Chủ Đề 7.1: QUAN HỆ SONG SONG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Khái niệm mặt phẳng và cách xác định mặt phẳng. Khái niệm hình chóp, tứ diện, hình lăng trụ, các loại lăng trụ.
- Vị trí tương đối của đường với đường, đường với mặt, mặt với mặt.
- Quan hệ song song giữa các yếu tố: hai đường thẳng song song, đường thẳng song song mặt phẳng, hai mặt phẳng song song.
- Nắm cách biểu diễn một hình không gian qua phép chiếu song song.

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

- Xác định giao điểm của đường với mặt, giao tuyến của hai mặt.
- Chứng minh hai đường thẳng song song, đường thẳng song song với mặt phẳng, mặt phẳng song song với mặt phẳng.
- Biết cách xác định thiết diện tạo bởi một mặt phẳng và một hình không gian.

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

Câu 1. Mệnh đề nào sau đây đúng

A. Nếu một mặt phẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì mặt phẳng đó sẽ cắt đường thẳng còn lại.

B. Hai mặt phẳng lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì cắt nhau theo một giao tuyến song song với một trong hai đường thẳng đó.

C. Nếu một đường thẳng cắt một trong hai đường thẳng song song thì đường thẳng đó sẽ cắt đường thẳng còn lại.

D. Hai mặt phẳng có một điểm chung thì cắt nhau theo một giao tuyến đi qua điểm chung đó.

Hướng dẫn giải

Nếu $a // b$ và (α) cắt a thì (α) cắt b.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng:

A. Hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn có vô số điểm chung khác nữa.

B. Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

C. Tồn tại duy nhất một mặt phẳng đi qua 3 điểm phân biệt.

D. Tồn tại duy nhất một mặt phẳng đi qua 1 điểm và 1 đường thẳng cho trước.

Hướng dẫn giải

Mệnh đề "Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất"

Sai vì có thể hai mặt phẳng trùng nhau.

Mệnh đề "Tồn tại duy nhất một mặt phẳng đi qua 3 điểm phân biệt" sai vì thiếu điều kiện 3 điểm không thẳng hàng.

Mệnh đề “Tồn tại duy nhất một mặt phẳng đi qua 1 điểm và 1 đường thẳng cho trước” sai vì thiếu

điều kiện điểm không nằm trên đường thẳng.

Câu 3. Ba điểm phân biệt cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì

A. Cùng thuộc đường thẳng. B. Cùng thuộc đường Elip.

C. Cùng thuộc một đường tròn. D. Cùng thuộc mặt cầu.

Hướng dẫn giải:

Đáp án A vì: 3 điểm cùng thuộc hai mặt phẳng thì 3 điểm ấy thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng mà giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt là một đường thẳng.

Câu 4. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng nằm trong một mặt phẳng thì không chéo nhau.

B. Hai đường thẳng phân biệt không chéo nhau thì cắt nhau.

C. Hai đường thẳng phân biệt không song song thì chéo nhau.

D. Hai đường thẳng phân biệt lần lượt thuộc hai mặt phẳng khác nhau thì chéo nhau.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A vì điều kiện để hai đường thẳng chéo nhau là không đồng phẳng.

Câu 5. Cho $\begin{cases} a \parallel \alpha \\ a \subset \beta \\ d = \alpha \cap \beta \end{cases}$ thì khi đó:

A. a song song với d. B. a cắt d. C. a trùng d. D. a và d chéo nhau.

Hướng dẫn giải:

Chọn đáp án A vì đây chính là định lý 2 SGK trang 61 chuẩn: “Cho đường thẳng a song song mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến là b thì b song song với a”

Câu 6. Cho $a\subset(P);b\subset(Q)$. Mệnh đề nào sau đây đúng:

A. $P\ //\ Q\ \Rightarrow a//\ Q\ ,b//\ P$.

B. $a//b\Rightarrow(P)//(Q)$.

C. $(P)//(Q)\Rightarrow a//b$.

D. a và b chéo nhau.

Hướng dẫn giải:

Đáp án A đúng vì hai mặt phẳng song song thì không có điểm chung nên a và (Q) không có điểm chung, b và (P) không có điểm chung hay $a//\ Q\ ,b//\ P$.

Câu 7. Trong các sau mệnh đề nào đúng?

A. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.

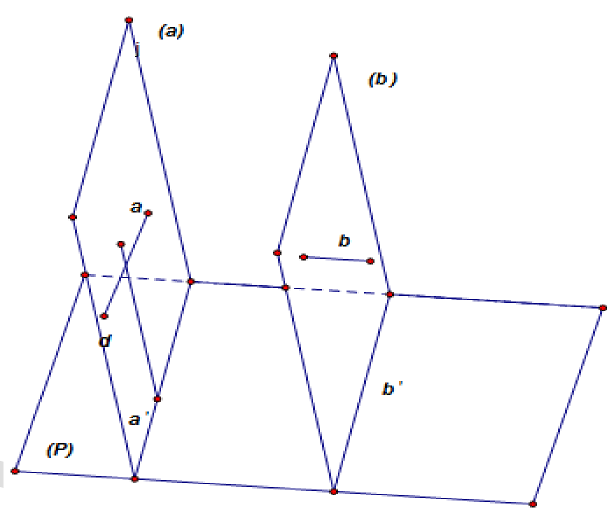
B. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể song song với nhau.

C. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau thì song song với nhau.

D. Các mệnh đề trên đều sai.

Hướng dẫn giải:

Cho hai đường thẳng chéo nhau a,b. Gọi (α) là mặt phẳng chứa a và song song với b, (β) là mặt phẳng chứa b và song song với a. Gọi (P) là mặt phẳng cắt (α) và (β) theo hai giao tuyến a',b', Vì $(\alpha)//(\beta)$ nên $a'//b'$. Gọi d là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α) nhưng không song song (α) và (β) và cắt (P). Khi đó phép chiếu song song chiếu lên mặt phẳng (P) theo phương d, hai đường thẳng chéo nhau a,b có hình chiếu $a'//b'$.



Câu 8. Trong không gian hai đường thẳng không chéo nhau thì

Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau :

A. Đồng phẳng.

C. Trùng nhau.

B. Song song với nhau.

D. Cắt nhau.

Hướng dẫn giải

Định nghĩa hai đường thẳng chéo nhau là hai đường thẳng không đồng phẳng do đó đáp án A đúng.

Câu 9. Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với nhau. Khi đó số đường thẳng phân biệt nằm

trong (P) song song với a là:

A.Vô số B. 2 C. 0 D. 3

Hướng dẫn giải

Ta có tính chất: "Đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với nhau khi trong mặt phẳng (P) tồn tại đường thẳng b song song với đường thẳng a". Do vậy chỉ cần qua một điểm bất kì nằm trong mặt phẳng (P) mà không thuộc đường thẳng b ta sẽ kẻ được một đường thẳng c song song với b cũng nằm trong mặt phẳng (P), do đó đường thẳng vừa kẻ này sẽ song song với đường thẳng a . Số điểm ở trong mặt phẳng (P) mà không thuộc đường thẳng b là vô số. Nên số đường thẳng chứa trong mặt phẳng (P) mà song song với đường thẳng a sẽ là vô số. Đáp án đúng là A.

Câu 10. Cho mặt phẳng (R) cắt hai mặt phẳng song song (P) và (Q) theo hai giao tuyến a và b. Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau:

A. a và b song song.

B. a và b cắt nhau.

C. a và b trùng nhau. D. a và b song song hoặc trùng nhau.

Hướng dẫn giải

Ta có tính chất: “ Một mặt phẳng thứ ba cắt hai mặt phẳng song song với nhau theo hai giao tuyến

song song với nhau”. Do đó đáp án A đúng.

Câu 11. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. Mệnh đề nào sau đây **sai** :

A. $d \subset (P)$ và $d' \subset (Q)$ thì $d // d'$.

B. Nếu đường thẳng $a \subset (Q)$ thì $a // (P)$

C. Mọi đường thẳng đi qua điểm $A \in (P)$ và song song với (Q) đều nằm trong (P).

D. Nếu đường thẳng Δ cắt (P) thì Δ cũng cắt (Q).

Hướng dẫn giải

“Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. $d \subset (P)$ và $d' \subset (Q)$ thì $d // d'$ “.Khẳng định này sai vì hai đường thẳng d, d' hoàn toàn có thể chéo nhau nữa.

Câu 12. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng phân biệt cùng nằm trong một mặt phẳng thì không chéo nhau.

B. Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau thì chéo nhau.

C. Hai đường thẳng không có điểm chung thì song song.

D. Hai đường thẳng phân biệt lần lượt thuộc hai mặt phẳng khác nhau thì chéo nhau.

Hướng dẫn giải

Mệnh đề **"**Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau thì chéo nhau" sai vì có thể hai đường thẳng song song.

Mệnh đề **"**Hai đường thẳng không có điểm chung thì song song" sai vì hai đường thẳng có thể chéo nhau.

Mệnh đề **"**Hai đường thẳng phân biệt lần lượt thuộc hai mặt phẳng khác nhau thì chéo nhau" sai vì có thể hai đường thẳng cùng thuộc một mặt phẳng thứ ba.

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC, G là trọng tâm tam giác BCD. Khi ấy giao điểm của MG và mặt phẳng (ABC) là:

A. Giao điểm của đường thẳng MG và đường thẳng AN.

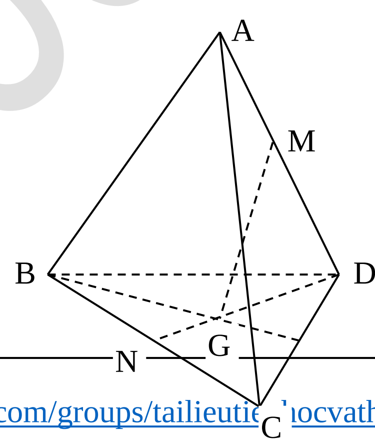
B. Điểm C.

C. Giao điểm của đường thẳng MG và đường thẳng BC.

D. Điểm N.

Hướng dẫn giải

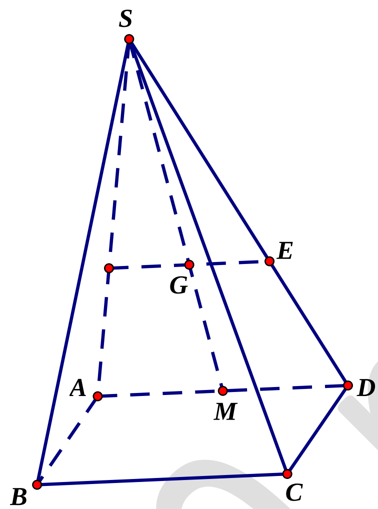
Đường thẳng MG và đường thẳng AN cùng nằm trên $mp(ADN)$ và không song song với nhau nên giao điểm của hai đường chính là điểm chung của MG và mặt phẳng (ABC).



Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. G là trọng tâm tam giác SAD. Mặt phẳng (GBC) cắt SD tại E. Tính tỉ số $\frac{SE}{SD}$.

A. $\frac{2}{3}$.   B. $\frac{1}{2}$.   C. 1.   D. $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải



Mặt phẳng (SAD) và (MBC) có G là 1 điểm chung. Mặt khác (SAD) và (MBC) lần lượt chứa hai đường thẳng song song là AD và BC nên giao tuyến của chúng là đường thẳng qua G song song với AD, giao tuyến này cắt SD tại E. Gọi M là trung điểm AD, ta có $\frac{SG}{SM} = \frac{SE}{SD} = \frac{2}{3}$

Câu 15. Cho một mặt phẳng (P) và hai đường thẳng song song a, b. Mệnh đề nào **đúng** trong các mệnh đề sau?

(1) Nếu $(P)\,//\,a$ thì $(P)\,//\,b$.

(2) Nếu $(P)\,//\,a$ thì $(P)\,//\,\mathrm{b}$ hoặc chứa b.

(3) Nếu (P) song song a thì (P) cắt b.

(4) Nếu (P) cắt a thì (P) cũng cắt b.

(5) Nếu (P) cắt a thì (P) có thể song song với b.

(6) Nếu (P) chứa a thì có thể (P) song song với b.

Hãy chọn phương án trả lời **đúng**

A. $(2),(4),(6)$ B. $(3),(4),(6)$ C. $(2),(1),(4)$ D. $(3),(4),(5)$

Hướng dẫn giải

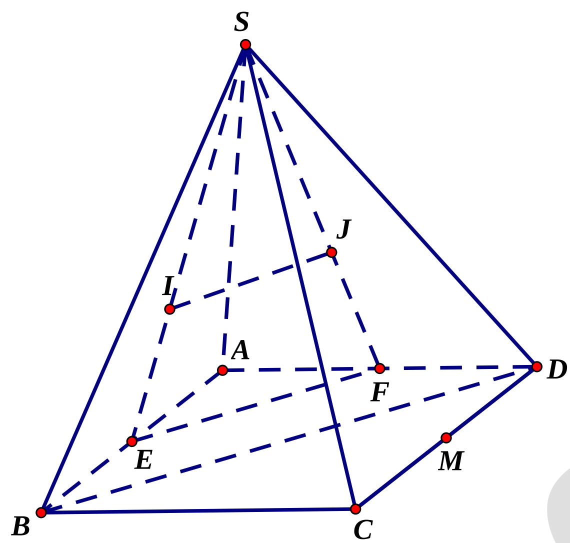
Mệnh đề (1) sai vì (P) có thể chứa b. Mệnh đề (3) sai vì (P) song song a thì (P) không thể cắt b. Mệnh đề (5) sai vì nếu (P) cắt a thì (P) cắt b

Các mệnh đề còn lại đều đúng.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Các điểm I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SAD. M là trung điểm CD. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. $IJ//(SBD)$. B. $IJ//(SBM)$. C. $IJ//(SBC)$. D. $IJ//(SCD)$

Hướng dẫn giải



Gọi E, F lần lượt là trung điểm AB, AD. Ta có: $\frac{SI}{SE} = \frac{SJ}{SF} = \frac{2}{3}$ suy ra $\mathrm{IJ} / \mathrm{EF}$. Mà $\mathrm{EF} // BD$ nên $\mathrm{IJ} // BD$. Kết hợp với IJ không nằm trên (SBD), ta thu được $\mathrm{IJ} // (SBD)$.

Câu 17. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào **đúng**

A. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β).

B. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với mọi đường thẳng nằm trong (β).

C. Trong (α) có chứa hai đường thẳng phân biệt và hai đường thẳng này cùng song song với (β) thì (α) và (β) song song

D. Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng cho trước đó

Hướng dẫn giải

Mệnh đề **"**Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với mọi đường thẳng nằm trong (β)" sai vì hai đường thẳng có thể chéo nhau.

Mệnh đề **"**Nếu (α) có chứa hai đường thẳng phân biệt và hai đường thẳng này cùng song song với (β) thì (α) và (β) song song" sai vì thiếu điều kiện hai đường thẳng đó cắt nhau.

Mệnh đề "Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng cho trước đó" sai vì vẽ được vô số đường thẳng như vậy.

Mệnh đề "Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β)".

Câu 18. Cho lăng trụ $ABCA'B'C'$.Gọi G,G' lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABCA'B'C'.M$ là điểm trên cạnh AC sao cho $AM = 2MC$. Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

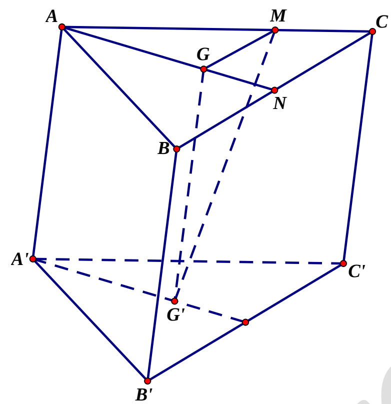
A. Đường thẳng MG' cắt mặt phẳng $(BCC'B')$.

B. $GG'//(ABB'A')$.

C. $GG'//(ACC'A')$

D. $(MGG')//(BCC'B')$

Hướng dẫn giải



Ta có: $GG'//AA'$ nên các mệnh đề $GG'//(ABB'A')$, $GG'//(ACC'A')$ đều đúng. Mặt khác: $\frac{AM}{AC}=\frac{AG}{AN}=\frac{2}{3}$ (N là trung điểm BC) nên $GM//CN$. Kết hợp $GG'//BB'$ và $GM//CN$ suy ra $(MGG')//(BCC'B')$. Do vậy mệnh đề "Đường thẳng MG' cắt mặt phẳng $(BCC'B')$" là mệnh đề sai.

Câu 19. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai? (Với giả thiết các đoạn thẳng và đường thẳng không song song hoặc trùng với phương chiếu).

A. Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng.

B. Phép chiếu song song bảo toàn thứ tự ba điểm thẳng hàng.

C. Hình chiếu của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

D. Hình chiếu song song của đường thẳng là đường thẳng.

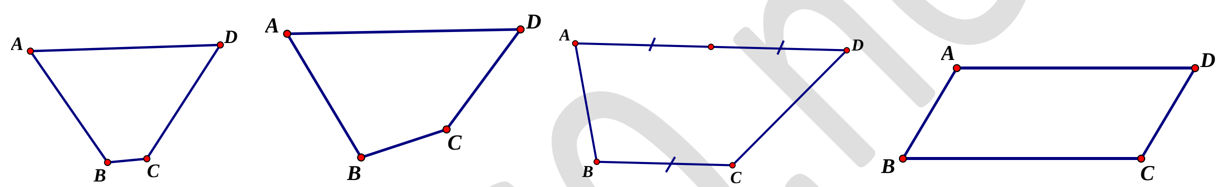
Hướng dẫn giải

Mệnh đề **“**Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng”

sai vì phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng. Các mệnh đề còn lại đều là tính chất của phép chiếu song song và là các mệnh đề đúng.

Câu 20. Hình nào sau đây có thể coi là hình biểu diễn của hình thang $ABCD$ có $AD//BC$,

$AB = BC = CD = a$, $AD = 2a$.



Hình 1 Hình 2 Hình 3 Hình 4

A. Hình 3. B. Hình 1. C. Hình 2. D. Hình 4.

Hướng dẫn giải

Hình biểu diễn của một hình là hình chiếu song song của hình ban đầu lên mặt phẳng nên hình biểu diễn phải đảm bảo các tính chất của phép chiếu song song. Hình 1, hình 4 có tỉ lệ độ dài hai đáy không giống hình thực, hình 2 có AD không song song BC. Hình 3 có thể coi là hình biểu diễn của hình thang đã cho.

Câu 21. Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng $d \subset (P)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**:

A. $\forall A, A \in d \Rightarrow A \in (P)$

B. Nếu $A \notin d$ thì $A \notin (P)$

C. Nếu $A \in (P)$ thì $A \in d$

D. Nếu 3 điểm A, B, C cùng thuộc (P) và A, B, C thẳng hàng thì $A, B, C \in d$

Hướng dẫn giải

Ta có tính chất: " Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm

trên đường thẳng đó đều nằm trên mặt phẳng đó". Do vậy đáp án A đúng.

Câu 22. Mệnh đề nào sau đây **sai**

A.Qua hai đường thẳng không chéo nhau có duy nhất một mặt phẳng.

B.Qua hai đường thẳng cắt nhau có duy nhất một mặt phẳng.

C.Qua hai đường thẳng song song có duy nhất một mặt phẳng.

D.Qua một điểm và một đường thẳng không chứa điểm đó có duy nhất một mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Nếu hai đường thẳng trùng nhau thì có vô số mặt phẳng.

Câu 23. Cho năm điểm A, B, C, D, E sao cho không có bốn điểm nào cùng nằm trên một mặt phẳng. Số

hình tứ diện có các đỉnh lấy từ năm điểm đã cho là:

A.Năm. B.Sáu. C.Ba. D.Bốn.

Hướng dẫn giải

Lấy bốn điểm trong năm điểm có năm cách (vì bốn điểm trong năm điểm đều tạo thành tứ diện)

Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AB, AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD} = \frac{1}{3}$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh CD, CB. Mệnh đề nào sau đây **đúng**

A.Tứ giác $MNPQ$ là một hình thang.

B.Tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

C.Bốn điểm M, N, P, Q không đồng phẳng.

D. Tứ giác $MNPQ$ không có các cặp cạnh đối nào song song.

Hướng dẫn giải

Vì $MN // BD, PQ // BD, MN < PQ$

Câu 25. Mặt phẳng (α) qua trung điểm của cạnh AB, song song AC và BD cắt tứ diện đều $ABCD$ theo thiết diện là một:

A.Hình vuông.

B.Hình chữ nhật.

C.Hình thoi.

D.Hình thang cân.

Hướng dẫn giải

Thiết diện là một hình thoi cạnh $\frac{AB}{2}$ và hai đường chéo bằng nhau(đường cao thuộc cạnh đáy của hai tam giác cân bằng nhau) nên nó là một hình vuông.

Câu 26. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ lần lượt có tâm O_1, O_2 và không cùng nằm trong một

mặt phẳng. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. O_1O_2 song song với mặt phẳng (BDE).

B. O_1O_2 song song với mặt phẳng (BCE).

C. O_1O_2 song song với mặt phẳng (ADF).

D. O_1O_2 song song với mặt phẳng (CDE).

Hướng dẫn giải

Vì $O_1O_2 \cap (BDE) = O_1$

Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của

các cạnh AB, SC. Mặt phẳng (α) qua M và song song với mặt phẳng (BDI) sẽ cắt hình chóp

thì thiết diện là một hình

A. Ngũ giác. B. Lục giác.

C. Tam giác. D. Tứ giác.

Hướng dẫn giải

Vì mặt phẳng (α) song song với SA, BD nên (α) cắt các cạnh AD, SD, SC, SB lần lượt tại N, P, Q, K. Do đó thiết diện là ngũ giác $MNPQK$.

Dùng cho câu 28,29,30

Trong mặt phẳng (α) cho tứ giác $ABCD$ có các cặp cạnh đối không song song và điểm $S \notin (\alpha)$.Gọi O, I, J lần lượt là giao điểm của AC và BD, AB và CD, AD và BC

Câu 28. Giao tuyến của (SAC) và (SBD) là:

A. SO

B. AC

C. BD

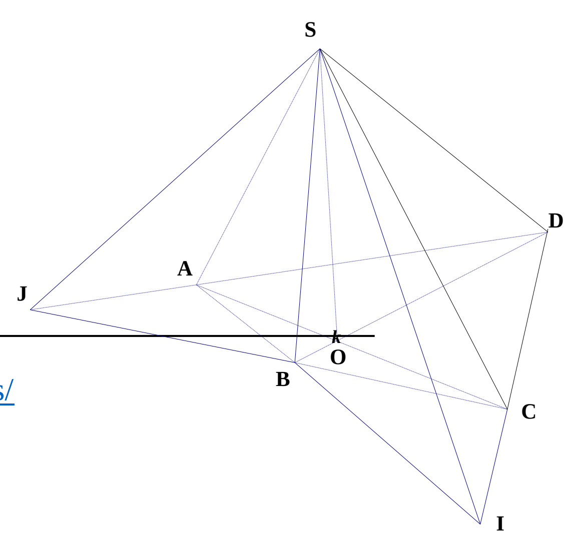
D. SC

Hướng dẫn giải

Ta có $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (1)

Mà: $\begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(SAC) \cap (SBD) = SO$



Câu 29. Giao tuyến của (SAB) và (SCD) là:

A. SI

B. SB

C. SC

D. BC

Hướng dẫn giải

Ta có $S \in (SAB) \cap (SCD) \quad (3)$

Mà: $\begin{cases} I \in AB \subset (SAB) \\ I \in CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD) \quad (4)$

Từ (3) và (4) suy ra $(SAB) \cap (SCD) = SI$

Câu 30. Giao tuyến của (SAD) và (SBC) là:

A. SJ

B. SA

C. SB

D. SO

Hướng dẫn giải

Ta có $S \in (SAD) \cap (SBC) \quad (5)$

Mà: $\begin{cases} J \in AD \subset (SAD) \\ J \in BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow J \in (SAD) \cap (SBC) \quad (6)$

Từ (5) và (6) suy ra $(SAD) \cap (SBC) = SJ$

VẬN DỤNG THẤP

Câu 31. Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng thuộc một mặt phẳng .Trên các đoạn thẳng AB, AC, BD

lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho MN không song song với BC. Khi đó giao tuyến của hai

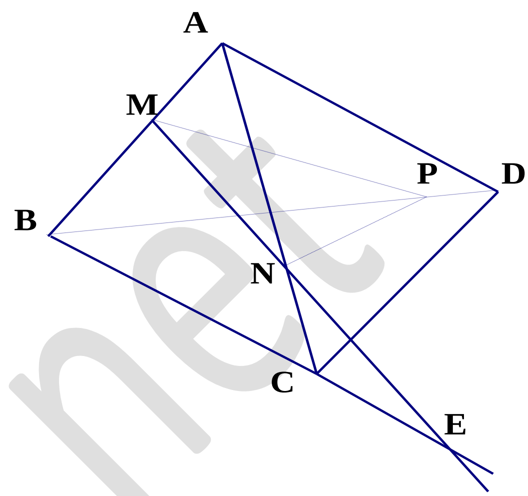
mặt phẳng (BCD) và (MNP) không thuộc mặt phẳng:

A. (ACD)

B. (BCD)

C. (MNP)

D. (BCP)



Hướng dẫn giải

Ta có :

$$\begin{cases} P \in BD \subset (BCD) \\ P \in (MNP) \end{cases} \Rightarrow P \in (BCD) \cap (MNP) \quad (1)$$

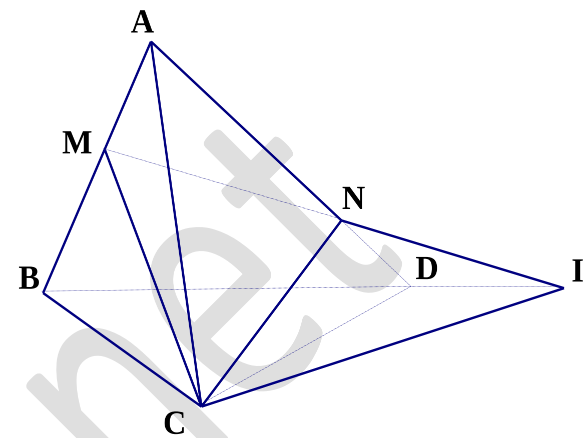
Trong mặt phẳng (ABC) có MN không song song với BC. Gọi $MN \cap BC = E$. Khi đó:

$$\begin{cases} E \in BC \subset (BCD) \\ E \in MN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow E \in (BCD) \cap (MNP) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(BCD) \cap (MNP) = PE$. Dễ thấy PE không thuộc mặt phẳng (ACD)

Câu 32. Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên các đoạn thẳng AB và

AD lần lượt lấy các điểm M,N sao cho đường thẳng MN cắt đường thẳng BD tại I. Điểm I I thuộc những mặt phẳng :



A. $(ABD),(MNC),(BCD)$

B. $(ACD),(MNC),(BCD)$

C. $(ABD),(ACD),(BCD)$

D. $(ABD),(MNC),(ACD)$

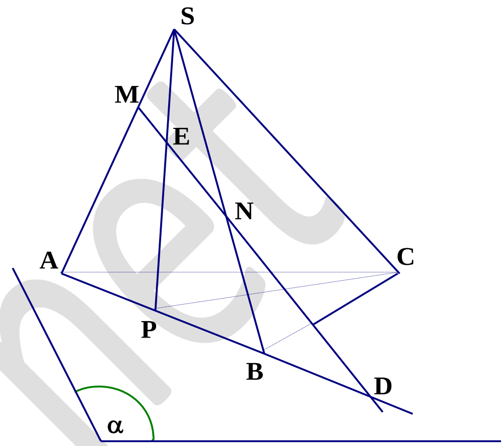
Hướng dẫn giải

$I\in MN$ mà $MN\subset(ABD)\Rightarrow I\in(ABD)$

$I\in MN$ mà $MN\subset(MNC)\Rightarrow I\in(MNC)$

$I\in BD$ mà $BD\subset(BCD)\Rightarrow I\in(BCD)$

Câu 33. Trong mặt phẳng (α) cho tam giác ABC. Một điểm S không thuộc (α). Trên cạnh AB lấy một điểm P và trên các đoạn thẳng SA, AB ta lấy lần lượt hai điểm M,N sao cho MN không song song với AB. Gọi E, D lần lượt là giao điểm của MN với mặt phẳng (SPC) và mặt phẳng (ABC).



Trong tam giác AMD có bao nhiêu tứ giác?

A.3

B.2

C.5

D.4

Hướng dẫn giải

Dễ thấy có 3 tứ giác cần tìm:

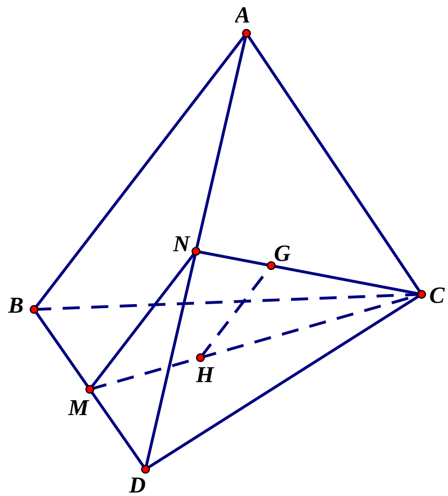
$AMEP$, $PENB$, $AMNB$

Câu 34. Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm BD, AD. Các điểm H, G lần lượt là

trọng tâm các tam giác BCD, ACD. Đường thẳng HG chéo với đưởng thẳng nào sau đây?

A. CD. B. MN. C. CN. D. AB.

Hướng dẫn giải

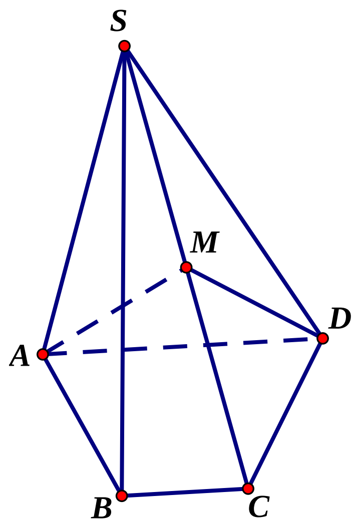


Trong tam giác CMN, ta có: $\frac{CH}{CM}=\frac{CG}{CN}=\frac{1}{3}$ nên $HG//MN$. Mặt khác $MN//AB$ nên $HG//AB$. Rõ ràng, CN cắt HG. Vậy chọn đáp án là CD.

Câu 35. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình thang $(AD//BC)$. M là trung điểm SC. Mặt phẳng qua AM ,song song với BC cắt đường thẳng SD tại Q .Tỉ số $\frac{SQ}{SD}$ bằng

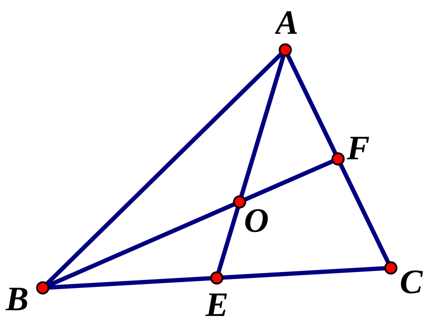
A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{4}{3}$

Hướng dẫn giải

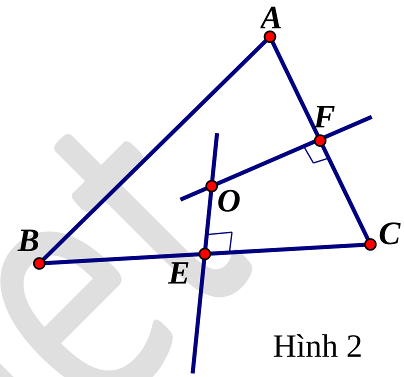


Do $AD//BC$ nên (ADM) chính là mặt phẳng qua AM, song song với BC. Vậy giao điểm của mặt phẳng qua AM, song song với BC và đường thẳng SD chính là D. Vậy: $\frac{SQ}{SD}=\frac{SD}{SD}=1$

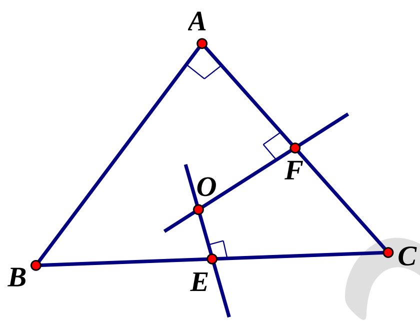
Câu 36. Cho các hình vẽ và các mệnh đề:



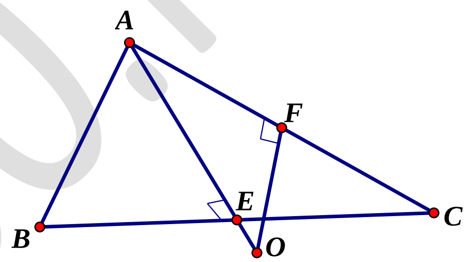
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

(1): Hình 1 là hình biểu diễn tam giác đều ABC và tâm đường tròn ngoại tiếp O của tam giác.

(2): Hình 2 là hình biểu diễn tam giác đều ABC và tâm đường tròn ngoại tiếp O của tam giác.

(3): Hình 3 là hình biểu diễn tam giác ABC vuông tại A và tâm đường tròn ngoại tiếp O của tam giác.

(4): Hình 4 là hình biểu diễn tam giác ABC cân tại A, có $BAC = 120^0$ và tâm đường tròn ngoại tiếp O của tam giác.

Các mệnh đề đúng là:

A. (1), (4).
B. (2), (3).
C. (1).
D. (3), (4).

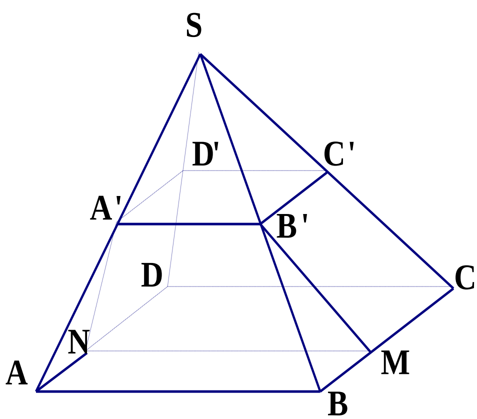
Hướng dẫn giải

Mệnh đề (1) đúng vì tam giác ABC đều nên tâm đường tròn ngoại tiếp O nằm trên các trung tuyến AE, BF. Mệnh đề (2) sai vì trong hình 2 không bảo toàn tính thẳng hàng của A, O, E. Mệnh đề (3) sai vì tam giác ABC vuông thì O trùng trung điểm E của BC nên trong hình biểu diễn cũng phải bảo toàn tính chất này. Mệnh đề (4) đúng vì hình 4 bảo toàn tính thẳng hàng của A, O và trung điểm E của BC và thứ tự giữa các điểm này (tam giác ABC tù tại đỉnh A nên O nằm ngoài đoạn AE)

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC, SD. Gọi M là điểm bất kì trên BC. Thiết diện của $mp(A'B'M)$ với hình chóp $S.ABCD$ là:

A. Hình thang.
B. Hình bình hành.
C. Hình thoi.
D. Hình chữ nhật.

Hướng dẫn giải



Chứng minh $A'B'C'D'$ *là hình bình hành* :

Trong tam giác SAB, ta có : $A'B'//AB, A'B' = \frac{1}{2}AB$

Trong tam giác SCD, ta có : $C'D'//CD; C'D' = \frac{1}{2}CD$

$\Rightarrow A'B'//C'D'$.

Vậy : Tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

Tìm thiết diện của $(A'B'M)$ *với hình chóp* $S.ABCD$:

Ta có : $A'B'//AB$ và M là điểm chung của $(A'B'M)$ và $(ABCD)$

Do đó giao tuyến của $(A'B'M)$ và $(ABCD)$ là Mx song song AB và $A'B'$.

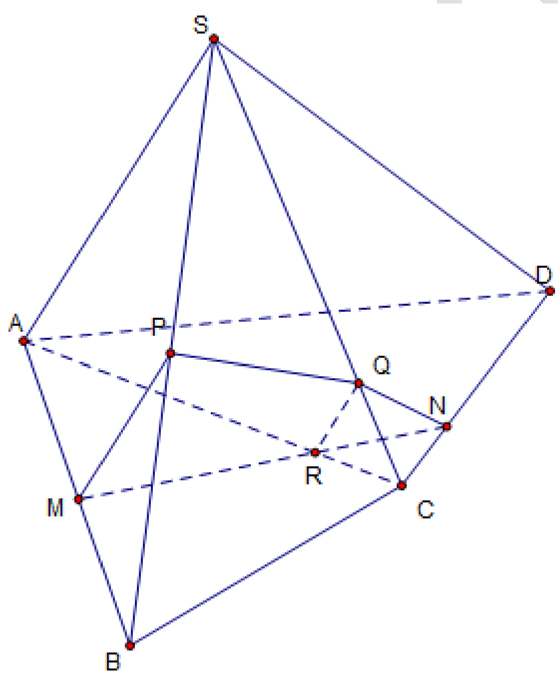
Gọi $N = Mx \cap AD$. Vậy : Thiết diện là hình thang $A'B'MN$. Do đó chọn đáp án A.

Câu 38. Cho hình chóp $SABCD$ với M,N lần lượt là hai điểm lấy trên các cạnh AB,CD. Gọi (α) là

mặt phẳng qua MN và song song với SA. Khi đó thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng

(α) là:

A. Tứ giác. B. Tam giác. C. Ngũ giác. D. Hình thang.



+ Mặt phẳng (α) song song với SA mà $SA \subset (SAB), M \in (\alpha) \cap (SAB)$. Ta biết một điểm chung M của mặt phẳng (α) và (SAB) đồng thời biết phương của giao tuyến là phương song song với SA. Vậy $(\alpha) \cap (SAB) = MP$ với $MP \parallel SA$, P thuộc SB.

+ Tương tự gọi $R = AC \cap MN$ là một điểm chung của (α) và (SAC) đồng thời (α) song song với SA mà $SA \in (SAC)$ nên ta có $(\alpha) \cap (SAC) = RQ$, $RQ \parallel SA, Q \in SC$. Nên đoạn giao tuyến (α) và (SCD) là đoạn QN

+ Đoạn giao tuyến của (α) và (SBC) là PQ.

Vậy thiết diện tứ giác MNQP.

Câu 39. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ΔABC. Hình chiếu song song K của G

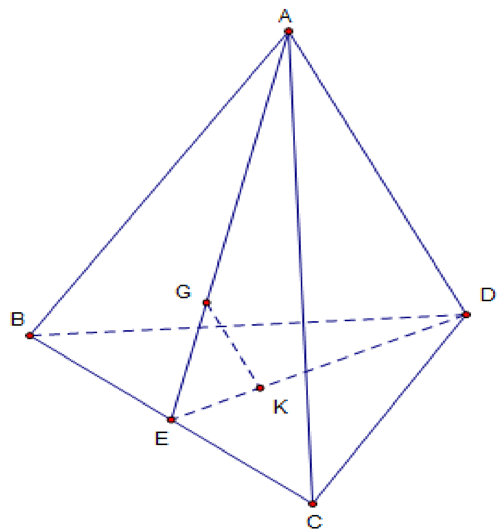
trên mặt phẳng (BCD) theo phương chiếu AD là:

A. Trọng tâm tam giác ΔBCD

B. Trực tâm tam giác ΔBCD

C. Là điểm bất kì trong tam giác ΔBCD

D. Là điểm H sao cho $GH \perp BCD$



+ Từ giả thiết ta có: $GK//AD, AG \cap DK = E$ với E là trung điểm của BC. Từ đó ta có:

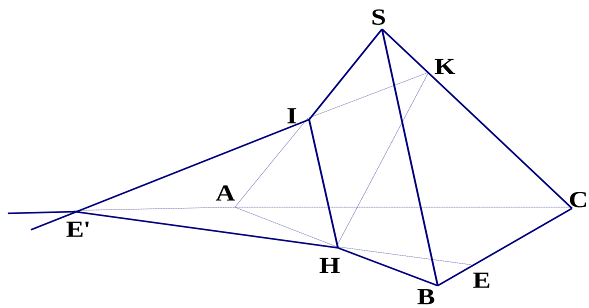
$\frac{EK}{KD} = \frac{EG}{GA} = \frac{1}{2} \Rightarrow K$ là trọng tâm tam giác ΔBCD

Câu 40. Cho bốn điểm A, B, C, S không cùng nằm trong cùng một mặt phẳng . Gọi I, H lần lượt là trung

điểm của SA, AB .Trên SC lấy điểm K sao cho: $CK = 3KS$ .Gọi E là giao điểm của đường thẳng BC với mặt phẳng (IHK). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $KE//SB$ B. KI cắt AB C. $\frac{BE}{BC} = \frac{1}{2}$ D. $\frac{BE}{BC} = \frac{1}{4}$

Hướng dẫn giải



Cách 1. (dựng điểm E, chỉ sử dụng kiến thức bài đại cương đường thẳng và mặt phẳng)

Chọn mp phụ $(ABC) \supset BC$

Tìm giao tuyến của (ABC) và (IHK)

Trong (SAC) ,có IK không song song với AC. Gọi $E' = IK \cap AC \Rightarrow (ABC) \cap (IHK) = HE'$

Trong (ABC), gọi $E_1 = BC \cap HE'$

$E_1 \in BC, BC \subset (ABC) \Rightarrow E_1 \in (ABC)$

$E_1 \in HE', HE' \subset (IHK) \Rightarrow E_1 \in (IHK)$

Suy ra: $E_1 = BC \cap (IHK) \Rightarrow E \equiv E_1$

Sau khi dựng xong điểm E, ta sẽ quan sát thấy $KE // SB$ (hoặc quan sát kĩ hình hơn sẽ thấy "vai trò" điểm E trong tam giác ABC cũng giống như điểm K trong tam giác SAC, do đó tỉ lệ của

điểm E chia đoạn BC cũng giống như tỉ lệ điểm K chia đoạn SC. Do vậy, áp dụng định lí Ta-let

cho tam giác SBC ta có $KE//SB$). Vậy chọn đáp án A.

Cách 2. (Sử dụng tính chất quan hệ song song của đường thẳng và mặt phẳng)

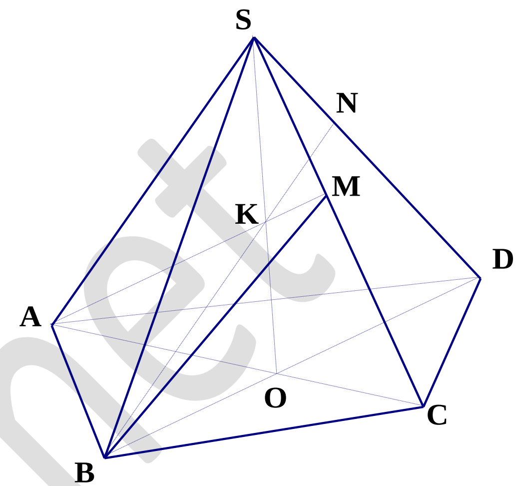
Ta có: IH là đường trung bình trong tam giác SAB nên song song với SB. Do đó hai mặt phẳng (SBC) và (IHK) lần lượt chứa hai đường thẳng SB, IH song song với nhau sẽ cắt nhau theo giao tuyến KE song song với SB. Vậy chọn đáp án A.

VẬN DỤNG CAO

Câu 1. Cho tứ giác $ABCD$ và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn SC lấy một

điểm M không trùng với S và C .Gọi N là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng

(ABM). Khi đó AN:



A. $AN=(ABM)\cap(SAD)$

B. $AN=(ABM)\cap(SBC)$

C. $AN=(ABM)\cap(SCD)$

D. $AN=(ABM)\cap(SAC)$

Hướng dẫn giải

Ta có

$B\in(ABM)\cap(SBD)\quad(1)$

Gọi $O=AC\cap BD, K=AM\cap SO$. Khi đó:

$$\begin{cases}K\in AM\subset(ABM)\\K\in SO\subset(SBD)\end{cases}\Rightarrow K\in(ABM)\cap(SBD)\quad(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $(ABM)\cap(SBD)=BK$

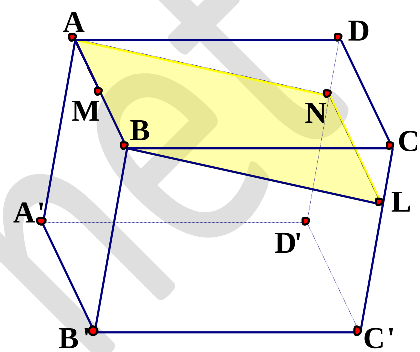
Trong mặt phẳng (SBD). Gọi $N=BK\cap SD$. Khi đó:

$$\begin{cases}N\in SD\\N\in BK\subset(ABM)\end{cases}\Rightarrow N=(ABM)\cap SD$$. Dễ thấy $AN=(ABM)\cap(SAD)$

Câu 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và các điểm M,N lần lượt thuộc các cạnh AB,DD' .(M,N

không trùng với các đầu mút của các cạnh). Thiết diện của hình hộp bị cắt bởi mặt phẳng

(MNB) là:



A.Hình bình hành;

B.Hình chữ nhật;

C.Hình thoi;

D.Hình thang cân;

Hướng dẫn giải

Ta có :

$$(MNB)\cap(\mathrm{AA}'B'B)=MB$$
$$(MNB)\cap(\mathrm{AA}'D'D)=AN$$
$$(MNB)\cap(\mathrm{DD}'C'C)=NL$$

Trong đó $L=x\cap CC', L\in x//CD$, x đi qua N

Mà: $(MNB)\cap(BB'C'C)=LB\Rightarrow$ thiết diện là tứ giác $ABLN$ (1)

Mặt khác: $\begin{cases} LN//DC, LN = DC \\ DC//AB, DC = AB \end{cases} \Rightarrow LN//AB, LN = AB \ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra thiết diện cần tìm là hình bình hành

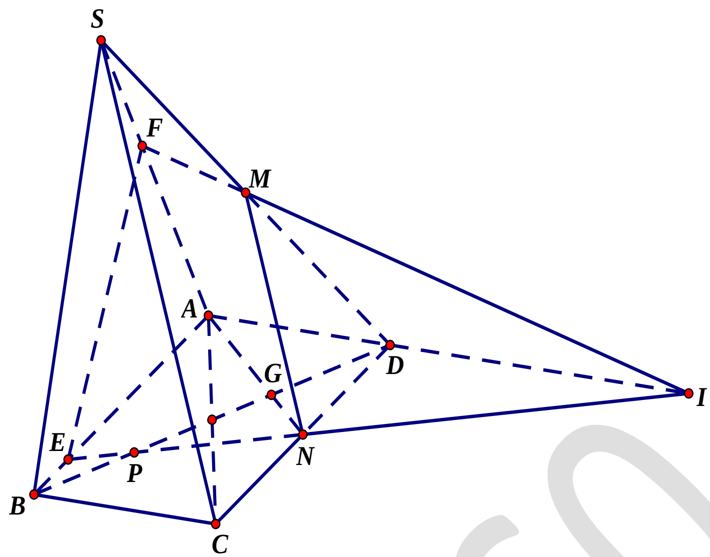
Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M, N lần lượt là trung điểm của

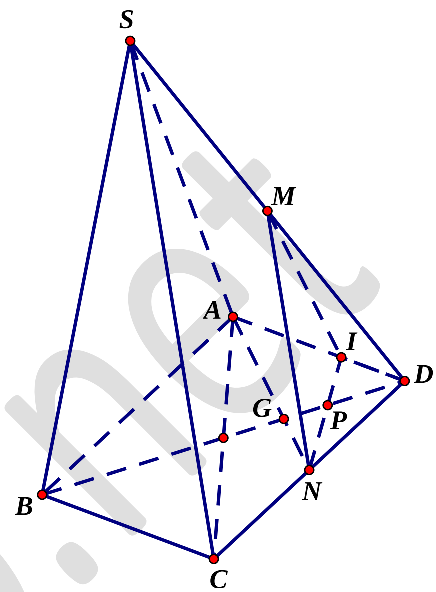
SD, DC. Điểm P thay đổi trên cạnh BD, $\frac{BP}{BD} = k$. Giá trị k để thiết diện của

$mp(MNP)$ và hình chóp là tứ giác.

A. $0 \le k < \frac{2}{3}$ B. $0 \le k \le \frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2} \le k \le \frac{3}{4}$ D. $0 \le k < \frac{3}{4}$

Hướng dẫn giải





Gọi G là giao điểm của AN và BD. Trong $mp(ABCD)$, khi P thay đổi trên đoạn BG $(P \neq G)$, đường thẳng NP luôn cắt đoạn AB tại một điểm E (E thay đổi từ trên AB, $E \neq A$), đường thẳng EN cắt đường thẳng AD tại I. Trong $mp(\text{SAD})$, đường thẳng IM cắt SA tại F. Thiết diện là tứ giác $MNEF$.

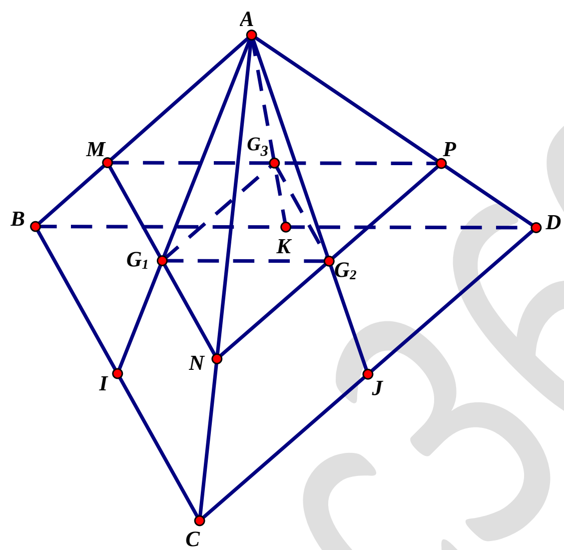
Khi P chạy từ G đến D, đường thẳng NP cắt đoạn AD tại I. Thiết diện là tam giác MNI.

Vậy đáp án là $0 \leq k < \dfrac{2}{3}$

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$, gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACD, ADB. Diện tích thiết diện tạo bởi mặt phẳng $\left(G_1G_2G_3\right)$ bằng k lần diện tích tam giác BCD, khi đó k bằng:

A. $\frac{4}{9}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải



Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm BC, CD, DB. Ta có: $\frac{AG_1}{AI}=\frac{AG_2}{\text{AJ}}=\frac{AG_3}{AK}=\frac{2}{3}$ nên $G_1G_2//\text{IJ}$, $G_1G_3//IK$. Suy ra $\left(G_1G_2G_3\right)//(BCD)$. Do vậy, giao tuyến của $\left(G_1G_2G_3\right)$ và (ABC) là đường thẳng qua G_1 song song với BC, đường thẳng này cắt AB, AC lần lượt tại M, N $MG_3 \cap AD = P$. Thiết diện là tam giác MNP. Tam giác MNP có các cạnh tương ứng song

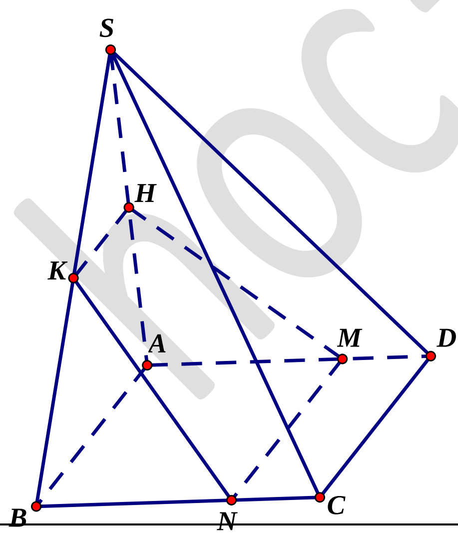
song với các cạnh của tam giác BCD và $\frac{MN}{BC}=\frac{NP}{CD}=\frac{PM}{BD}=\frac{2}{3}$ nên diện tích tam giác MNP bằng $\frac{4}{9}$ lần diện tích tam giác BCD hay $k=\frac{4}{9}$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, tam giác SAB đều, $SC=SD=a\sqrt{3}$. Gọi H,K lần lượt là trung điểm của SA,SB. M là một điểm trên cạnh AD,

mặt phẳng (HKM) cắt BC tại N. Đặt $AM=x$ $(0\le x\le a)$. Giá trị x để diện tích thiết diện $HKMN$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

A. $x=0$ B. $x=\frac{a}{2}$ C. $x=\frac{3a}{4}$ D. $x=a$

Hướng dẫn giải



Mặt phẳng (HKM) và $(ABCD)$ chứa hai đường thẳng song song HK và AB nên giao tuyến của chúng là MN cũng song song với HK và AB. Xét hai tam giác HAM và KBN có:

$BN = AM$; $BK = AH$; $KBN = MAH$ (do $\triangle SBC = \triangle SAD$) nên $\triangle HAM = \triangle KBN$.

Từ đó suy ra: $MH = KN$. $MHKN$ là hình thang cân có hai đáy $MN = a; HK = \frac{a}{2}$.

Sử dụng định lý hàm số $\cos$ cho tam giác SAD ta tính được $\cos HAD = -\frac{1}{2}$. Ta tính được:

$$HM^2 = HA^2 + AM^2 - 2HA.AM.\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{a^2 + 4x^2 + 2ax}{4}.$$

Đường cao của hình thang cân được tính bằng công thức:

$\sqrt{HM^2 - (\frac{MN - HK}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{16x^2 + 8ax + 3a^2}$. Do hai đáy có độ dài không đổi nên diện tích thiết diện bé nhất khi đường cao bé nhất đạt khi x=0

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD. Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của AB, ON, SB. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

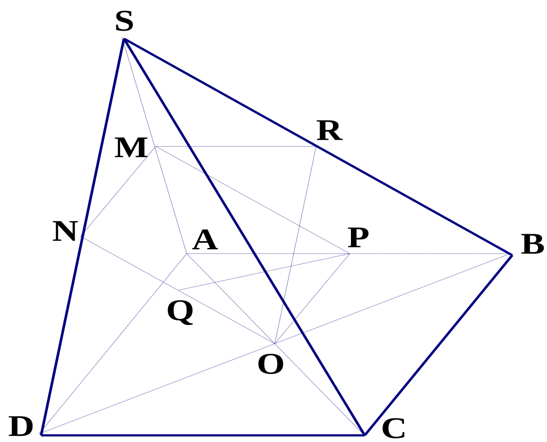
A. PQ cắt $mp(SBC)$

B. $mp(MON) // mp(SBC)$

C. $mp(MOR) // mp(SCD)$

D. $PQ // mp(SBC)$

Hướng dẫn giải



Hai đáp án A và D trái ngược nhau nên chắc chắn một trong 2 đáp án này sai. Do vậy ta cần kiểm

xem PQ có song song với mặt phẳng (SBC) hay không.

Chứng minh $mp(MON)//mp(SBC)$*:*

Xét tam giác SAC và SDB :

Ta có : $\begin{cases} OM // SC \\ ON // SB \end{cases} \Rightarrow (OMN)//(SBC)$

Chứng minh : $PQ//mp(SBC)$

Ta có : $\begin{cases} OP // AD \\ AD // MN \end{cases} \Rightarrow OP // MN \Rightarrow M, N, P, O$ đồng phẳng

$\Rightarrow PQ \subset (MNO)$

Mà $\begin{cases} PQ \subset (MNO) \\ (MNO) // (\text{SBC}) \end{cases} \Rightarrow PQ // (SBC)$

Do vậy : $PQ // mp(SBC)$

Câu 7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC. Trên đường thẳng CD

lấy điểm M sao cho KM không song song với BD. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định

sau "thiết diện của tứ diện $ABCD$ với mặt phẳng (HKM) "

A. Thiết diện của tứ diện $ABCD$ với $mp(HKM)$ là một tam giác hoặc một tứ giác

B. Thiết diện của tứ diện $ABCD$ với $mp(HKM)$ là một tam giác

C. Thiết diện của tứ diện $ABCD$ với $mp(HKM)$ là một tứ giác

D. Thiết diện của tứ diện $ABCD$ với $mp(HKM)$ là một hình thang

Hướng dẫn giải:

Xét 2 .trường hợp :

a. M ở giữa C và D

b. M ở ngoài đoạn CD

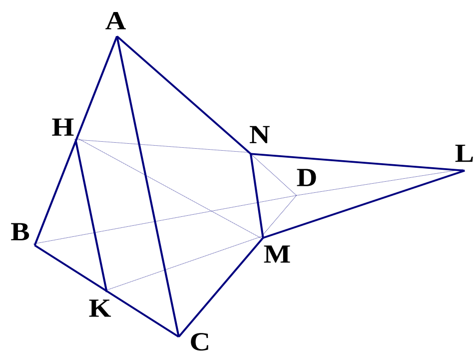
a. M ở giữa C và D:

Ta có : HK , KM là các đoạn giao tuyến của (HKM) với (ABC) và (BCD)

Trong (BCD), gọi $L = KM \cap BD$

Trong (ABD), gọi $N = AD \cap HL$

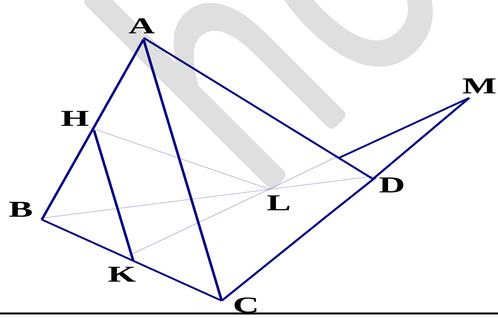
Vậy : thiết diện là tứ giác $HKMN$.



b. M ở ngoài đoạn CD:

Trong (BCD), gọi $L = KM \cap BD$

Vậy : thiết diện là tam giác HKL



Vậy ta chọn đáp án A.

Câu 8. Cho hai hình vuông có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường

chéo AC và BF ta lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Mặt phẳng (P) chứa MN và song song

với AB cắt AD và AF lần lượt tại M', N'. Khẳng định nào sau đây **đúng**

A. MN song song với $mp(DEF)$

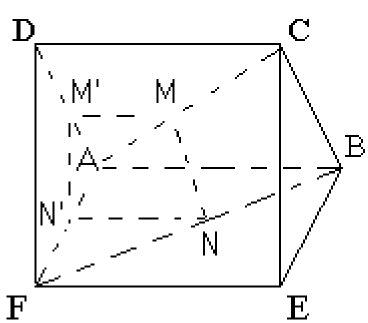
B. Tứ giác $MNM'N'$ là hình bình hành

C. AC, BF cắt nhau

D. MN cắt $mp(DEF)$

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases}(P)//AB\\(P)\cap(ABCD)=MM'\end{cases}\Rightarrow MM'//AB\Rightarrow MM'//EF\,(1)$$



Tương tự $NN'//EF \Rightarrow MM'//NN'$. Từ đó ta vẽ được các điểm M', N' như hình vẽ và quan sát thấy

$MNN'M'$ mới là hình thang chưa thể là hình bình hành.

Dễ dàng quan sát thấy $M'N'//DF$ hoặc chứng minh được khẳng định đó như sau:

$MM'//CD \Rightarrow \dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AM}{AC}$; $NN'//AB \Rightarrow \dfrac{AN'}{AF} = \dfrac{BN}{BF}$

Mà $AC = BF$; $AM = BN \Rightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{BN}{BF}$

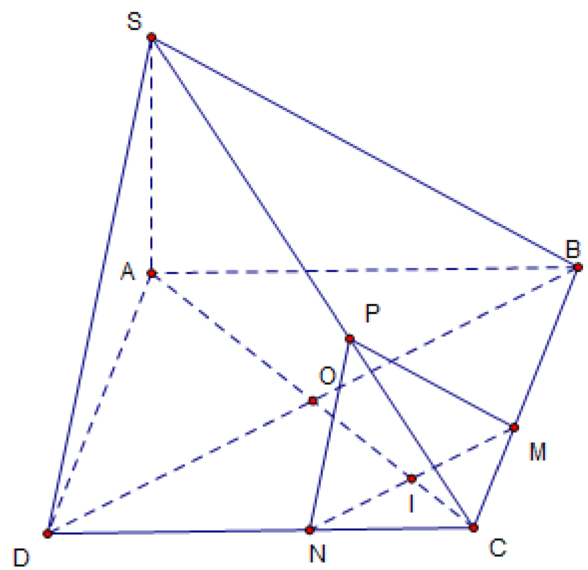
$\Rightarrow \dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AN'}{AF} \Rightarrow M'N'//DF\,(2)$

Từ (1), (2) $\Rightarrow (MNN'M')//(\mathrm{DEF}) \Rightarrow MN//(\mathrm{DEF})$. Vậy chọn đáp án A.

Câu 9. Cho hình chóp $SABCD, ABCD$ là hình bình hành tâm O và có $AC = a; BD = b$. Tam giác SBD là tam giác đều. Một mặt phẳng (α) di động song song với SBD và đi qua I trên đoạn OC. Đặt $AI = x\ \left(\dfrac{a}{2} < x < a\right)$.Khi đó diện tích thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) là:

A. $\dfrac{b^2(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2}$ B. $\dfrac{b^2(a+x)^2\sqrt{3}}{a^2}$ C. $\dfrac{b^2(a+x)^2}{a^2\sqrt{3}}$ D. $\dfrac{b^2(a-x)^2\sqrt{2}}{a^2}$

Hướng dẫn giải



+ $(\alpha)//(SBD)$ nên (α) cắt các mặt phẳng (ABCD), (SBC), (SCD) theo các giao tuyến $MN//BD, MP//SB, NP//SD$. Vậy thiết diện của hình chóp và mặt phẳng (α) là tam giác đều MNP.

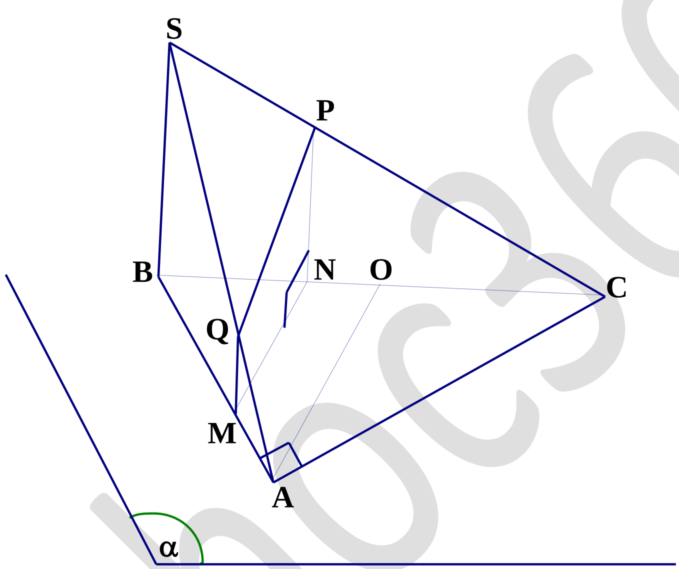
+ $S_{SBD} = \dfrac{BD^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}$.

+ $\dfrac{S_{MNP}}{S_{SBD}} = \left(\dfrac{MN}{BD}\right)^2 = \left(\dfrac{CI}{CO}\right)^2 = \left(\dfrac{AC-AI}{CO}\right)^2 = \dfrac{(a-x)^2}{\left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \left[\dfrac{2(a-x)^2}{a}\right]^2$

+ Mà $S_{SBD} = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}$ nên $S_{SMN} = \dfrac{b^2(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2}$.

Câu 10. Trong mặt phẳng (α) cho tam giác ABC vuông tại A , $\hat{B} = 60^0$, $AB = a$ .Gọi O là trung điểm của BC . Lấy điểm S ở ngoài mặt phẳng (α) sao cho $SB = a$ và $SB \perp OA$. Gọi M là một điểm trên cạnh AB , mặt phẳng (α) qua M song song với SB và OA , cắt BC, SC, SA lần lượt tại N, P, Q .Đặt $BM = x(0 < x < a)$ .Diện tích thiết diện của hình chóp và mặt phẳng (α) lớn nhất khi:

A. $x = \frac{2a}{3}$ B. $x = \frac{3a}{2}$ C. $x = \frac{2}{3a}$ D. $x = \frac{3}{2a}$



+ *Chứng minh MNPQ là hình thang vuông* :

Ta có : $\begin{cases} (\alpha)//OA \\ OA \subset (ABC) \\ MN = (\alpha) \cap (ABC) \end{cases} \Rightarrow MN//OA \quad (1)$

$\begin{cases} (\alpha)//SB \\ SB \subset (SAB) \\ MQ = (\alpha) \cap (SAB) \end{cases} \Rightarrow \quad MQ//SB \quad (2)$

$\begin{cases} (\alpha)//SB \\ SB \subset (SBC) \\ NP = (\alpha) \cap (SBC) \end{cases} \Rightarrow \quad NP//SB \quad (3)$

Từ (2) và (3) ,suy ra $MQ//NP//SB$ (4)

$\Rightarrow$ $MNPQ$ là hình thang

Từ (1) và (4) , ta có : $\begin{cases} OA \perp SB \\ MN//OA \\ MQ//NP//SB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MN \perp MQ \\ MN \perp NP \end{cases}$

Vậy : $MNPQ$ là hình thang vuông , đường cao MN .

+ Tính diện tích của hình thang theo a và x .

Ta có : $S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}(MQ + NP).MN$

Tính MN :

Xét tam giác ABC.

Ta có : $\cos B = \dfrac{AB}{BC} \quad \Rightarrow \quad BC = \dfrac{AB}{\cos B}$

$\Rightarrow \quad BC = 2a \Rightarrow BO = a$

Do $\begin{cases} \hat{B} = 60^0 \\ BA = BO \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \Delta ABO$ đều

Có $MN // OA \quad \Rightarrow \dfrac{MN}{AO} = \dfrac{BM}{AB} = \dfrac{BN}{BO}$

$\Rightarrow \quad MN = MB = BN = x$

Tính MQ :

Xét tam giác SAB, ta có : $MQ // SB$

$\Rightarrow \dfrac{MQ}{SB} = \dfrac{AM}{AB} \quad \Rightarrow MQ = AM.\dfrac{SB}{AB} = (a-x).\dfrac{a}{a} = a - x$

Tính NP :

Xét tam giác SBC , ta có : $NP // SB$

$\Rightarrow \dfrac{NP}{SB} = \dfrac{CN}{CB} \quad \Rightarrow NP = CN.\dfrac{SB}{CB} = (2a-x).\dfrac{a}{2a} = \dfrac{2a-x}{2}$

Do đó : $S_{MNPQ} = \dfrac{x(4a-3x)}{4} = \dfrac{1}{12}.3x.(4a-3x)$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương $3x$ và $4a-3x$

$$3x\left(4a-3x\right) \le \left(\frac{3x+4a-3x}{2}\right)^2 = 4a^2$$

$\le$ 4a²

$$\Rightarrow S_{MNPQ} \le \frac{1}{12}.4a^2 = \frac{a^2}{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi $3x = 4a-3x \Leftrightarrow x = \dfrac{2a}{3}$

Vậy : $x = \dfrac{2a}{3}$ thì S_{MNPQ} đạt giá trị lớn nhất.