung điểm của SB. Tính khoảng cách giữa AM và CD.

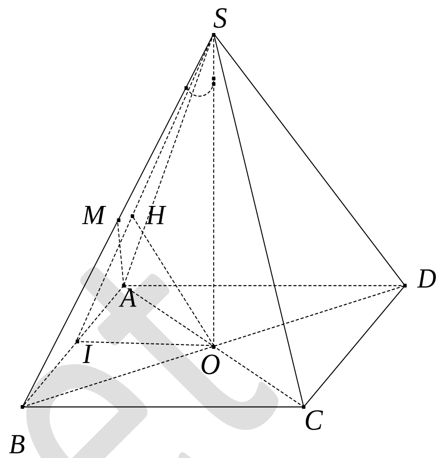
A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a}{4}$. D. $a\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình

Hình chóp $SABCD$ đều, O là tâm của đáy nên $SO \perp (ABCD)$

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$.



Ta có: $\begin{cases} BD \perp AO \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Góc giữa SB và (SAC) là góc giữa SB và SO bằng góc $SOB = 60^0$.

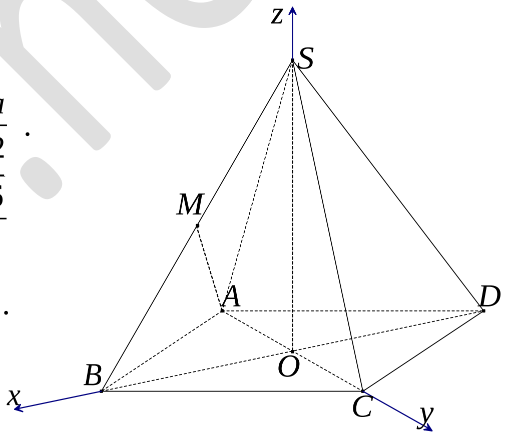
Ta có $\begin{cases} CD//AB \\ AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow CD//(SAB)$.

Mà $AM \subset (SAB)$ nên $d(AM,CD) = d(CD,(SAB)) = 2d(O,SAB)$.

Gọi I là trung điểm của AB . Kẻ $OH \perp SI$.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp OI \\ AB \perp SO \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI)$ mà $OH \subset (SIO) \Rightarrow OH \perp AB$.

Lại có $\begin{cases} OH \perp SI \\ OH \perp AB \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SAB) \Rightarrow d(O,(SAB)) = OH$.



Vì OI là đường trung bình của tam giác ABD nên $OI = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2}$.

Tam giác SBO vuông tại O nên ta có: $SO = \frac{OB}{\tan 60^0} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2} = \frac{10}{a^2} \Rightarrow OH = \frac{a}{\sqrt{10}} .$$

Vậy $d(AM,CD) = d(CD,(SAB)) = 2d(O,(SAB)) = 2OH = \frac{2a}{\sqrt{10}}$.

[Cách 2]:Phương pháp toạ độ.

Chọn hệ trục toạ độ sao cho: $O(0;0;0)$; $S\left(0;0;\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)$; $A\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$; C$\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$; $B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$

Suy ra: $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$; $\overrightarrow{AS} = \left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)$; $\overrightarrow{AC} = (0;a\sqrt{2};0)$

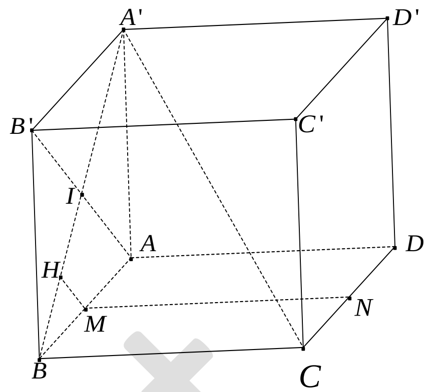
$$\Rightarrow d(AM,CD) = d(C,(SAB)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AS}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AS}\right]\right|} = \frac{2a}{\sqrt{10}}$$

Câu 60. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD. Tính khoảng cách giữa $A'C$ và MN

A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.   B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.   C. $\frac{a}{2}$.   D. $a\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình



Ta có $BC//MN \Rightarrow MN//(A'BC)$

$\Rightarrow d(MN,A'C) = d(MN,(A'BC)) = d(M,(A'BC))$

Gọi $I = A'B \cap AB'$ và H là trung điểm của BI.

Ta có $\begin{cases} MH//AI \\ AI \perp A'B \end{cases} \Rightarrow MH \perp A'B$.

Lại có : $\begin{cases} MH \perp A'B \\ MH \perp BC \quad (BC \perp (ABB'A')) \end{cases} \Rightarrow MH \perp (A'BC)$

Do đó:

$d(MN,A'C) = d(M,(A'BC)) = MH = \frac{1}{2}AI = \frac{1}{4}AB' = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

[Cách 2]: Phương pháp toạ độ.

Chọn hệ trục toạ độ sao cho: $A(0;0;0)$; $B(a;0;0)$; $C(a;a;0)$; $A'(0;0;a)$; $M\left(\frac{a}{2};0;0\right)$.

Suy ra: $\overrightarrow{BA'} = (-a;0;a)$; $\overrightarrow{BC} = (0;a;0)$; $\overrightarrow{BM} = \left(-\frac{a}{2};0;0\right)$

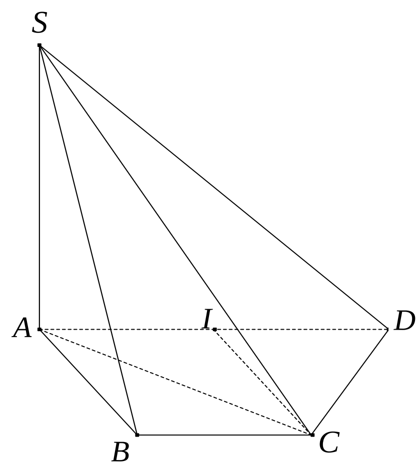
$d(MN;A'B) = d(MN;(A'BC)) = d(M;(A'BC)) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{BM}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BC}\right]\right|} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$.

Câu 61. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân $AD//BC$, $AD = 2a$, $BC = CD = a$. Biết $SA \perp (ABCD)$, $SA = 3a$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SC và AD.

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

[Cách 1]: Phương pháp dựng hình



Ta có $AD//BC$ nên góc giữa hai đường thẳng SC và AD là góc giữa hai đường thẳng SC và BC.

Vì $ABCD$ là hình thang cân nên $AB = CD = a$.

Gọi I là trung điểm của AD.

Ta có: $\begin{cases} AI = BC = \frac{1}{2}AD \\ AI//BC \end{cases}$ nên tứ giác $AICB$ là hình bình hành

nên $CI = AB = a$.

Tam giác ACD có $CI = \frac{1}{2}AD \Rightarrow$ tam giác ACD vuông tại C.

Tam giác ACD vuông tại C nên ta có:

$AC^2 = AD^2 - CD^2 = (2a)^2 - a^2 = 3a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{3}$.

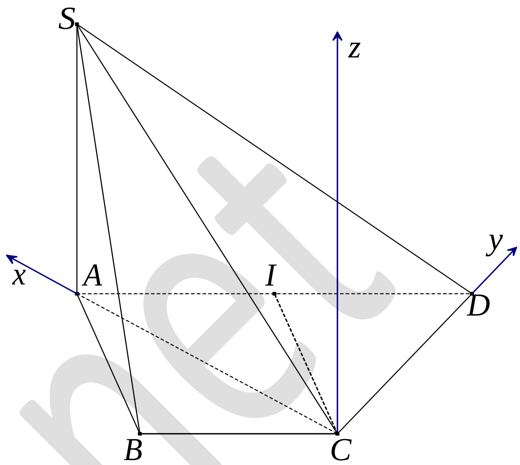
Tam giác SAC vuông tại A nên ta có: $SC^2 = SA^2 + AC^2 = (3a)^2 + \left(a\sqrt{3}\right)^2 = 12a^2 \Rightarrow SC = 2a\sqrt{3}$.

Tam giác SAB vuông tại A nên ta có: $SB^2 = SA^2 + AB^2 = (3a)^2 + a^2 = 10a^2 \Rightarrow SB = a\sqrt{10}$.

Áp dụng định lí cosin trong tam giác SBC : $\cos SCB = \dfrac{SC^2 + BC^2 - SB^2}{2SC.BC} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Vậy cosin góc giữa hai đường thẳng SC và AD bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

[Cách 2]: Phương pháp toạ độ.



Chọn hệ trục toạ độ như hình vẽ ta có:

$C(0;0;0); A\left(a\sqrt{3};0;0\right); D(0;a;0); S(0;0;3a)$

Suy ra: $\overrightarrow{SC} = (0;0;-3a); \overrightarrow{AB} = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{a}{2};0\right)$

$$\cos(SC, AD) = \left|\cos\left(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AD}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}\right|}{SC.AB} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

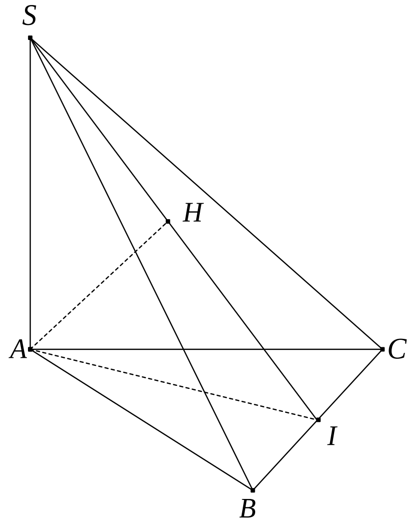
Vậy cosin góc giữa hai đường thẳng SC và AD bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 62. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = CA = a$, cạnh bên $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Tính góc giữa SA và (SBC).

A. $\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\arctan\sqrt{2}$. C. $\arctan 2\sqrt{2}$. D. $\arctan 2$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]



Gọi I là trung điểm cạnh BC. Kẻ $AH \perp SI$.

Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên $AI \perp BC$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI)$.

Mà $AH \subset (SAI) \Rightarrow BC \perp AH$.

Ta có: $\begin{cases} AH \perp SI \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

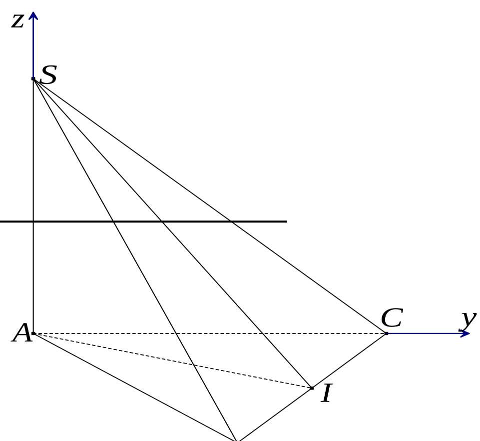
Suy ra : góc giữa SA và (SBC) là góc giữa SA và SH

bằng góc ASI .

Tam giác SAI vuông tại A: có $SA = a,\ AI = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\tan ASI = \dfrac{AI}{AS} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ .Vậy góc giữa SA và (SBC) bằng $\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

[Cách 2]: Gán hệ trục tọa độ



Chọn hệ trục toạ độ sao cho:

$A(0;0;0); B;(a;0;0); C(0;a;0); S(0;0;a)$

Ta có : $\overrightarrow{BS} = (-a;0;a), \overrightarrow{BC} = (-a;a;0)$

Suy ra: $\left[\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BC}\right]=\left(-a^2;-a^2;-a^2\right)=\left(-a^2\right)(1;1;1)$

Mặt phẳng (SBC) có véctơ pháp tuyến là: $\vec{n}=(1;1;1)$.

Đường thẳng SA có véctơ chỉ phương là: $\vec{k}=(0;0;1)$.

Suy ra: $\sin\left(SA;(SBC)\right)=\left|\cos\left(\vec{n};\vec{k}\right)\right|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\cot\left(SA;(SBC)\right)=\sqrt{2}$

$\Rightarrow\tan\left(SA,(SBC)\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy góc giữa SA và (SBC) bằng $\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.