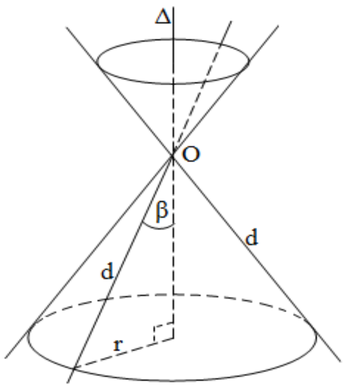
Chuyên đề 7. HÌNH HỌC KHÔNG GIAN CỔ ĐIỂN

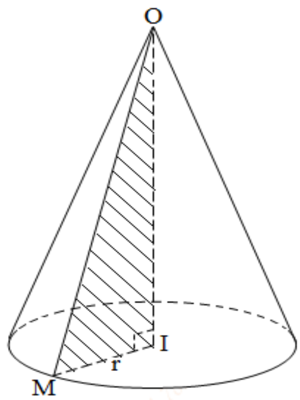
Chủ đề 7.5. MẶT CẦU – MẶT NÓN – MẶT TRỤ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. MẶT NÓN



Hình 1



Hình 2

1/ Mặt nón tròn xoay

Trong mặt phẳng (P), cho 2 đường thẳng d, Δ cắt nhau tại O và chúng tạo thành góc β với $0^0 < \beta < 90^0$. Khi quay $mp(P)$ xung quanh trục Δ với góc β không thay đổi được gọi là mặt nón tròn xoay đỉnh O (hình 1).

✧ Người ta thường gọi tắt mặt nón tròn xoay là mặt nón.

✧ Đường thẳng Δ gọi là trục, đường thẳng d được gọi là đường sinh và góc 2β gọi là góc ở đỉnh.

2/ Hình nón tròn xoay

Cho ΔOIM vuông tại I quay quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OIM tạo thành một hình, gọi là hình nón tròn xoay (gọi tắt là hình nón) (hình 2).

✧ Đường thẳng OI gọi là trục, O là đỉnh, OI gọi là đường cao và OM gọi là đường sinh của hình nón.

✧ Hình tròn tâm I, bán kính $r = IM$ là đáy của hình nón.

3/ Công thức diện tích và thể tích của hình nón

Cho hình nón có chiều cao là h, bán kính đáy r và đường sinh là l thì có:

✧ Diện tích xung quanh: $\boxed{S_{xq} = \pi.r.l}$

✧ Diện tích đáy (hình tròn): $\boxed{S_{đ} = \pi.r^2}$

$\Rightarrow$ Diện tích toàn phần hình nón: $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + S_{đ}}$.

✧ Thể tích khối nón: $\boxed{V_{nón} = \frac{1}{3}S_{đ}.h = \frac{1}{3}\pi.r^2.h}$.

4/ Tính chất:

✧ TH1: Nếu cắt mặt nón tròn xoay bởi $mp(P)$ **đi qua đỉnh** thì có các trường hợp sau xảy ra:

+ Nếu $mp(P)$ cắt mặt nón theo 2 đường sinh ⇒ Thiết diện là tam giác cân.
+ Nếu $mp(P)$ tiếp xúc với mặt nón theo một đường sinh. Trong trường hợp này, người ta gọi đó là mặt phẳng tiếp diện của mặt nón.

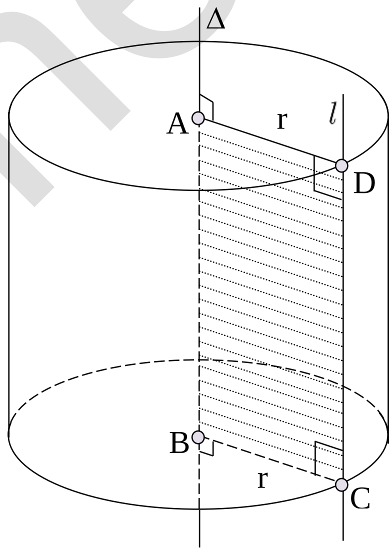
✧ TH2: Nếu cắt mặt nón tròn xoay bởi mp(Q) **không đi qua đỉnh** thì có các trường hợp sau xảy ra:

+ Nếu $mp(Q)$ vuông góc với trục hình nón ⇒ giao tuyến là một đường tròn.
+ Nếu $mp(Q)$ song song với 2 đường sinh hình nón ⇒ giao tuyến là 2 nhánh của 1 hypebol.
+ Nếu $mp(Q)$ song song với 1 đường sinh hình nón ⇒ giao tuyến là 1 đường parabol.

II. MẶT TRỤ

1/ Mặt trụ tròn xoay

Trong $mp\left(P\right)$ cho hai đường thẳng Δ và l song song nhau, cách nhau một khoảng r. Khi quay $mp\left(P\right)$ quanh trục cố định Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay hay gọi tắt là mặt trụ.



✧ Đường thẳng Δ được gọi là trục.

✧ Đường thẳng l được gọi là đường sinh.

✧ Khoảng cách r được gọi là bán kính của mặt trụ.

2/ Hình trụ tròn xoay

Khi quay hình chữ nhật $ABCD$ xung quanh đường thẳng chứa một cạnh, chẳng hạn cạnh AB thì đường gấp khúc $ABCD$ tạo thành một hình, hình đó được gọi là hình trụ tròn xoay hay gọi tắt là hình trụ.

✧ Đường thẳng AB được gọi là trục.

✧ Đoạn thẳng CD được gọi là đường sinh.

✧ Độ dài đoạn thẳng $AB = CD = h$ được gọi là chiều cao của hình trụ.

✧ Hình tròn tâm A, bán kính $r = AD$ và hình tròn tâm B, bán kính $r = BC$ được gọi là 2 đáy của hình trụ.

✧ Khối trụ tròn xoay, gọi tắt là khối trụ, là phần không gian giới hạn bởi hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ.

3/ Công thức tính diện tích và thể tích của hình trụ

Cho hình trụ có chiều cao là h và bán kính đáy bằng r, khi đó:

✧ Diện tích xung quanh của hình trụ: $\boxed{S_{xq} = 2\pi rh}$

✧ Diện tích toàn phần của hình trụ: $\boxed{S_{tp} = S_{xq} + 2.S_{Đay} = 2\pi rh + 2\pi r^2}$

✧ Thể tích khối trụ: $\boxed{V = B.h = \pi r^2 h}$

4/ Tính chất:

- ✧ Nếu cắt mặt trụ tròn xoay (có bán kính là r) bởi một $mp(\alpha)$ vuông góc với trục Δ thì ta được đường tròn có tâm trên Δ và có bán kính bằng r với r cũng chính là bán kính của mặt trụ đó.
- ✧ Nếu cắt mặt trụ tròn xoay (có bán kính là r) bởi một $mp(\alpha)$ không vuông góc với trục Δ nhưng cắt tất cả các đường sinh, ta được giao tuyến là một đường elíp có trụ nhỏ bằng $2r$ và trục lớn bằng $\dfrac{2r}{\sin\varphi}$, trong đó φ là góc giữa trục Δ và $mp(\alpha)$ với $0^0 < \varphi < 90^0$.
- ✧ Cho $mp(\alpha)$ song song với trục Δ của mặt trụ tròn xoay và cách Δ một khoảng d.
  - + Nếu $d < r$ thì $mp(\alpha)$ cắt mặt trụ theo hai đường sinh $\Rightarrow$ thiết diện là hình chữ nhật.
  - + Nếu $d = r$ thì $mp(\alpha)$ tiếp xúc với mặt trụ theo một đường sinh.
  - + Nếu $d > r$ thì $mp(\alpha)$ không cắt mặt trụ.

III. MẶT CẦU

1/ <u>Định nghĩa</u>

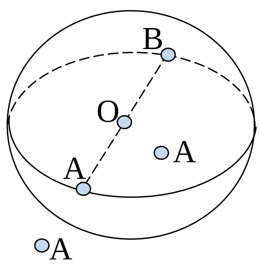
Tập hợp các điểm M trong không gian cách điểm O cố định một khoảng R gọi là mặt cầu tâm O, bán kính R, kí hiệu là: $S(O;\mathrm{R})$. Khi đó $S(O;\mathrm{R}) = \{M \mid OM = R\}$

2/ <u>Vị trí tương đối của một điểm đối với mặt cầu</u>

Cho mặt cầu $S(O;\mathrm{R})$ và một điểm A bất kì, khi đó:

- ✧ Nếu $OA = \mathrm{R} \Leftrightarrow A \in S(O;\mathrm{R})$. Khi đó OA gọi là bán kính mặt cầu. Nếu OA và OB là hai bán kính sao cho $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$ thì đoạn thẳng AB gọi là một đường kính của mặt cầu.
- ✧ Nếu $OA < \mathrm{R} \Leftrightarrow A$ nằm trong mặt cầu.
- ✧ Nếu $OA > \mathrm{R} \Leftrightarrow A$ nằm ngoài mặt cầu.

  $\Rightarrow$ Khối cầu $S(O;\mathrm{R})$ là tập hợp tất cả các điểm M sao cho $OM \le \mathrm{R}$.



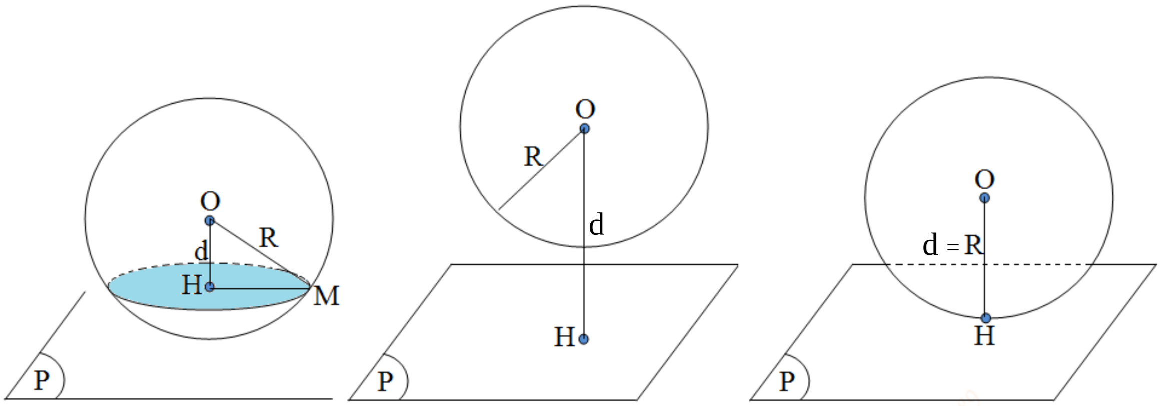
3/ <u>Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu</u>

Cho mặt cầu $S(O;\mathrm{R})$ và một $mp(P)$. Gọi d là khoảng cách từ tâm O của mặt cầu đến $mp(P)$ và H là hình chiếu của O trên $mp(P) \Rightarrow d = OH$.

✧ Nếu $d < R \Leftrightarrow mp(P)$ cắt mặt cầu $S(O;\mathrm{R})$ theo giao tuyến là đường tròn nằm trên $mp(P)$ có tâm là H và bán kính $r = HM = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{R^2 - OH^2}$ (hình a).

✧ Nếu $d > R \Leftrightarrow mp(P)$ không cắt mặt cầu $S(O;\mathrm{R})$ (hình b).

✧ Nếu $d = R \Leftrightarrow mp(P)$ có một điểm chung duy nhất. Ta nói mặt cầu $S(O;\mathrm{R})$ tiếp xúc $mp(P)$. Do đó, điều kiện cần và đủ để $mp(P)$ tiếp xúc với mặt cầu $S(O;\mathrm{R})$ là $d(O,(P)) = R$ (hình c).



Hình a Hình b Hình c

4/ <u>Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt cầu</u>

Cho mặt cầu $S(O;\mathrm{R})$ và một đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của O trên đường thẳng Δ và $d = OH$ là khoảng cách từ tâm O của mặt cầu đến đường thẳng Δ. Khi đó:

✧ Nếu $d > R \Leftrightarrow \Delta$ không cắt mặt cầu $S(O;\mathrm{R})$.

✧ Nếu $d < R \Leftrightarrow \Delta$ cắt mặt cầu $S(O;\mathrm{R})$ tại hai điểm phân biệt.

✧ Nếu $d = R \Leftrightarrow \Delta$ và mặt cầu tiếp xúc nhau (tại một điểm duy nhất). Do đó: điều kiện cần và đủ để đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu là $d = d(O,\Delta) = R$.

<u>Định lí</u>: Nếu điểm A nằm ngoài mặt cầu $S(O;\mathrm{R})$ thì:

✧ Qua A có vô số tiếp tuyến với mặt cầu $S(O;\mathrm{R})$.

✧ Độ dài đoạn thẳng nối A với các tiếp điểm đều bằng nhau.

✧ Tập hợp các điểm này là một đường tròn nằm trên mặt cầu $S(O;\mathrm{R})$.

5/ <u>Diện tích và thể tích mặt cầu</u>

• Diện tích mặt cầu: $\boxed{S_C = 4\pi R^2}$.   • Thể tích mặt cầu: $\boxed{V_C = \frac{4}{3}\pi R^3}$.

B. KỸ NĂNG CƠ BẢN

I. Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

1/ Các khái niệm cơ bản

✧ **Trục của đa giác đáy**: là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác đáy.
$\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên trục của đa giác thì cách đều các đỉnh của đa giác đó.

✧ **Đường trung trực của đoạn thẳng**: là đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.
$\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên đường trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

✧ **Mặt trung trực của đoạn thẳng**: là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.
$\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên mặt trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

2/ Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

✧ **Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp**: là điểm cách đều các đỉnh của hình chóp. Hay nói cách khác, nó chính là giao điểm I của trục *đường tròn ngoại tiếp mặt phẳng đáy* và *mặt phẳng trung trực của một cạnh bên* hình chóp.

✧ **Bán kính**: là khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

3/ Cách xác định tâm và bán kính mặt cầu của một số hình đa diện cơ bản

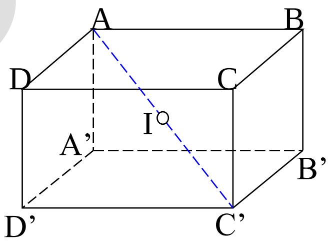
a/ Hình hộp chữ nhật, hình lập phương.

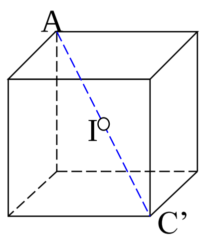
- **Tâm**: trùng với tâm đối xứng của hình hộp chữ nhật (hình lập phương).

$\Rightarrow$Tâm là I, là trung điểm của AC'.

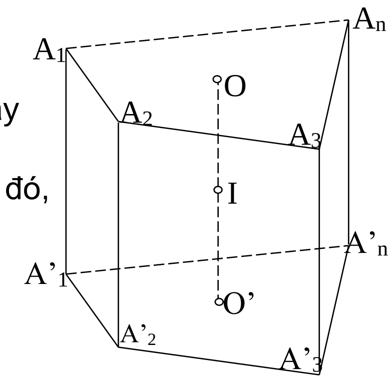
- **Bán kính**: bằng nửa độ dài đường chéo hình hộp chữ nhật (hình lập phương).

$\Rightarrow$Bán kính: $R = \dfrac{AC'}{2}$.





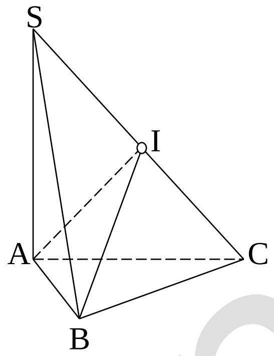
b/ Hình lăng trụ đứng có đáy nội tiếp đường tròn.

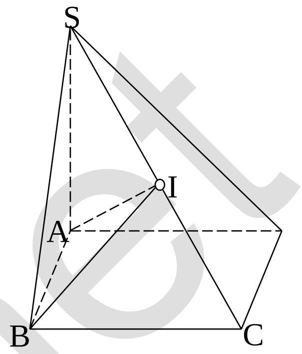


Xét hình lăng trụ đứng $A_1A_2A_3...A_n.A_1'A_2'A_3'...A_n'$, trong đó có 2 đáy $A_1A_2A_3...A_n$ và $A_1'A_2'A_3'...A_n'$ nội tiếp đường tròn (O) và (O'). Lúc đó, mặt cầu nội tiếp hình lăng trụ đứng có:

- **Tâm**: I với I là trung điểm của OO'.
- **Bán kính**: $R = IA_1 = IA_2 = ... = IA_n'$.

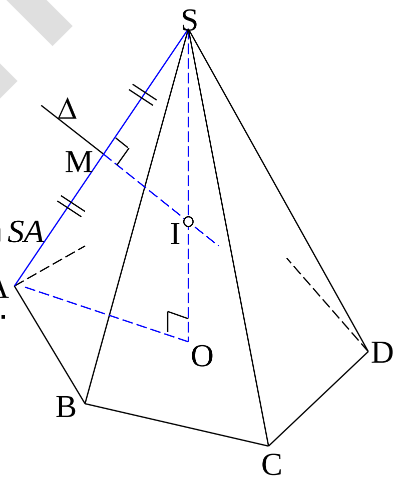
c/ <u>Hình chóp có các đỉnh nhìn đoạn thẳng nối 2 đỉnh còn lại dưới 1 góc vuông</u>.





- Hình chóp $S.ABC$ có $SAC = SBC = 90^0$.
  - $+$ Tâm: I là trung điểm của SC.
  - $+$ Bán kính: $R = \frac{SC}{2} = IA = IB = IC$.
- Hình chóp $S.ABCD$ có
  $SAC = SBC = SDC = 90^0$.
  - $+$ Tâm: I là trung điểm của SC.
  - $+$ Bán kính: $R = \frac{SC}{2} = IA = IB = IC = ID$.

d/ <u>Hình chóp đều</u>.



Cho hình chóp đều $S.ABC...$

- Gọi O là tâm của đáy $\Rightarrow SO$ là trục của đáy.
- Trong mặt phẳng xác định bởi SO và một cạnh bên, chẳng hạn như $mp(SAO)$, ta vẽ đường trung trực của cạnh SA là Δ cắt SA tại M và cắt SO tại I $\Rightarrow I$ là tâm của mặt cầu.
- Bán kính:

  Ta có: $\Delta SMI \sim \Delta SOA \Rightarrow \frac{SM}{SO} = \frac{SI}{SA} \Rightarrow$ Bán kính là:

  $$R = IS = \frac{SM.SA}{SO} = \frac{SA^2}{2SO} = IA = IB = IC = ...$$

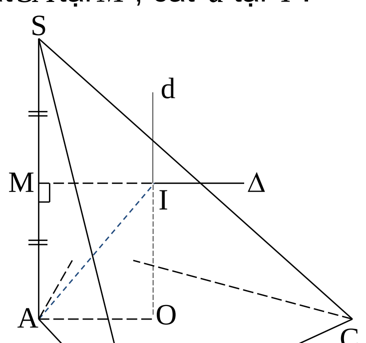
e/ <u>Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy</u>.

Cho hình chóp $S.ABC...$ có cạnh bên $SA \perp$ đáy $(ABC...)$ và đáy $ABC...$ nội tiếp được trong đường tròn tâm O. Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC...$ được xác định như sau:

- Từ tâm O ngoại tiếp của đường tròn đáy, ta vẽ đường thẳng d vuông góc với $mp(ABC...)$ tại O.
- Trong $mp(d, SA)$, ta dựng đường trung trực Δ của cạnh SA, cắt SA tại M, cắt d tại I.

  $\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

  và bán kính $R = IA = IB = IC = IS = ...$
- <u>Tìm bán kính</u>:



Ta có: $MIOB$ là hình chữ nhật.

Xét ΔMAI vuông tại M có:

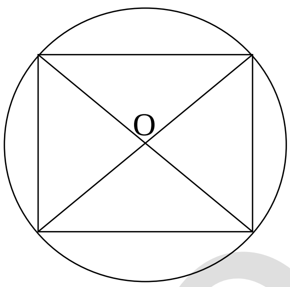
$$R = AI = \sqrt{MI^2 + MA^2} = \sqrt{AO^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2}.$$

f/ <u>Hình chóp khác</u>.

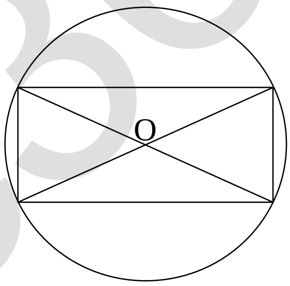
- Dựng trục Δ của đáy.
- Dựng mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên bất kì.
- $(\alpha) \cap \Delta = I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.
- Bán kính: khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

g/ <u>Đường tròn ngoại tiếp một số đa giác thường gặp.</u>

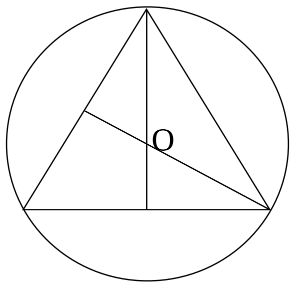
Khi xác định tâm mặt cầu, ta cần xác định trục của mặt phẳng đáy, đó chính là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đáy tại tâm O của đường tròn ngoại tiếp đáy. Do đó, việc xác định tâm ngoại O là yếu tố rất quan trọng của bài toán.



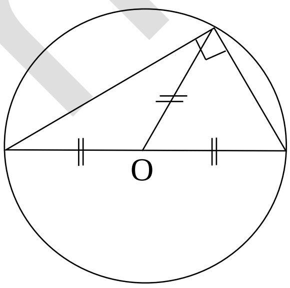
Hình vuông: O là giao điểm 2 đường chéo.



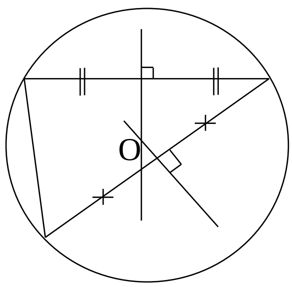
Hình chữ nhật: O là giao điểm của hai đường chéo.



Δ đều: O là giao điểm của 2 đường trung tuyến (trong



Δ vuông: O là trung điểm của cạnh huyền.

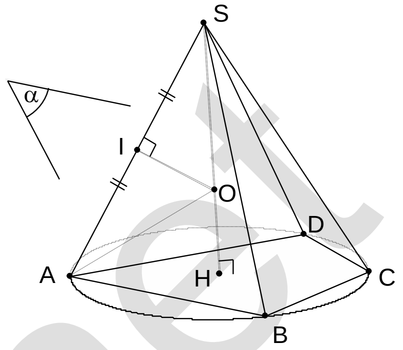


Δ thường: O là giao điểm của hai đường trung trực của hai

II. KỸ THUẬT XÁC ĐỊNH MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHÓP.

Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ (thoả mãn điều kiện tồn tại mặt cầu ngoại tiếp). *Thông thường, để xác định mặt cầu ngoại tiếp hình chóp ta thực hiện theo hai bước:*

<u>Bước 1</u>: Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy. Dựng Δ : trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.



<u>Bước 2</u>: Lập mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên.

Lúc đó :

- Tâm O của mặt cầu: $\Delta \cap \text{mp}(\alpha) = \{O\}$

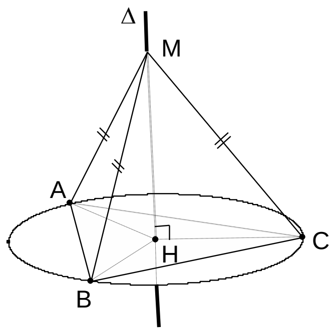
- Bán kính: $R = SA(= SO)$. Tuỳ vào từng trường hợp.

Lưu ý: Kỹ năng xác định trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

1. Trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy: là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp đáy và vuông góc với mặt phẳng đáy.

Tính chất: $\forall M \in \Delta$: $MA = MB = MC$

Suy ra: $MA = MB = MC \Leftrightarrow M \in \Delta$



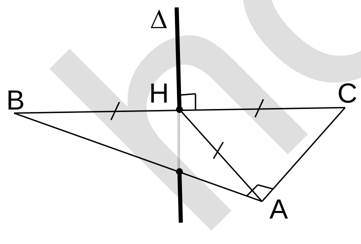
2. Các bước xác định trục:

- <u>Bước 1:</u> Xác định tâm H của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy.

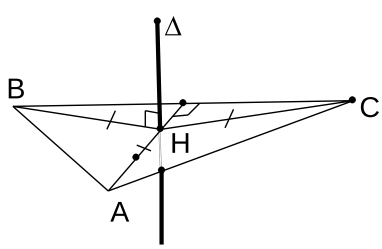
- <u>Bước 2:</u> Qua H dựng Δ vuông góc với mặt phẳng đáy.

VD: *Một số trường hợp đặc biệt*

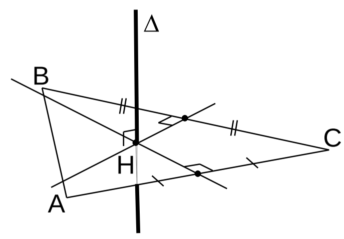
a. <u>Tam giác vuông</u>



b. <u>Tam giác đều</u>

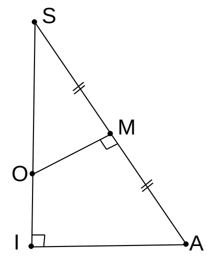


c. <u>Tam giác bất kì</u>



3. **Lưu ý:** *Kỹ năng tam giác đồng dạng*

$\boxed{\Delta SMO \text{ đồng dạng với } \Delta SIA \Rightarrow \dfrac{SO}{SA} = \dfrac{SM}{SI}.}$

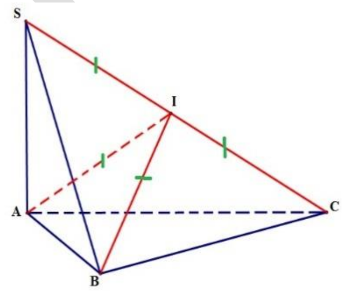


4. **Nhận xét quan trọng**:

$$\exists M, S : \begin{cases} MA = MB = MC \\ SA = SB = SC \end{cases} \Rightarrow \text{SM là trục đường tròn ngoại tiếp } \Delta ABC.$$

5. Ví dụ: Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

Dạng 1: Chóp có các điểm cùng nhìn một đoạn dưới một góc vuông.



Ví dụ: *Cho* $S.ABC : \begin{cases} SA \perp (ABC) \\ \Delta ABC \perp B \end{cases}$. *Theo đề bài:*

$$\begin{cases} BC \perp AB(gt) \\ BC \perp SA\left(SA \perp (ABC)\right) \end{cases}$$

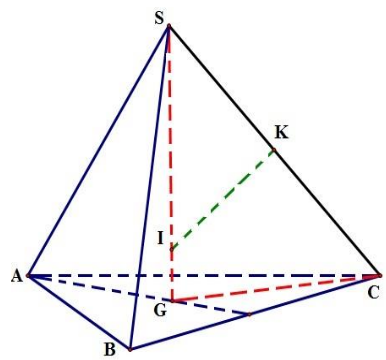
$\Rightarrow$ *BC* $\perp$ *(SAB)* $\Rightarrow$ *BC* $\perp$ *SB*

Ta có B và A nhìn SC dưới một góc vuông

$\Rightarrow$ *nên B và A cùng nằm trên một mặt cầu có đường kính là SC.*

Gọi I *là trung điểm* $SC \Rightarrow I$ *là tâm MCNT khối chóp* $S.ABC$ *và bán kính* $R = SI$.

Dạng 2: Chóp có các cạnh bên bằng nhau.



Ví dụ: *Cho hình chóp tam giác đều* $S.ABC$.

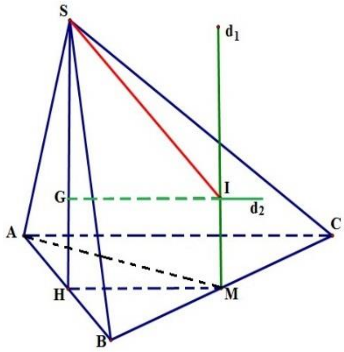
+ Vẽ $SG \perp (ABC)$ *thì* G *là tâm đường tròn ngoại tiếp* ΔABC.

+ Trên mặt phẳng (SGC), *vẽ đường trung trực của* SC, *đường này cắt* SG *tại* I *thì* I *là tâm mặt cầu ngoại tiếp* $S.ABC$ *và bán kính* $R = IS$.

+ Ta có $\Delta SGC \sim \Delta SKI\,(g-g) \Rightarrow \dfrac{SG}{SK} = \dfrac{SC}{SI} \Rightarrow \boxed{R = \dfrac{SC.SK}{SG} = \dfrac{SC^2}{2SG}}$

Dạng 3: Chóp có một mặt bên vuông góc với đáy.

Ví dụ: *Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Mặt bên $(SAB)\perp(ABC)$ và ΔSAB đều. Gọi H,M lần lượt là trung điểm của AB,AC.*



Ta có M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC (do $MA=MB=MC$).

Dựng d_1 là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC (d_1 qua M và song song SH).

*Gọi G là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔSAB và d_2 là trục đường tròn ngoại tiếp ΔSAB, d_2 cắt d_1 tại $I \Rightarrow I$ là tâm **mặt cầu ngoại tiếp** khối chóp $S.ABC$*

$\Rightarrow$ Bán kính $R=SI$. Xét $\Delta SGI \to SI=\sqrt{GI^2+SG^2}$.

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN CỔ ĐIỂN

MẶT CẦU – MẶT NÓN – MẶT TRỤ

NHẬN BIẾT – THÔNG HIỂU

*** MẶT CẦU**

Câu 1. Cho một mặt cầu có diện tích là S, thể tích khối cầu đó là V. Tính bán kính R của mặt cầu.

A. $R=\dfrac{3V}{S}$. B. $R=\dfrac{S}{3V}$. C. $R=\dfrac{4V}{S}$. D. $R=\dfrac{V}{3S}$.

Hướng dẫn giải:

Ta có công thức tính diện tích mặt cầu và thể tích hình cầu là: $S=4\pi r^2; V=\dfrac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \dfrac{3V}{S}=r$.

Câu 2. Cho mặt cầu $S(O;R)$ và điểm A cố định với $OA=d$. Qua A, kẻ đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu $S(O;R)$ tại M. Công thức nào sau đây được dùng để tính độ dài đoạn thẳng AM ?

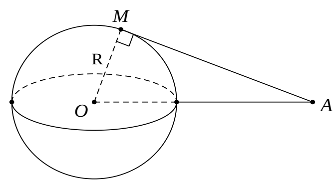
A. $\sqrt{d^2-R^2}$. B. $\sqrt{2R^2-d^2}$. C. $\sqrt{R^2-2d^2}$. D. $\sqrt{d^2+R^2}$.

Hướng dẫn giải:

Vì Δ tiếp xúc với $S(O;R)$ tại M nên $OM\perp\Delta$ tại M.

Xét tam giác OMA vuông tại M, ta có:

$AM^2=OA^2-OM^2=d^2-R^2 \Rightarrow AM=\sqrt{d^2-R^2}$.



Câu 3. Một hình hộp chữ nhật có ba kích thước là a,b,c. Gọi (S) là mặt cầu đi qua 8 đỉnh của hình hộp chữ nhật đó. Tính diện tích của hình cầu (S) theo a,b,c.

A. $\pi(a^2+b^2+c^2)$. B. $2\pi(a^2+b^2+c^2)$.

C. $4\pi(a^2+b^2+c^2)$. D. $\dfrac{\pi}{2}(a^2+b^2+c^2)$.

Hướng dẫn giải:

Đường kính của mặt cầu (S) chính là đường chéo của hình hộp chữ nhật, nên mặt cầu (S) có bán kính $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Do đó diện tích mặt cầu (S) là: $S=4\pi r^2=\pi(a^2+b^2+c^2)$.

Câu 4. Một hình hộp chữ nhật có ba kích thước là a,b,c . Gọi (S) là mặt cầu đi qua 8 đỉnh của hình hộp chữ nhật đó. Tâm của mặt cầu (S) là

A. tâm của hình hộp chữ nhật.

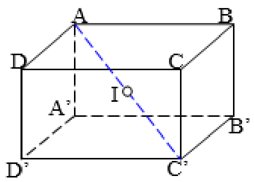
B. tâm của một mặt bên của hình hộp chữ nhật.

C. trung điểm của một cạnh của hình hộp chữ nhật.

D. một đỉnh bất kì của hình hộp chữ nhật.

Hướng dẫn giải:

Tâm của hình hộp chữ nhật cách đều 8 đỉnh của hình hộp nên tâm của mặt cầu (S) chính là tâm của hình hộp chữ nhật.

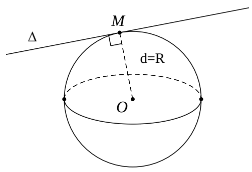


Câu 5. Cho mặt cầu $S(O;R)$ và đường thẳng Δ . Biết khoảng cách từ O tới Δ bằng d . Đường thẳng Δ tiếp xúc với $S(O;R)$ khi thỏa mãn điều kiện nào trong các điều kiện sau ?

A. $d=R$. B. $d>R$. C. $d<R$. D. $d\neq R$.

Hướng dẫn giải:

Đường thẳng Δ tiếp xúc với $S(O;R)$ khi $d=R$.

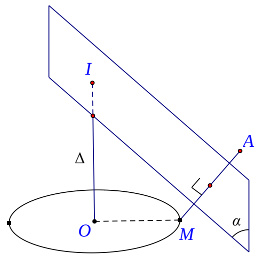


Câu 6. Cho đường tròn (C) và điểm A nằm ngoài mặt phẳng chứa (C). Có tất cả bao nhiêu mặt cầu chứa đường tròn (C) và đi qua A?

A. 1. B. 0. C. 2. D. vô số.

Hướng dẫn giải:

Trên đường tròn (C) lấy điểm điểm M_0 cố định. Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của AM_0 và đường thẳng Δ là trục của (C). Gọi I giao điểm của (α) và Δ thì mặt cầu tâm I thỏa mãn yêu cầu đề bài.



Ta sẽ chứng minh tâm I là duy nhất. Giả sử M là điểm bất kì khác nằm trên đường tròn (C), gọi (α') là mặt phẳng trung trực của AM và $I'=(\alpha')\cap\Delta$ thì mặt cầu tâm tâm I' thỏa mãn yêu cầu đề bài. Ta có:

$I'A=I'M=I'M_0 \Rightarrow I'$ thuộc mặt phẳng trung trực (α) của AM_0 nên $I'=(\alpha)\cap\Delta$.

Từ đó suy ra $I' \equiv I$. Vậy chỉ có duy nhất 1 mặt cầu thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 7. Cho hai điểm A, B phân biệt. Tập hợp tâm những mặt cầu đi qua A và B là

A. mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.

B. đường thẳng trung trực của AB.

C. mặt phẳng song song với đường thẳng AB.

D. trung điểm của đoạn thẳng AB.

Hướng dẫn giải:

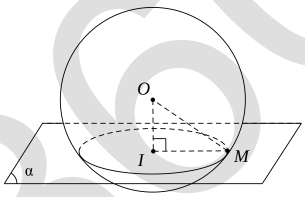
Gọi I là tâm mặt cầu đi qua hai điểm A, B cố định và phân biệt thì ta luôn có $IA = IB$. Do đó I thuộc mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

Câu 8. Cho mặt cầu $S(O;R)$ và mặt phẳng (α). Biết khoảng cách từ O tới (α) bằng d. Nếu $d < R$ thì giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt cầu $S(O;R)$ là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{R^2 - d^2}$. B. $\sqrt{R^2 + d^2}$. C. $\sqrt{Rd}$. D. $\sqrt{R^2 - 2d^2}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi I là hình chiếu của O lên (α) và M là điểm thuộc đường giao tuyến của (α) và mặt cầu $S(O;R)$. Xét tam giác OIM vuông tại I, ta có: $OM = R$ và $OI = d$ nên $IM = \sqrt{R^2 - d^2}$.

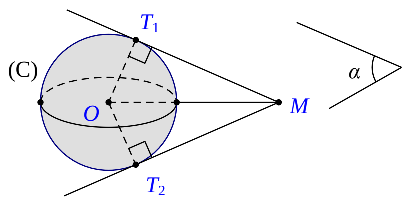


Câu 9. Từ điểm M nằm ngoài mặt cầu $S(O;R)$ có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến với mặt cầu ?

A. Vô số. B. 0. C. 1. D. 2.

Hướng dẫn giải:

+ Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng MO thì dễ dàng thấy rằng mp(α) luôn cắt mặt cầu $S(O;R)$ theo giao tuyến là đường tròn (C) có tâm O, bán kính R. Trong mp(α), ta thấy từ điểm M nằm ngoài (C) ta luôn kẻ được 2 tiếp tuyến MT_1, MT_2 với đường tròn (C). Hai tiếp tuyến này cũng chính là tiếp tuyến với mặt cầu $S(O;R)$.



+ Do có vô số mặt phẳng (α) chứa đường thẳng MO cắt mặt cầu $S(O;R)$ theo các giao tuyến là đường tròn (C) khác nhau nên cũng có vô số tiếp tuyến với mặt cầu được kẻ từ điểm M nằm ngoài mặt cầu.

Câu 10. Một đường thẳng d thay đổi qua A và tiếp xúc với mặt cầu $S(O;R)$ tại M. Gọi H là hình chiếu của M lên đường thẳng OA. M thuộc mặt phẳng nào trong những mặt phẳng sau đây?

A. Mặt phẳng qua H và vuông góc với OA.

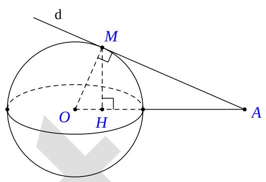
B. Mặt phẳng trung trực của OA.

C. Mặt phẳng qua O và vuông góc với AM.

D. Mặt phẳng qua A và vuông góc với OM.

✍ Hướng dẫn giải:

Trong mặt phẳng (d,O), xét tam giác OMA vuông tại M có MH là đường cao. Ta có: $OM^2 = OH.OA \Rightarrow OH = \frac{R^2}{2R} = \frac{R}{2}$. Do đó H cố định. Vậy M thuộc mặt phẳng vuông góc với OA tại H.

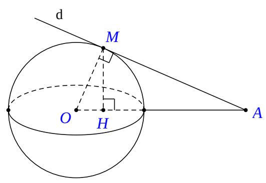


Câu 11. Một đường thẳng thay đổi d qua A và tiếp xúc với mặt cầu $S(O;R)$ tại M. Gọi H là hình chiếu của M lên đường thẳng OA. Độ dài đoạn thẳng MH tính theo R là:

A. $\frac{R\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{R}{2}$. C. $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{3R\sqrt{3}}{4}$.

✍ Hướng dẫn giải:

Trong mặt phẳng (d,O), xét tam giác OMA vuông tại M có MH là đường cao. Ta có: $MH^2 = HO.HA \Rightarrow MH^2 = \frac{R}{2}.\frac{3R}{2} \Rightarrow MH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.



Câu 12. Thể tích của một khối cầu là $113\frac{1}{7}\,\text{cm}^3$ thì bán kính nó là bao nhiêu ? (lấy $\pi \approx \frac{22}{7}$)

A. $3\,\text{cm}$. B. $2\,\text{cm}$. C. $4\,\text{cm}$. D. $6\,\text{cm}$.

✍ Hướng dẫn giải:

Thể tích khối cầu bán kính R là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R^3 = \frac{3V}{4\pi} = \frac{3.113\frac{1}{7}}{4.\frac{22}{7}} = 27 \Rightarrow R = 3$ (cm).

Câu 13. Khinh khí cầu của nhà Mông–gôn–fie (Montgolfier) (người Pháp) phát minh ra khinh khí cầu dùng khí nóng. Coi khinh khí cầu này là một mặt cầu có đường kính 11m thì diện tích của mặt khinh khí cầu là bao nhiêu? (lấy $\pi \approx \frac{22}{7}$ và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

A. $379,94\ (\text{m}^2)$. B. $697,19\ (\text{m}^2)$. C. $190,14\,\text{cm}$. D. $95,07\ (\text{m}^2)$.

✍ Hướng dẫn giải:

Diện tích của kinh khí cầu là $S = \pi d^2 = \frac{22}{7}.11^2 = 379,94\ (\text{m}^2)$.

Câu 14. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh là $10\,\text{cm}$. Gọi O là tâm mặt cầu đi qua 8 đỉnh của hình lập phương. Khi đó, diện tích S của mặt cầu và thể tích V của hình cầu là:

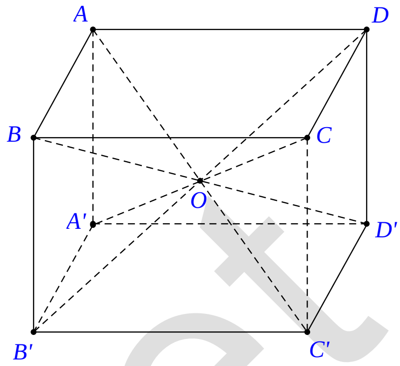
A. $S = 300\pi\,(\text{cm}^2); V = 500\sqrt{3}\,(\text{cm}^3)$.

B. $S = 100\sqrt{3}\pi\,(\text{cm}^2); V = 500\,(\text{cm}^3)$.

C. $S = 150\pi\,(\text{cm}^2); V = 125\sqrt{3}\,(\text{cm}^3)$.

D. $S = 250\pi\,(\text{cm}^2); V = 500\sqrt{6}\,(\text{cm}^3)$.

✍ Hướng dẫn giải:



Dễ thấy tâm O của mặt cầu chính là tâm của hình lập phương.

Trong tam giác vuông $AA'C$ có: $AC'^2 = AA'^2 + A'C'^2$.

Trong tam giác vuông $A'B'C'$ có: $A'C'^2 = A'B'^2 + B'C'^2$.

Do đó $AC^2 = 100 + 100 + 100 = 300 \Rightarrow AC = 10\sqrt{3}$ (cm).

+ Bán kính mặt cầu tâm O là $R = OA = \frac{1}{2}AC = 5\sqrt{3}$ (cm)

+ Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = 4\pi.\left(5\sqrt{3}\right)^2 = 300\pi\,(\text{cm}^2)$.

+ Thể tích khối cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(5\sqrt{3}\right)^3 = 500\sqrt{3}\,(\text{cm}^3)$.

Câu 15. Cho đường tròn (C) ngoại tiếp một tam giác đều ABC có cạnh bằng a, chiều cao AH. Quay đường tròn (C) xung quanh trục AH, ta được một mặt cầu. Thể tích của khối cầu tương ứng là:

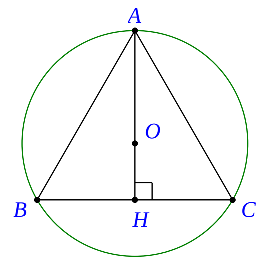
A. $\frac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27}$.

B. $\frac{4\pi a^3}{9}$.

C. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{54}$.

D. $\frac{4\pi a^3}{3}$.

✍ Hướng dẫn giải:



AH là đường cao trong tam giác đều cạnh a nên $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp ΔABC, thì $O \in AH$ và $OA = \frac{2}{3}AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

.

Bán kính mặt cầu được tạo thành khi quay đường tròn (C) quanh trục AH là $R = OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy thể tích của khối cầu tương ứng là: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27}$ (đvtt).

Câu 16. Cho đường tròn (C) ngoại tiếp một tam giác đều ABC có cạnh bằng a, chiều cao AH. Quay đường tròn (C) xung quanh trục AH, ta được một mặt cầu. Thể tích của khối cầu tương ứng là:

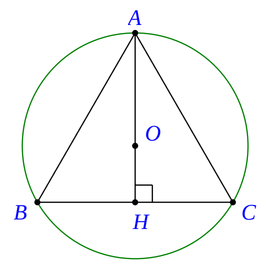
A. $\frac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27}$.

B. $\frac{4\pi a^3}{9}$.

C. $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{54}$.

D. $\frac{4\pi a^3}{3}$.

✍ Hướng dẫn giải:



AH là đường cao trong tam giác đều cạnh a nên $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp ΔABC, thì $O \in AH$ và $OA = \frac{2}{3}AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

.

Bán kính mặt cầu được tạo thành khi quay đường tròn (C) quanh trục AH là $R = OA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy thể tích của khối cầu tương ứng là: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \dfrac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27}$ (đvtt).

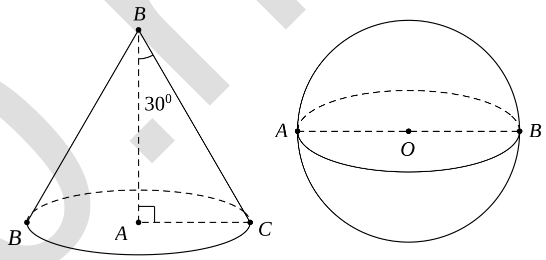
Câu 17. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a$ và $B = 30^0$. Quay tam giác vuông này quanh trục AB, ta được một hình nón đỉnh B. Gọi S_1 là diện tích toàn phần của hình nón đó và S_2 là diện tích mặt cầu có đường kính AB. Khi đó, tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}$ là:

A. $\dfrac{S_1}{S_2} = 1$. B. $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{1}{2}$. C. $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{2}{3}$. D. $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Xét tam giác ABC vuông tại A, ta có:

$AC = BC\sin 30^0 = a; AB = BC\cos 30^0 = a\sqrt{3}$.



Diện tích toàn phần hình nón là:

$S_1 = S_{xq} + S_{day} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi a.2a + \pi a^2 = 3\pi a^2$.

Diện tích mặt cầu đường kính AB là:

$S_2 = \pi AB^2 = \pi\left(a\sqrt{3}\right)^2 = 3\pi a^2$.

Từ đó suy ra, tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2} = 1$.

*** MẶT NÓN**

Câu 18. Cho hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều cạnh $2a$, diện tích xung quanh là S_1 và mặt cầu có đường kính bằng chiều cao hình nón, có diện tích S_2. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

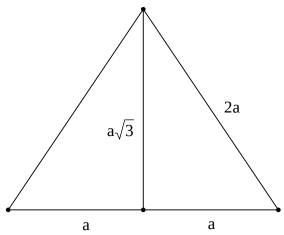
A. $S_1 = S_2$. B. $S_1 = 4S_2$. C. $S_2 = 2S_1$. D. $2S_2 = 3S_1$.

Hướng dẫn giải:

Bán kính đáy của hình nón là a. Đường sinh của hình nón là $2a$.

Do đó, ta có $S_1 = \pi Rl = 3\pi a^2$ (1)

Mặt cầu có bán kính là $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, nên ta có $S_2 = 4\pi\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi a^2$ (2).

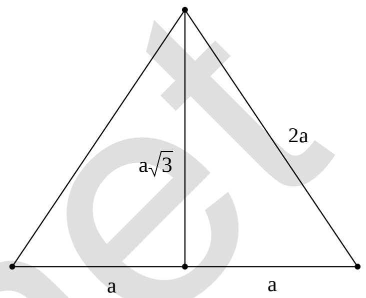


Từ (1) và (2) suy ra $S_1 = S_2$.

Câu 19. Cho hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều cạnh $2a$, có thể tích V_1 và hình cầu có đường kính bằng chiều cao hình nón, có thể tích V_2. Khi đó, tỉ số thể tích $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{2}{3}$. B. $\dfrac{V_1}{V_2}=1$. C. $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{2}$. D. $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{3}$.

✍ Hướng dẫn giải:



Hình nón có bán kính đáy là a, chiều cao $a\sqrt{3}$.

Do đó thể tích $V_1=\dfrac{1}{3}\pi a^2 a\sqrt{3}=\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$.

Hình cầu có bán kính $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên có thể tích

$V_1=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3=\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$.

Từ đó suy ra $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{2}{3}$.

Câu 20. Tính diện tích xung quanh của hình trụ biết hình trụ có bán kính đáy a và đường cao là $a\sqrt{3}$.

A. $2\pi a^2\sqrt{3}$. B. $2\pi a^2$. C. πa^2. D. $\pi a^2\sqrt{3}$.

✍ Hướng dẫn giải:

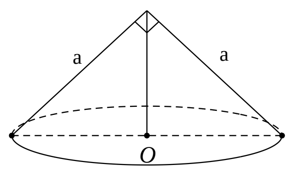
Hình trụ có bán kính đáy a và đường cao $a\sqrt{3}$ nên $S_{xq}=2\pi rh=2\pi a.a\sqrt{3}=2\pi a^2\sqrt{3}$.

Câu 21. Một hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a. Tính diện tích xung quanh của hình nón.

A. $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$. B. $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{4}$. C. $\pi a^2\sqrt{2}$. D. $\dfrac{2\pi a^2\sqrt{2}}{3}$.

✍ Hướng dẫn giải:

Thiết diện qua trục là một tam giác vuông cạnh a nên đường sinh của hình nón là a và bán kính đáy là $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ nên $S_{xq}=\pi\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.a=\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$.

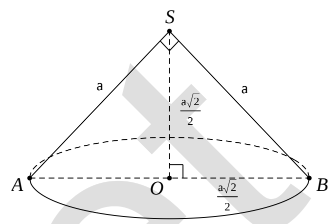


Câu 22. Thiết diện đi qua trục của hình nón đỉnh S là tam giác vuông cân SAB có cạnh cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Diện tích toàn phần S_{tp} của hình nón và thể tích V của khối nón tương ứng đã cho là

A. $S_{tp}=\dfrac{\pi a^2(1+\sqrt{2})}{2};V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{12}$. B. $S_{tp}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2};V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{4}$.

C. $S_{tp} = \pi a^2(1+\sqrt{2}); V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{6}$. D. $S_{tp} = \dfrac{\pi a^2(\sqrt{2}-1)}{2}; V = \dfrac{\pi a^3}{12}$.

✍ Hướng dẫn giải:



+ Do thiết diện đi qua trục là tam giác ΔSAB vuông cân tại đỉnh S, có cạnh huyền $AB = a\sqrt{2}$ nên suy ra bán kính đáy hình nón là $r = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; đường sinh hình nón $l = SA = SB = a$; đường cao hình nón $h = SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

+ Diện tích toàn phần hình nón là:

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{day} = \pi rl + \pi r^2 = \pi\frac{a\sqrt{2}}{2}a + \pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi a^2}{2} = \frac{\pi a^2(1+\sqrt{2})}{2}$$ (đvdt).

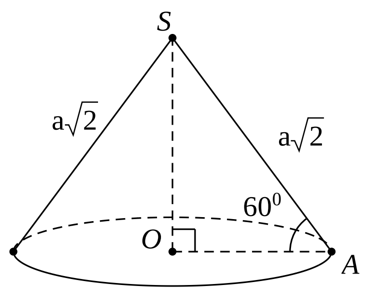
+ Thể tích khối nón tương ứng là: $V = \dfrac{1}{2}Bh = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{12}$ (đvtt).

Câu 23. Cho hình nón tròn xoay có đỉnh là S, O là tâm của đường tròn đáy, đường sinh bằng $a\sqrt{2}$ và góc giữa đường sinh và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón và thể tích V của khối nón tương ứng là:

A. $S_{xq} = \pi a^2; V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{12}$. B. $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2}{2}; V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{12}$.

C. $S_{xq} = \pi a^2\sqrt{2}; V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{4}$. D. $S_{xq} = \pi a^2; V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{4}$.

✍ Hướng dẫn giải:



Gọi A là một điểm thuộc đường tròn đáy hình nón. Theo giải thiết ta có đường sinh $SA = a\sqrt{2}$ và góc giữa đường sinh và mặt phẳng đáy là $SAO = 60^0$. Trong tam giác vuông SAO, ta có:

$$OA = SA\cos 60^0 = \frac{a\sqrt{2}}{2};\ SO = SA.\sin 60^0 = a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Diện tích xung quanh hình nón $S_{xq} = \pi rl = \pi.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.a\sqrt{2} = \pi a^2$ (đvdt).

Thể tích của khối nón tròn xoay $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\dfrac{a\sqrt{6}}{2} = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{12}$ (đvtt).

Câu 24. Một hình nón có đường kính đáy là $2a\sqrt{3}$, góc ở đỉnh là 120^0. Tính thể tích của khối nón đó theo a.

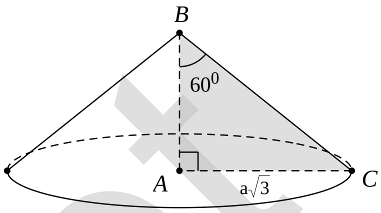
A. πa^3. B. $3\pi a^3$. C. $2\sqrt{3}\pi a^3$. D. $\pi a^3\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi S là đỉnh hình nón, O là tâm đáy, A là một điểm thuộc đường tròn đáy.

Theo giả thiết dễ suy ra đường tròn đáy có bán kính

$R = OA = a\sqrt{3}\,(\text{cm})$



và góc $ASO = \dfrac{120^0}{2} = 60^0$. Xét tam giác SOA vuông tại O, ta có

$SO = \dfrac{OA}{\tan 60^0} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = a$. Do đó chiều cao hình nón là $h = a$.

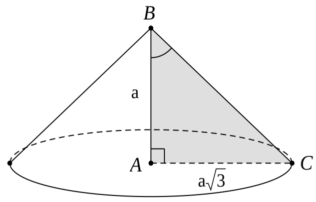
Vậy thể tích khối nón là $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}\pi.3a^2.a = \pi a^3$.

Câu 25. Trong không gian, cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = a$ và $AC = \sqrt{3}a$. Tính độ dài đường sinh *l* của hình nón, nhận được khi quay tam giác ABC xung quanh trục AB.

A. $l = 2a$. B. $l = \sqrt{2}a$. C. $l = \sqrt{3}a$. D. $l = a$.

Hướng dẫn giải:

Độ dài đường sinh l bằng độ dài cạnh BC của tam giác vuông ABC.



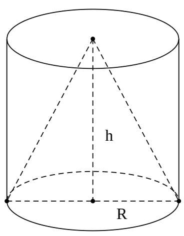
Theo định lý Pytago thì $BC^2 = AB^2 + AC^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 \Rightarrow BC = 2a$

Vậy độ dài đường sinh của hình nón là $l = 2a$.

*** MẶT TRỤ**

Câu 26. Cho một hình trụ có bán kính đáy R, chiều cao h và thể tích V_1; một hình nón có đáy trùng với một đáy của hình trụ, có đỉnh trùng với tâm đáy còn lại của hình trụ (hình vẽ bên dưới) và có thể tích V_2.

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?



A. $V_1 = 3V_2$. B. $V_1 = 2V_2$. C. $V_2 = 3V_1$. D. $V_2 = V_1$.

Hướng dẫn giải:

Hình trụ có bán kính đáy R và chiều cao h nên thể tích $V_1 = \pi R^2 h$.

Hình nón có bán kính đáy R và chiều cao h nên thể tích $V_2 = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h$.

Từ đó suy ra $V_1 = 3V_2$.

Câu 27. Tính thể tích V của khối trụ có bán kính đáy R, chiều cao là h.

A. $V=\pi R^2h$. B. $V=\pi Rh^2$. C. $V=\pi^2Rh$. D. $V=2\pi Rh$.

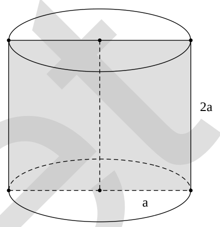
✍ Hướng dẫn giải: Áp dụng công thức thể tích khối trụ, đáp án là $V=\pi R^2h$.

Câu 28. Một hình trụ có bán kính đáy a, có thiết diện qua trục là một hình vuông. Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

A. $4\pi a^2$. B. $2\pi a^2$. C. $3\pi a^2$. D. πa^2.

✍ Hướng dẫn giải:

Một hình trụ có bán kính đáy a, có thiết diện qua trục là một hình vuông nên chiều cao hình trụ bằng $2a$. Do đó diện tích xung quanh hình trụ là $S_{xq}=2\pi Rh=2\pi.a.2a=4\pi a^2$.



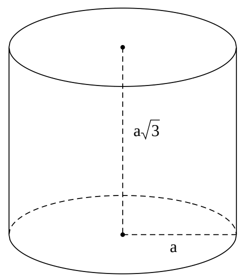
Câu 29. Tính diện tích toàn phần của hình trụ có bán kính đáy a và đường cao $a\sqrt{3}$.

A. $2\pi a^2\left(1+\sqrt{3}\right)$. B. $\pi a^2\sqrt{3}$. C. $\pi a^2\left(1+\sqrt{3}\right)$. D. $2\pi a^2\left(\sqrt{3}-1\right)$.

✍ Hướng dẫn giải:

Ta có: $S_{xq}=2\pi a.a\sqrt{3}=2\pi a^2\sqrt{3}$; $S_{day}=\pi a^2$.

Do đó $S_{tp}=2\pi a^2\sqrt{3}+2\pi a^2=2\pi a^2(1+\sqrt{3})$.



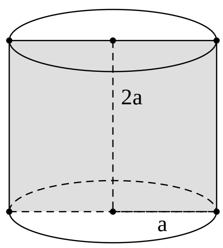
Câu 30. Tính thể tích của khối trụ biết bán kính đáy của hình trụ đó bằng a và thiết diện đi qua trục là một hình vuông.

A. $2\pi a^3$. B. $\frac{2}{3}\pi a^3$. C. $4\pi a^3$. D. πa^3.

✍ Hướng dẫn giải:

Theo bài ra thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông nên hình trụ có bán kính đáy là a, chiều cao $2a$. Do đó thể tích khối trụ là:

$V=\pi R^2h=\pi a^2.2a=2\pi a^3$.

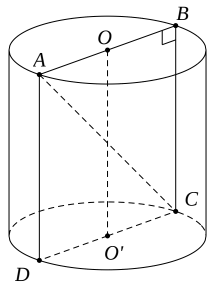


Câu 31. Tính thể tích của khối trụ biết chu vi đáy của hình trụ đó bằng $6\pi\,(\text{cm})$ và thiết diện đi qua trục là một hình chữ nhật có độ dài đường chéo bằng $10\ (\text{cm})$.

A. $72\pi\,(\text{cm}^3)$. B. $24\pi\,(\text{cm}^3)$. C. $48\pi\,(\text{cm}^3)$ D. $18\pi\sqrt{3472}\pi\,(\text{cm}^3)$

✍ Hướng dẫn giải:

Gọi O,O' là hai tâm của đáy hình trụ và thiết diện qua trục là hình chữ nhật $ABCD$.
Do chu vi đáy của hình trụ đó bằng $6\pi\,(\text{cm})$ nên bán kính đáy của hình trụ là $R=\dfrac{C}{2\pi}=\dfrac{6\pi}{2\pi}=3(\text{cm})$.



Vì thiết diện đi qua trục là một hình chữ nhật ABCD có $AC=10\ (\text{cm})$ và $AB=2R=6(\text{cm})$ nên chiều cao của hình trụ là:

$h=OO'=BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$ (cm).

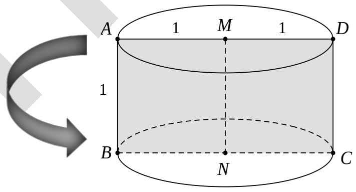
Vậy thể tích khối trụ là: $V=\pi R^2h=\pi.3^2.8=72\pi\,(\text{cm}^3)$.

Câu 32. Trong không gian, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=1$ và $AD=2$. Gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của AD và BC. Quay hình chữ nhật đó xung quanh trục *MN*, ta được một hình trụ. Tính diện tích toàn phần S_{tp} của hình trụ đó.

A. $S_{tp}=4\pi$. B. $S_{tp}=2\pi$. C. $S_{tp}=6\pi$. D. $S_{tp}=10\pi$.

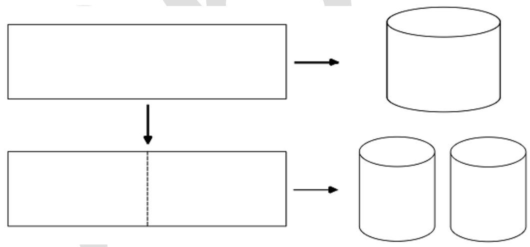
Hướng dẫn giải:

Ta có $S_{tp}=S_{xq}+S_{2day}=2\pi Rh+2\pi R^2=2\pi R(h+R)$.



Hình trụ đã cho có chiều cao là $h=MN=AB=1$ và bán kính đáy $R=\dfrac{AD}{2}=1$. Do đó diện tích toàn phần hình trụ là: $S_{tp}=2\pi(1+1)=4\pi$

Câu 33. Từ một tấm tôn hình chữ nhật kích thước 50cm x 240cm, người ta làm các thùng đựng nước hình trụ có chiều cao bằng 50cm, theo hai cách sau (xem hình minh họa dưới đây):



- Cách 1: Gò tấm tôn ban đầu thành mặt xung quanh của thùng.
- Cách 2: Cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau, rồi gò mỗi tấm đó thành mặt xung quanh của một thùng.

Kí hiệu V_1 là thể tích của thùng gò được theo cách 1 và V_2 là tổng thể tích của hai thùng gò được theo cách 2. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

A. $\dfrac{V_1}{V_2}=2$. B. $\dfrac{V_1}{V_2}=1$. C. $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{1}{2}$. D. $\dfrac{V_1}{V_2}=4$.

Hướng dẫn giải:

Gọi R và r lần lượt là bán kính đáy của mỗi thùng đựng nước hình trụ được làm theo cách 1 và cách 2.

Gọi C_1 và C_2 lần lượt là chu vi đáy của mỗi thùng đựng nước hình trụ được làm theo cách 1 và cách 2.

Ta có: $\begin{cases} C_1=2\pi R \\ C_2=2\pi r \end{cases} \Rightarrow \dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{R}{r}=2$ (vì cắt tấm tôn ban đầu thành hai tấm bằng nhau nên $C_1=2C_2$).

Thùng làm theo cả hai cách đều có cùng chiều cao h nên ta có: $\begin{cases} V_1 = \pi R^2 h \\ V_2 = 2\pi r^2 h \end{cases} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2 = 2.$

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN CỔ ĐIỂN

MẶT CẦU – MẶT NÓN – MẶT TRỤ

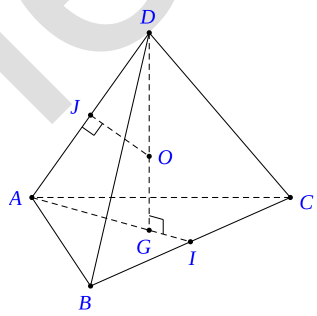
VẬN DỤNG THẤP

Câu 34. Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện đều cạnh a.

A. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh a. Gọi I là trung điểm cạnh BC, G là trọng tâm của tam giác ABC. Ta có $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}; AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và DG là trục của tam giác ABC. Trong mp(DAG) kẻ trung trực của DA cắt DG tại O thì $OD = OA = OB = OC$ nên O chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Bán kính R của mặt cầu bằng độ dài đoạn OD.



Trong tam giác ADG vuông tại G, ta có:

$$DA^2 = DG^2 + GA^2 \Rightarrow DG^2 = DA^2 - GA^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{6a^2}{9}$$

$$\Rightarrow DG = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

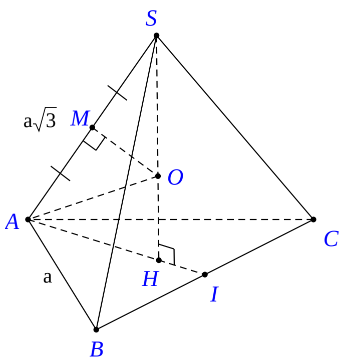
Mặt khác do tứ giác $AGOI$ nội tiếp nên ta có: $DJ.DA = DO.DG \Rightarrow DO = \frac{DA^2}{2DG} \Rightarrow R = DO = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Câu 35. Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp tam giác đều $S.ABC$, biết các cạnh đáy có độ dài bằng a, cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$.

A. $\frac{3a\sqrt{6}}{8}$. B. $\frac{3a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{8}$. D. $\frac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi H là tâm của tam giác đều ABC, ta có $SH \perp (ABC)$ nên SH là trục của tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của SA, trong mp(SAH) kẻ trung trực của SA cắt SH tại O thì $OS = OA = OB = OC$ nên O chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Bán kính mặt cầu là $R = SO$.



Vì hai tam giác SMO và SHA đồng dạng nên ta có $\dfrac{SO}{SA} = \dfrac{SM}{SH}$.

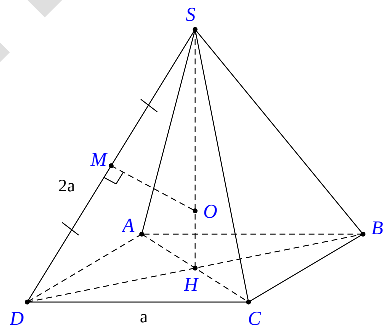
Suy ra $R = SO = \dfrac{SM.SA}{SH} = \dfrac{SA^2}{2SH} = \dfrac{3a\sqrt{6}}{8}$.

Câu 36. Tính bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$.

A. $\dfrac{2a\sqrt{14}}{7}$. B. $\dfrac{2a\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$. C. $\dfrac{2a\sqrt{7}}{3\sqrt{2}}$. D. $\dfrac{2a\sqrt{2}}{7}$.

Hướng dẫn giải:

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi H là tâm đáy thì SH là trục của hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của SD, trong mp (SDH) kẻ trung trực của đoạn SD cắt SH tại O thì $OS = OA = OB = OC = OD$ nên O chính là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$. Bán kính mặt cầu là $R = SO$.



Ta có $\Delta SMO \backsim \Delta SHD \Rightarrow \dfrac{SO}{SD} = \dfrac{SM}{SH} \Rightarrow R = SO = \dfrac{SD.SM}{SH} = \dfrac{SD^2}{2SH}$.

Với $SH^2 = SD^2 - HD^2 = 4a^2 - \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{7a^2}{2} \Rightarrow SH = \dfrac{a\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$.

Vậy $R = \dfrac{SD^2}{2SH} = \dfrac{2a\sqrt{14}}{7}$.

Câu 37. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho.

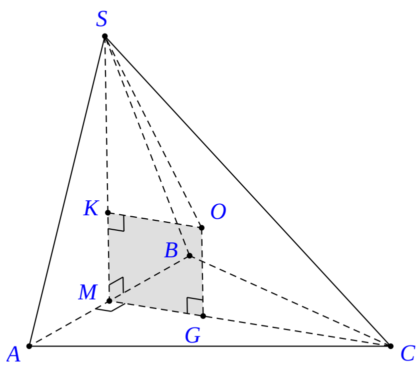
A. $V = \dfrac{5\sqrt{15}\pi}{54}$. B. $V = \dfrac{5\sqrt{15}\pi}{18}$. C. $V = \dfrac{4\sqrt{3}\pi}{27}$. D. $V = \dfrac{5\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi M là trung điểm của AB thì $SM \perp AB$ (vì tam giác SAB đều). Mặt khác do $(SAB) \perp (ABC)$ nên $SM \perp (ABC)$.

Tương tự: $CM \perp (SAB)$.

Gọi G và K lần lượt là tâm của các tam giác ABC và SAB.



Trong mặt phẳng (SMC), kẻ đường thẳng $Gx//SM$ và kẻ đường thẳng $Ky//SM$. Gọi $O = Gx \cap Ky$, thì ta có: $\begin{cases} OG \perp (SAB) \\ OK \perp (ABC) \end{cases}$

Suy ra OG, OK lần lượt là trục của tam giác ABC và SAB.

Do đó ta có: $OA = OB = OC = OD = OS$ hay O chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Tứ giác $OKMN$ là hình chữ nhật có $MK = MG = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ nên $OKMN$ là hình vuông. Do đó $OK = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

Mặt khác $SK = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Xét tam giác SKO vuông tại K có $OS = \sqrt{OK^2 + SK^2} = \sqrt{\dfrac{3}{36} + \dfrac{3}{9}} = \dfrac{\sqrt{15}}{6}$.

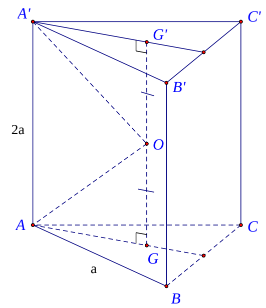
Suy ra bán kính mặt cầu cần tìm là $R = OS = \dfrac{\sqrt{15}}{6}$. Vậy thể tích khối cầu cần tìm là:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi.\left(\frac{\sqrt{15}}{6}\right)^3 = \frac{5\sqrt{15}\pi}{54}.$$

Câu 38. Một hình lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đó.

A. $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. B. $\dfrac{a\sqrt{12}}{6}$. C. $\dfrac{a\sqrt{39}}{6}$. D. $\dfrac{4a}{\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải:



Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Gọi G, G' lần lượt là tâm của hai đáy ABC và $A'B'C'$. Ta có GG' chính là trục của các tam giác ABC và $A'B'C'$.

Gọi O là trung điểm của GG' thì O cách đều 6 đỉnh của hình lăng trụ nên là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ. Bán kính mặt cầu là $R = OA$.

Xét tam giác OAG vuông tại G, ta có:

$OA = \sqrt{AG^2 + GO^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{3} + a^2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. Vậy bán kính mặt cầu cần tìm là

$$R = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

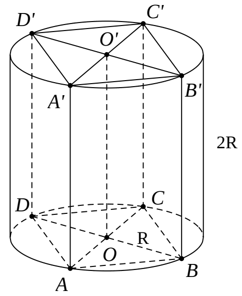
Câu 39. Cho hình trụ có bán kính đáy là R, thiết diện qua trục là một hình vuông. Tính thể tích khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong hình trụ đã cho theo R.

A. $4R^3$. B. $2\sqrt{2}R^3$. C. $4\sqrt{2}R^3$. D. $8R^3$.

✍ Hướng dẫn giải:

Giả sử $ABCD.A'B'C'D'$ là lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong hình trụ thì $BDD'B'$ là thiết diện qua trục của hình trụ đã cho nên $BD = BB' = 2R$ và cạnh đáy hình lăng trụ là $R\sqrt{2}$. Do đó thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là

$V = \left(R\sqrt{2}\right)^2.2R = 4R^3$.



Câu 40. Cho hình trụ có bán kính đáy là 4 cm, một mặt phẳng không vuông góc với đáy và cắt hai mặt đáy theo hai dây cung song song $AB, A'B'$ mà $AB = A'B' = 6\,\text{cm}$ (hình vẽ). Biết diện tích tứ giác $ABB'A'$ bằng 60 cm^2. Tính chiều cao của hình trụ đã cho.

A. $6\sqrt{2}$ cm. B. $4\sqrt{3}$ cm. C. $8\sqrt{2}$ cm. D. $5\sqrt{3}$ cm.

✍ Hướng dẫn giải:

Dựng đường sinh $B'C$ và $A'D$, ta có tứ giác $A'B'CD$ là hình chữ nhật nên $CD//A'B'$ và $CD = A'B' = 6\,\text{cm}$. Vậy $CD//AB$ và $CD = AB = 6\,\text{cm}$. Do đó tứ giác $ABCD$ là hình bình hành và nội tiếp được nên là hình chữ nhật. Từ đó $AB \perp BC$, mặt khác $AB \perp B'C$ nên

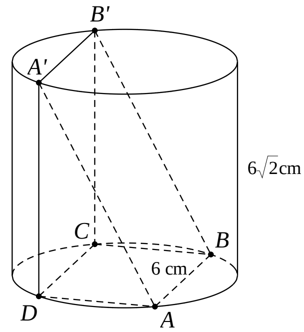
$AB \perp (BCB') \Rightarrow AB \perp BB'$

Vậy $ABB'C'$ là hình bình hành có một góc vuông nên là hình chữ nhật.

Ta có $S_{ABB'A'} = AB.BB'$ nên $BB' = \dfrac{60}{6} = 10\,\text{cm}$. Xét tam giác $BB'C$ vuông tại C có $B'C^2 = BB'^2 - BC^2$ mà $BC^2 = AC^2 - AB^2 = 64 - 36 = 28$ nên

$B'C^2 = 100 - 28 = 72 \Rightarrow B'C = 6\sqrt{2}\,\text{cm}$.

Vậy chiều cao hình trụ là $6\sqrt{2}\,\text{cm}$.



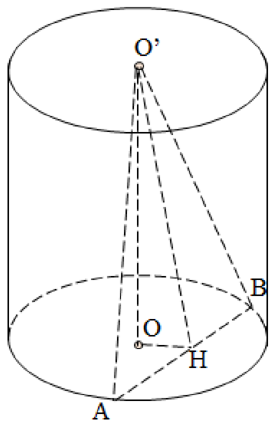
Câu 41. Cho hình trụ tròn xoay có hai đáy là hai hình tròn $(O;R)$ và $(O';R)$. Tồn tại dây cung AB thuộc đường tròn (O) sao cho $\Delta O'AB$ là tam giác đều và mặt phẳng $(O'AB)$ hợp với mặt phẳng chứa đường tròn (O) một góc 60^0. Khi đó, diện tích xung quanh S_{xq} hình trụ và thể tích V của khối trụ tương ứng là:

A. $S_{xq} = \dfrac{6\pi R^2\sqrt{7}}{7}; V = \dfrac{3\pi R^3\sqrt{7}}{7}$. B. $S_{xq} = \dfrac{6\pi R^2\sqrt{7}}{7}; V = \dfrac{3\pi R^3\sqrt{7}}{7}$.

C. $S_{xq} = \dfrac{6\pi R^2\sqrt{7}}{7}; V = \dfrac{3\pi R^3\sqrt{7}}{7}$. D. $S_{xq} = \dfrac{6\pi R^2\sqrt{7}}{7}; V = \dfrac{3\pi R^3\sqrt{7}}{7}$.

✍ Hướng dẫn giải:

* Ta có: $OO' \perp (OAB)$. Gọi H là trung điểm của AB thì $OH \perp AB,\ O'H \perp AB \Rightarrow OHO' = 60^0$.



* Giả sử $OH = x$. Khi đó: $0 < x < R$ và $OO' = x\tan 60^0 = x\sqrt{3}$.

* Xét ΔOAH, ta có: $AH^2 = R^2 - x^2$.

* Vì $\Delta O'AB$ đều nên: $O'A = AB = 2AH = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ (1).

* Mặt khác, $\Delta AOO'$ vuông tại O nên:

$AO'^2 = OO'^2 + R^2 = 3x^2 + R^2$ (2).

* Từ $(1),(2) \Rightarrow 4\left(R^2 - x^2\right) = 3x^2 + R^2 \Rightarrow x^2 = \frac{3R^2}{7}$.

$\Rightarrow h = OO' = x\sqrt{3} = \frac{3R\sqrt{7}}{7}$.

* Vậy, nếu kí hiệu S là diện tích xung quanh và V là thể tích của hình trụ thì, ta có:

$S = 2\pi Rh = \frac{6\pi R^2\sqrt{7}}{7}$; $V = \pi R^2 h = \frac{3\pi R^3\sqrt{7}}{7}$.

Câu 42. Cho một hình trụ tròn xoay và hình vuông $ABCD$ cạnh a có hai đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ nhất của hình trụ, hai đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ hai của hình trụ. Mặt phẳng $(ABCD)$ tạo với đáy hình trụ góc 45^0. Diện tích xung quanh S_{xq} hình trụ và thể tích V của khối trụ là:

A. $S_{xq} = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}; V = \frac{3\sqrt{2}a^3}{16}$.

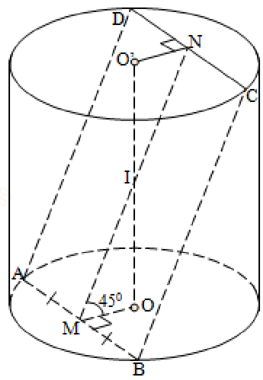
B. $S_{xq} = \frac{\pi a^2\sqrt{2}}{3}; V = \frac{3\sqrt{2}a^3}{32}$.

C. $S_{xq} = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{4}; V = \frac{3\sqrt{3}a^3}{16}$.

D. $S_{xq} = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}; V = \frac{3\sqrt{2}a^3}{8}$.

Hướng dẫn giải:

* Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Khi đó: $OM \perp AB$ và $O'N \perp DC$.
Giả sử I là giao điểm của MN và OO'. Đặt $R = OA,\ h = OO'$.



* Trong ΔIOM vuông cân tại I nên: $OM = OI = \frac{\sqrt{2}}{2}IM$.

$\Rightarrow \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{a}{2} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

* Ta có: $R^2 = OA^2 + AM^2 + MO^2$

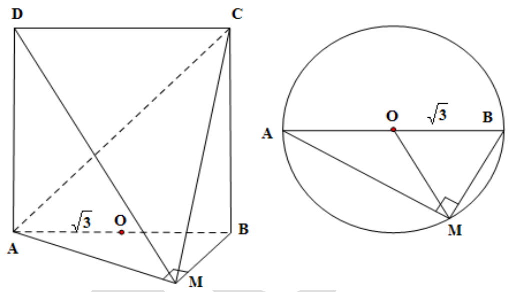
$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} = \frac{3a^2}{8}$.

$\Rightarrow S_{xq} = 2\pi Rh = 2\pi\frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{2}$; $V = \pi R^2 h = \pi\frac{3a^2}{8}.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}a^3}{16}$.

Câu 43. Cho hình trụ có thiết diện qua trục là hình vuông $ABCD$ cạnh $2\sqrt{3}\,\text{cm}$ với AB là đường kính của đường tròn đáy tâm O. Gọi M là điểm thuộc cung AB sao cho $ABM = 60^0$. Khi đó, thể tích V của khối tứ diện $ACDM$ là:

A. $V = 3(\text{cm}^3)$. B. $V = 2\sqrt{3}(\text{cm}^3)$. C. $V = 6(\text{cm}^3)$. D. $V = 6\sqrt{3}(\text{cm}^3)$.

✍ Hướng dẫn giải:



Ta có: $BM \perp AD, BM \perp AM \Rightarrow BM \perp (ADM)$

$BC//AD \Rightarrow BC//(ADM)$

$\Rightarrow d[C,(ADM)] = d[B,(ADM)] = BM$

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}.BM.S_{\Delta ADM} = \frac{1}{6}.BM.AM.AD$ (1).

Vì ΔOBM đều $\Rightarrow BM = \sqrt{3} \Rightarrow AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = 3$ (cm)

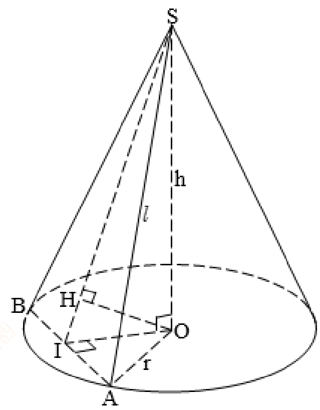
$(1) \Rightarrow V = \frac{1}{6}.\sqrt{3}.3.2\sqrt{3} = 3(\text{cm}^3)$.

Câu 44. Một hình nón có chiều cao $h = 20\,\text{cm}$, bán kính đáy $r = 25\,\text{cm}$. Một thiết diện đi qua đỉnh có khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện là 12cm. Tính diện tích thiết diện đó.

A. $500\,\text{cm}^2$. B. $500\sqrt{2}$ cm^2. C. $450\sqrt{2}$ cm^2. D. $125\sqrt{34}$ cm^2.

✍ Hướng dẫn giải:

Tính diện tích thiết diện S_{SAB}



+ Ta có $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}AB.SI = \frac{1}{2}2IA.SI = IA.SI$

+ Xét tam giác vuông SOI, ta có:

$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{OS^2} \Rightarrow \frac{1}{12^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{20^2} \Rightarrow OI = 15\ (\text{cm})$.

+ Mặt khác, xét tam giác vuông SOI thì:

$OI.OS = SI.OH \Rightarrow SI = \frac{OI.OS}{OH} = \frac{20.15}{12} = 25$ (cm).

+ Trong tam giác vuông AIO, ta có:

$IA = \sqrt{OA^2 - OI^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$ (cm).

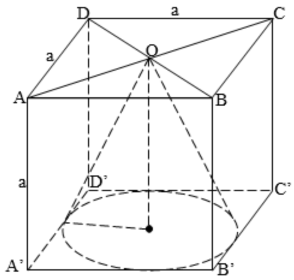
+ Từ đó suy ra: $S_{\Delta SAB} = IA.SI = 20.25 = 500$ (cm^2).

Câu 45. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a. Hãy tính diện tích xung quanh S_{xq} và thể tích V của khối nón có đỉnh là tâm O của hình vuông $ABCD$ và đáy là hình tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$.

A. $S_{xq} = \frac{\pi a^2\sqrt{5}}{2}; V = \frac{\pi a^3}{12}$. B. $S_{xq} = \frac{\pi a^2\sqrt{5}}{4}; V = \frac{\pi a^3}{4}$.

C. $S_{xq}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{3}}{2};V=\dfrac{\pi a^3}{6}$.   D. $S_{xq}=\pi a^2\sqrt{5};V=\dfrac{\pi a^3}{4}$.

Hướng dẫn giải:



Khối nón có chiều cao bằng a và bán kính đáy $r=\dfrac{a}{2}$.

Diện tích xung quanh khối nón là $S_{xq}=\pi rl=\pi.a.\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{5}}{2}$ (đvdt)

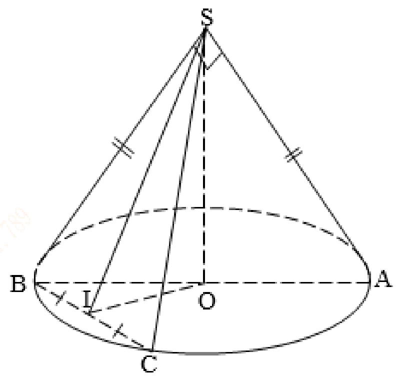
Thể tích của khối nón là: $V=\dfrac{1}{3}Bh=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2a=\dfrac{\pi a^3}{12}$ (đvtt)

Câu 46. Thiết diện đi qua trục của hình nón đỉnh S là một tam giác vuông cân có cạnh cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$. Kẻ dây cung BC của đường tròn đáy hình nón, sao cho mp (SBC) tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón một góc 60^0. Diện tích tam giác SBC tính theo a là:

A. $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$.   B. $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{6}$.   C. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.   D. $\dfrac{a^2\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải:

+ Do thiết diện đi qua trục là tam giác ΔSAB vuông cân tại đỉnh S, có cạnh huyền $AB=a\sqrt{2}$ nên suy ra bán kính đáy hình nón là $r=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; đường sinh hình nón $l=SA=SB=a$; đường cao hình nón $h=SO=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.



+ Gọi I là trung điểm BC thì $OI\perp BC$ (1)

Ta lại có: $\begin{cases}BC\perp OI\\ BC\perp SO\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SOI)\Rightarrow \mathrm{BC}\perp\mathrm{SI}$ (2)

Gọi (α) là mặt phẳng chứa đáy thì $(\alpha)\cap(\mathrm{SBC})=\mathrm{BC}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\left((\alpha),(\mathrm{SBC})\right)=(SI,OI)=SIO=60^0$.

Xét tam giác SOI vuông tại O, ta có: $SI=\dfrac{SO}{\sin SIO}=\dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác SIB vuông tại I, ta có: $IB=\sqrt{SB^2-SI^2}=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

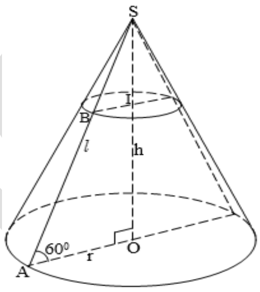
$\Rightarrow BC=2IB=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Diện tích thiết diện SBC là: $S_{\Delta SBC} = \dfrac{1}{2}SI.BC = \dfrac{1}{2}\dfrac{a\sqrt{6}}{3}.\dfrac{2a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{3}$ (đvdt).

Câu 47. Cho hình nón tròn xoay có đỉnh là S, O là tâm của đường tròn đáy, đường sinh bằng $a\sqrt{2}$ và góc giữa đường sinh và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Gọi I là một điểm trên đường cao SO của hình nón sao cho tỉ số $\dfrac{SI}{OI} = \dfrac{1}{3}$. Khi đó, diện tích của thiết diện qua I và vuông góc với trục của hình nón là:

A. $\dfrac{\pi a^2}{18}$. B. $\dfrac{\pi a^2}{9}$. C. $\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{18}$. D. $\dfrac{\pi a^2}{36}$.

Hướng dẫn giải:



Gọi A là một điểm thuộc đường tròn đáy hình nón. Thiết diện qua I và vuông góc với trục của hình nón là một hình tròn có bán kính như hình vẽ. Gọi diện tích này là S_{td}. Theo giả thiết ta có đường sinh $SA = a\sqrt{2}$ và góc giữa đường sinh và mặt phẳng đáy là $SAO = 60^0$. Trong tam giác vuông SAO có $OA = SA\cos 60^0 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

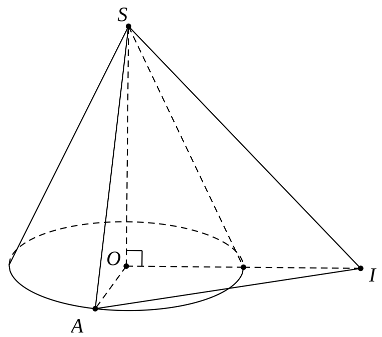
Ta có $\Delta SIB \backsim \Delta SOA \Rightarrow \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{IB}{OA} \Rightarrow IB = \dfrac{SI}{SO}.OA = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{6} \Rightarrow S_{td} = \pi IB^2 = \pi.\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{6}\right)^2 = \dfrac{\pi a^2}{18}$.

Câu 48. Cho hình nón đỉnh S với đáy là đường tròn tâm O bán kính R. Gọi I là một điểm nằm trên mặt phẳng đáy sao cho $OI = R\sqrt{3}$. Giả sử A là điểm nằm trên đường tròn $(O;R)$ sao cho $OA \perp OI$. Biết rằng tam giác SAI vuông cân tại S. Khi đó, diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón và thể tích V của khối nón là:

A. $S_{xq} = \pi R^2\sqrt{2}; V = \dfrac{\pi R^3}{3}$. B. $S_{xq} = 2\pi R^2; V = \dfrac{2\pi R^3}{3}$.

C. $S_{xq} = \dfrac{\pi R^2\sqrt{2}}{2}; V = \pi R^3$. D. $S_{xq} = \pi R^2; V = \dfrac{2\pi R^3}{3}$.

Hướng dẫn giải:



+ Xét tam giác AOI vuông tại O, có:

$IA^2 = OA^2 + OI^2 = R^2 + 3R^2 = 4R^2 \Rightarrow IA = 2R$

+ Do tam giác SAI vuông cân tại S nên ta có:

$IA = SA\sqrt{2} \Rightarrow SA = \dfrac{IA}{\sqrt{2}} = \dfrac{2R}{\sqrt{2}} = R\sqrt{2}$.

+ Xét tam giác SOA vuông tại O, ta có:

$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{2R^2 - R^2} = R$.

+ Diện tích xung quanh của hình nón là: $S_{xq} = \pi Rl = \pi R.R\sqrt{2} = \pi R^2\sqrt{2}$ (đvdt).

+ Thể tích của khối nón tương ứng là: $V = \dfrac{1}{3}Bh = \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \dfrac{1}{3}\pi R^2 R = \dfrac{\pi R^3}{3}$ (đvtt).

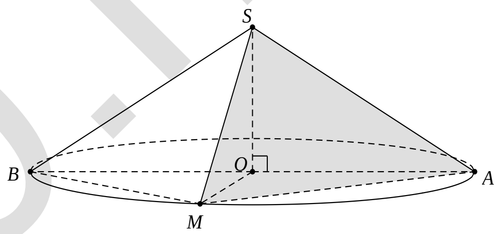
Câu 49. Một hình nón đỉnh S có bán kính đáy bằng $a\sqrt{3}$, góc ở đỉnh là 120^0. Thiết diện qua đỉnh của hình nón là một tam giác. Diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của thiết điện đó là bao nhiêu ?

A. $S_{\max} = 2a^2$. B. $S_{\max} = a^2\sqrt{2}$. C. $S_{\max} = 4a^2$. D. $S_{\max} = \dfrac{9a^2}{8}$.

Hướng dẫn giải:

Giả sử O là tâm đáy và AB là một đường kính của đường tròn đáy hình nón. Thiết diện qua đỉnh của hình nón là tam giác cân SAM. Theo giả thiết hình nón có bán kính đáy $R = OA = a\sqrt{3}\,\text{cm}$, $ASB = 120^0$ nên $ASO = 60^0$. Xét tam giác SOA vuông tại O, ta có: $\sin 60^0 = \dfrac{OA}{SA} \Rightarrow SA = \dfrac{OA}{\sin 60^0} = 2a$.

Diện tích thiết diện là: $S_{\Delta SAM} = \dfrac{1}{2}SA.SM.\sin ASM = \dfrac{1}{2}2a.2a.\sin ASM = 2a^2 \sin ASM$



Do $0 < \sin ASM \le 1$ nên $S_{\Delta SAM}$ lớn nhất khi và chỉ khi $\sin ASM = 1$ hay khi tam giác ASM vuông cân tại đỉnh S (vì $ASB = 120^0 > 90^0$ nên tồn tại tam giác ASM thỏa mãn).

Vậy diện tích thiết diện lớn nhất là: $S_{\max} = 2a^2$ (đvtt).

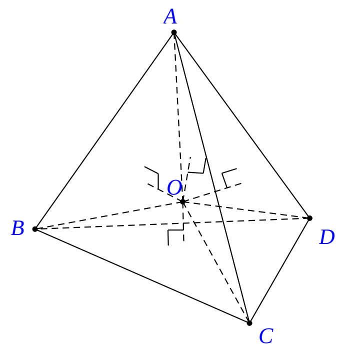
VẬN DỤNG CAO

Câu 50. Bán kính r của mặt cầu nội tiếp tứ diện đều cạnh a là

A. $r = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$. B. $r = \dfrac{a\sqrt{6}}{8}$. C. $r = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. D. $r = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi O là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện đều $ABCD$ cạnh a.



Ta tính được thể tích khối tứ diện đều là $V_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Mặt khác, ta lại có: $V_{ABCD} = V_{O.ABC} + V_{O.ACD} + V_{O.BCD} + V_{O.ABD}$ (*)

Mỗi hình tứ diện đỉnh O đều có chiều cao r và diện tích đáy là $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

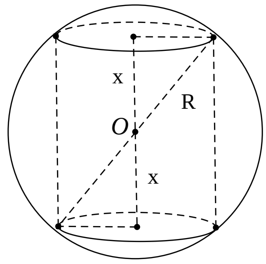
Do đó, từ (*) ta suy ra: $V_{ABCD} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12} = 4.\dfrac{1}{3}r.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow r = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$.

Câu 51. Chiều cao của khối trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong hình cầu có bán kính R là

A. $\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$. B. $\dfrac{R\sqrt{3}}{3}$. C. $\dfrac{4R\sqrt{3}}{3}$. D. $R\sqrt{3}$.

✍ Hướng dẫn giải:

Giả sử $2x$ là chiều cao hình trụ $(0 < x < R)$ (xem hình vẽ)



Bán kính của khối trụ là $r = \sqrt{R^2 - x^2}$. Thể tích khối trụ là:

$V = \pi(R^2 - x^2)2x$. Xét hàm số $V(x) = \pi(R^2 - x^2)2x,\ 0 < x < R$

Ta có $V'(x) = 2\pi(R^2 - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\dfrac{R\sqrt{3}}{3}$		R
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$	0	↗	$\dfrac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$	↘	0

Dựa vào BBT, ta thấy thể tích khối trụ lớn nhất khi chiều cao của khối trụ là $\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$;

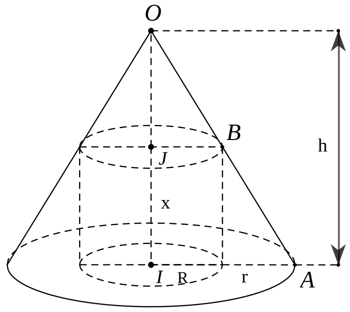
$V_{max} = \dfrac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$.

Câu 52. Cho hình nón có chiều cao h. Tính chiều cao x của khối trụ có thể tích lớn nhất nội tiếp trong hình nón theo h.

A. $x = \dfrac{h}{3}$. B. $x = \dfrac{h}{2}$. C. $x = \dfrac{2h}{3}$. D. $x = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$.

✍ Hướng dẫn giải:

Gọi r, R theo thứ tự là bán kính đáy hình nón và khối trụ cần tìm. O là đỉnh của hình nón, I là tâm của đáy hình nón, J là tâm của đáy hình trụ và khác I. OA là một đường sinh của hình nón, B là điểm chung của OA với khối trụ. Ta có:



$\dfrac{r}{R} = \dfrac{h - x}{h} \Rightarrow r = \dfrac{R}{h}(h - x)$.

Thể tích khối trụ là: $V = \pi x R^2 = \pi x \dfrac{R^2}{h^2}(h - x)^2$

Xét hàm số $V(x) = \pi x \dfrac{R^2}{h^2}(h - x)^2,\ 0 < x < h$.

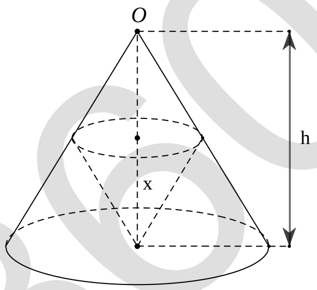
Ta có $V'(x) = \pi \dfrac{R^2}{h^2}(h - x)(h - 3x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{h}{3}$ hay $x = h$.

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{h}{3}$		h
$V'(x)$		$+$	0	$-$	0
$V(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4\pi R^2 h}{27}$	$\searrow$	0

Dựa vào BBT, ta thấy thể tích khối trụ lớn nhất khi chiều cao của khối trụ là $x = \frac{h}{3}$; $V_{\max} = \frac{4\pi R^2 h}{27}$.

Câu 53. Cho hình nón đỉnh O, chiều cao là h. Một khối nón khác có đỉnh là tâm của đáy và có đáy là là một thiết diện song song với đáy của hình nón đỉnh O đã cho (hình vẽ). Tính chiều cao x của khối nón này để thể tích của nó lớn nhất, biết $0 < x < h$.



A. $x = \frac{h}{3}$. B. $x = h\sqrt{3}$. C. $x = \frac{2h}{3}$. D. $x = \frac{h\sqrt{3}}{3}$.

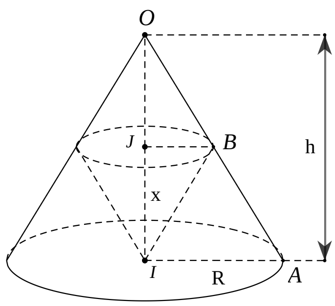
Hướng dẫn giải:

Từ hình vẽ ta có $\frac{JB}{IA} = \frac{OJ}{OI} = \frac{h-x}{h} \Rightarrow JB = \frac{R(h-x)}{h}$.

Thể tích khối nón cần tìm là: $V = \frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)^2 x$.

Xét hàm số $V(x) = \frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)^2 x$, $0 < x < h$.

Ta có $V'(x) = \frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)(h-3x) = 0 \Leftrightarrow x = h$ hay $x = \frac{h}{3}$.



Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{h}{3}$	h

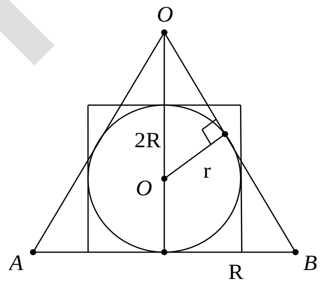
$V'(x)$	0 $\quad + \quad$ 0 $\quad -$
$V(x)$	0 0 $\nearrow$ $\dfrac{4\pi R^2h}{81}$ $\searrow$ 0

Dựa vào BBT, ta thấy thể tích khối nón cần tìm lớn nhất khi chiều cao của nó là $x=\dfrac{h}{3}$; $V_{\max}=\dfrac{4\pi R^2h}{81}$.

Câu 54. Cho một hình nón có bán kính đáy là R, chiều cao là $2R$, ngoại tiếp một hình cầu $S(O;r)$. Khi đó, thể tích của khối trụ ngoại tiếp hình cầu $S(O;r)$ là

A. $\dfrac{16\pi R^3}{\left(1+\sqrt{5}\right)^3}$. B. $\dfrac{4\pi R^3}{1+2\sqrt{5}}$. C. $\dfrac{16\pi R^3}{\left(\sqrt{5}-1\right)^3}$. D. $\dfrac{4\pi R^3}{2\sqrt{5}-1}$.

Hướng dẫn giải:



Giả sử hình nón có đỉnh O và đường kính đáy là AB.

Ta có $OA=OB=\sqrt{R^2+(2R)^2}=R\sqrt{5}$.

Tam giác OAB có diện tích là $S=2R^2$,

chu vi là $2p=2R(1+\sqrt{5})$. Do đó bán kính khối cầu $S(O;r)$ là $r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{2R}{1+\sqrt{5}}$.

Thể tích khối trụ cần tìm là: $V_{tru}=\pi r^2h=2\pi r^3=\dfrac{16\pi R^3}{\left(1+\sqrt{5}\right)^3}$.

Câu 55. Trong số các hình trụ có diện tích toàn phần đều bằng S thì bán kính R và chiều cao h của khối trụ có thể tích lớn nhất là:

A. $R=\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}};h=2\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$. B. $R=\sqrt{\dfrac{S}{4\pi}};h=\sqrt{\dfrac{S}{4\pi}}$.

C. $R=\sqrt{\dfrac{2S}{3\pi}};h=4\sqrt{\dfrac{2S}{3\pi}}$. D. $R=\sqrt{\dfrac{S}{2\pi}};h=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{S}{2\pi}}$.

Hướng dẫn giải:

Gọi thể tích khối trụ là V, diện tích toàn phần của hình trụ là S.

Ta có: $S=S_{2day}+S_{xq}=2\pi R^2+2\pi Rh$. Từ đó suy ra:

$$\frac{S}{2\pi}=R^2+Rh\Leftrightarrow\frac{S}{2\pi}=R^2+\frac{V}{\pi R}=R^2+\frac{V}{2\pi R}+\frac{V}{2\pi R}\overset{Cauchy}{\geq}3\sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}\text{ hay }27\frac{V^2}{4\pi^2}\leq\left(\frac{S}{2\pi}\right)^3\Leftrightarrow V\leq\sqrt{\frac{S^3}{54\pi}}.$$

Vậy $V_{\max}=\sqrt{\dfrac{S^3}{54\pi}}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow R^2=\dfrac{V}{2\pi R}=\dfrac{\pi R^2h}{2\pi R}=\dfrac{Rh}{2}$ hay $h=2R$.

Khi đó $S=6\pi R^2 \Rightarrow R=\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$ và $h=2R=2\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$.

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN CỔ ĐIỂN

MẶT CẦU – MẶT NÓN – MẶT TRỤ

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỰ RÈN LUYỆN (CÓ HƯỚNG DẪN)

Câu 1: Thiết diện qua trục của một hình nón tròn xoay là một tam giác vuông cân có diện tích bằng $2a^2$. Khi đó thể tích của khối nón bằng:

A. $\dfrac{2\sqrt{2}\pi a^3}{3}$ B. $\dfrac{\pi a^3}{3}$ C. $\dfrac{4\sqrt{2}\pi a^3}{3}$ D. $\dfrac{\sqrt{2}\pi a^3}{3}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $S=\dfrac{1}{2}l^2=2a^2 \Rightarrow l=2a$

Dùng định lý Pitago cho tam giác thiết diện ta được đường kính đường tròn đáy

$d=2a\sqrt{2} \Rightarrow r=a\sqrt{2}$

Vậy $V=\dfrac{1}{3}Bh=\dfrac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2-r^2}=\dfrac{2\sqrt{2}\pi a^3}{3}$.

Câu 2: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Gọi S là diện tích xung quanh của hình trụ có hai đường tròn đáy lần lượt ngoại tiếp các hình vuông ABDC và A'B'C'D'. Khi đó S bằng:

A. $S=\pi a^2\sqrt{2}$ B. $S=\pi a^2$ C. $S=\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$ D. $S=\dfrac{\pi a^2\sqrt{2}}{4}$

Hướng dẫn giải

+) Đáy là hình vuông cạnh $a \Rightarrow$ đường chéo bằng $AC=a\sqrt{2} \Rightarrow$ bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy $r=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

+) Đường sinh l bằng cạnh của hình lập phương $\Rightarrow l=a$

+) Vậy $S_{xq}=2\pi rl=\pi a^2\sqrt{2} \Rightarrow$ Chọn A.

Câu 3: Một hình lập phương có diện tích mặt chéo bằng $a^2\sqrt{2}$. Gọi V là thể tích khối cầu và S là diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lập phương nói trên. Khi đó tích $S.V$ bằng:

A. $S.V=\dfrac{3\sqrt{3}\pi^2a^5}{2}$ B. $S.V=\dfrac{\sqrt{3}\pi^2a^5}{2}$

C. $S.V=\dfrac{3\pi^2a^5}{2}$ D. $S.V=\dfrac{3\sqrt{6}\pi^2a^5}{2}$

Hướng dẫn giải

+) Đặt $AB = x \Rightarrow BD = x\sqrt{2}$

+) Ta có: $S_{BDD'B'} = a^2\sqrt{2} = x.x\sqrt{2} \Rightarrow x = a \Rightarrow BD' = a\sqrt{3} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

+) Khi đó ta có: $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$ và $S = 4\pi R^2 = 3\pi a^2$

+) Vậy $SV = \frac{3\sqrt{3}\pi^2 a^5}{2}$ $\Rightarrow$ Chọn A.

Câu 4: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB = a,\ BC = a\sqrt{3},\ AA' = a\sqrt{5}$. Gọi V là thể tích hình nón sinh ra khi quay tam giác AA'C quanh trục AA'. Khi đó V bằng:

A. $V = \frac{4\pi a^3\sqrt{5}}{3}$

B. $V = \frac{\pi a^3\sqrt{5}}{3}$

C. $V = \frac{2\pi a^3\sqrt{5}}{3}$

D. $V = \frac{4\pi a^3\sqrt{3}}{5}$

Hướng dẫn giải.

Ta có: $r = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$

Vậy: $V = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}\pi r^2 AA' = \frac{4\pi a^3\sqrt{5}}{3}$

Câu 5: Một hình trụ có diện tích xung quanh bằng 4π và có thiết diện qua trục là một hình vuông. Khi đó thể tích khối trụ tương ứng bằng:

A. 2π

B. 4π

C. $\frac{\pi}{2}$

D. π

Hướng dẫn giải

+) Theo đề ta có: $S_{xq} = 4\pi \Rightarrow 2\pi rl = 4\pi \Rightarrow rl = 2$ (*)

+) Thiết diện qua trục là hình vuông $\Rightarrow r = \frac{l}{2}$. Thay vào (*) ta được: $l = 2 \Rightarrow r = 1$

+) Vậy $V = \pi r^2 l = 2\pi \Rightarrow$ Chọn A.

Câu 6: Tỉ số thể tích của khối lập phương và khối cầu ngoại tiếp khối lập phương đó bằng:

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$

B. $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3\pi}$

D. $\frac{\sqrt{6}}{3\pi}$

Hướng dẫn giải

+) Thể tích khối lập phương $V = a^3$.

+) Đặt AB = a $\Rightarrow AC = a\sqrt{2} \Rightarrow A'C = a\sqrt{3} \Rightarrow$ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối lập phương là

$R = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V_{Câu} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$ (**).

Từ (*) và (**) suy ra: $\frac{V_{lập\ phuong}}{V_{CAU}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\pi} \Rightarrow$ Chọn A

Câu 7: Một hình nón có đường sinh hợp với đáy một góc α và độ dài đường sinh bằng *l*. Khi đó diện tích toàn phần của hình nón bằng:

A. $S_{tp} = 2\pi l^2 \cos\alpha.\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$

B. $S_{tp} = 2\pi l^2 \cos\alpha.\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

C. $S_{tp} = \pi l^2 \cos\alpha.\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$

D. $S_{tp} = \dfrac{1}{2}\pi l^2 \cos\alpha.\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$

Hướng dẫn giải

+) Ta có: $\dfrac{r}{l} = \cos\alpha \Rightarrow r = l\cos\alpha$

+) $S_{TP} = S_{XQ} + S_Đ = \pi rl + \pi r^2 = \pi l^2\cos\alpha + \pi l^2\cos^2\alpha = \pi l^2\cos\alpha(1+\cos\alpha) = 2\pi l^2\cos\alpha\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$

+) Vậy chọn A.

Câu 8: Cho lăng trụ đều có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi V là thể tích hình trụ ngoại tiếp khối lăng trụ nói trên. Khi đó V bằng:

A. $V = \dfrac{\pi a^3}{3}$ B. $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$ C. $V = \dfrac{3\pi a^3\sqrt{3}}{2}$ D. $V = \dfrac{\pi a^3}{6}$

Hướng dẫn giải

+) Gọi I, G lần lượt là trung điểm BC và trọng tâm tam giác ABC.

+) Tam giác ABC đều $\Rightarrow AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AG = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = r$

+) $l = a$.

+) Vậy $V = \pi r^2 l = \dfrac{\pi a^3}{3} \Rightarrow$ Chọn A.

Câu 9: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Không có mặt cầu ngoại tiếp S.ABC.

B. Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp có tâm là trọng tâm tam giác ABC.

C. Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp có tâm là trực tâm tam giác ABC.

D. Mặt cầu ngoại tiếp khối chóp có bán kính $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 10: Một hình nón có bán kính đường tròn đáy bằng a. Thiết diện qua trục của hình nón là một tam giác có góc ở đỉnh bằng 120^0. Gọi V là thể tích khối nón. Khi đó V bằng:

A. $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{9}$ B. $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$ C. $V = \dfrac{\pi a^3}{6}$ D. $V = \dfrac{\pi a^3}{3}$

Hướng dẫn giải

+) $r = a$

+) Góc ở đỉnh $= 120^0 \Rightarrow h = \dfrac{a}{\tan 60^0} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

+) $V = \dfrac{1}{3}S_Đ.h = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{9} \Rightarrow$ Chọn A.

Câu 11: Trong không gian cho hình vuông ABCD cạnh a. Gọi I và H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Khi quay hình vuông đó xung quanh trục IH ta được một hình trụ tròn xoay.Khi đó thể tích khối trụ tương ứng bằng:

A. $\dfrac{\pi a^3}{4}$ B. $\dfrac{\pi a^3}{12}$ C. $\dfrac{4\pi a^3}{3}$ D. $\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{4}$

Hướng dẫn giải

+) Ta có: $r = \dfrac{a}{2}$ và $l = a$

+) $V = B.h = \pi r^2 l = \dfrac{\pi a^3}{4}$

Câu 12: Cho tứ diện S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B với AB = 3a, BC = 4a, SA $\perp (ABC)$, cạnh bên SC tạo với đáy góc 60^0. Khi đó thể tích khối cầu ngoại tiếp S.ABC là:

A. $V = \dfrac{500\pi a^3}{3}$ B. $V = \dfrac{50\pi a^3}{3}$ C. $V = \dfrac{5\pi a^3}{3}$ D. $V = \dfrac{\pi a^3}{3}$

Hướng dẫn giải

+) Ta có: ΔSAC vuông tại S(*).

+) $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại B(**)

+) Từ (*) và (**) $\Rightarrow$ Tâm mặt cầu ngoại tiếp khối chóp S.ABC là trung điểm đoạn SC.

+) Ta có: AC $= \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5a.\text{ Mà } \dfrac{AC}{SC} = \cos 60^0 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow SC = 2AC = 10a \Rightarrow R = \dfrac{SC}{2} = 5a$

+) Vậy $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{500\pi a^3}{3} \Rightarrow$ Chọn A.

Câu 13: Cho hình lăng trụ tứ giác đều ABCD.A′B′C′D′ có cạnh đáy bằng a, chiều cao 2a. Biết rằng O′ là tâm của A′B′C′D′ và (C) là đường tròn nội tiếp đáy ABCD. Diện tích xung quanh của hình nón có đỉnh O′ và đáy (C).

A. $S_{xq} = \dfrac{3\pi a^2}{2}$ B. $S_{xq} = \dfrac{5\pi a^2}{2}$ C. $S_{xq} = \dfrac{\pi a^2}{2}$ D. $S_{xq} = \dfrac{3\sqrt{2}\pi a^2}{2}$

Hướng dẫn giải

+) ABCD.A'B'C'D' là lăng trụ tứ giác đều $\Rightarrow$ đáy ABCD là hình vuông. Khi đó bán kính đường tròn ngoại tiếp đáy là r = $\dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

+) Đường sinh $l = O'A = \sqrt{AA'^2 + A'O^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

+) Vậy $S_{XQ} = \pi rl = \pi.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{3a\sqrt{2}}{2} = \frac{3\pi a^2}{2} \Rightarrow$ Chọn A.

Câu 14: Một hình trụ có hai đáy là hai đường tròn nội tiếp hai mặt của một hình lập phương có cạnh bằng 1. Thể tích của khối trụ đó bằng:

A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. π

Hướng dẫn giải

+) Ta có:Đường tròn đáy nội tiếp hình vuông cạnh bằng 1 $\Rightarrow$ bán kính $r = \frac{1}{2}$

+) Độ dài đường sinh = độ dài cạnh của hình lập phương $\Rightarrow l = 1$

+) Vậy $V = \pi r^2 l = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2.1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$ Chọn A.

Câu 15: Cho tứ diện S.ABC có 3 đường thẳng SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một, SA = 3, SB = 4, SC = 5. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp S.ABC bằng:

A. 50π B. 25π C. 75π D. 100π

Hướng dẫn giải

+) Tam giác SBC vuông tại S nên từ trung điểm I của cạnh BC ta vẽ đường thẳng (d) vuông góc với (SBC) (tức là d // SA), khi đó d chính là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC.
+) Trong mp được xác định bởi 2 đường thẳng song song d và SA ta dựng đường trung trực của SA cắt d tại J. Khi đó J chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp SABC $\Rightarrow SJ$ là bán kính.

+) $SJ = \sqrt{SI^2 + \left(\frac{SA}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{BC^2 + SA^2}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

+ $S = 4\pi R^2 = 4\pi\frac{50}{4} = 50\pi \Rightarrow$ Chọn A

Câu 16: Thể tích khối lăng trụ tứ giác đều nội tiếp trong hình trụ có chiều cao h và bán kính đường tròn đáy R bằng:

A. $2R^2h$ B. R^2h C. $\sqrt{2}R^2h$ D. $\frac{R^2h}{2}$

Hướng dẫn giải

+) Ta có: $V_{LTRU} = S_{ABCD}.AA' = AB^2.OO' = AB^2h$ (*)

+) Tính AB: Ta có tam giác OAB vuông cân tại O nên AB $= OA\sqrt{2} = R\sqrt{2}$

+ Thay vào (*) ta được: $V = 2R^2h$.

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN CỔ ĐIỂN

MẶT CẦU – MẶT NÓN – MẶT TRỤ

(Tổng hợp từ tài liệu Chương II. Mặt nón – Mặt trụ – Mặt cầu của Thầy Lê Văn Đoàn)

BÀI TẬP TỰ LUẬN TỰ RÈN LUYỆN

● BÀI TẬP HÌNH NÓN – KHỐI NÓN

Bài 1. Cho khối nón tròn xoay có đường cao $h = a$ và bán kính đáy là $r = {}^{5a}\!/_{4}$. Một mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của khối nón và có khoảng cách đến tâm O của đáy bằng ${}^{3a}\!/_{5}$.

a/ Hãy xác định thiết diện của $mp(P)$ đối với khối nón. Tính diện tích khối thiết diện đó.

b/ Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của khối nón.

c/ Tính thể tích của khối nón tạo nên hình nón đó.

Bài 2. Trong không gian cho ΔOIM vuông tại I có $IOM = 30^0$ và cạnh $IM = a$. Khi quay tam giác OIM quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình nón tròn xoay.

a/ Tính diện tích xung quanh của hình nón đó.

b/ Tính thể tích khối nón tròn xoay được tạo nên bởi hình nón trên.

Bài 3. Một hình nón tròn xoay có chiều cao $h = 30cm$ và bán kính đáy bằng $20cm$.

a/ Cắt hình nón bởi mặt phẳng chứa đường cao. Tính diện tích của thiết diện.

b/ Cắt hình nón bởi mặt phẳng đi qua đỉnh, ta được một thiết diện là một tam giác đều. Tính diện tích của thiết diện này và khoảng cách từ tâm của mặt phẳng đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện.

Bài 4. Thiết diện đi qua trục của hình nón là một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a.

a/ Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón.

b/ Tính thể tích của khối nón tương ứng.

c/ Một mặt phẳng đi qua đỉnh và tạo với mặt phẳng đáy một góc 60^0. Tính diện tích của thiết diện được tạo nên.

Bài 5. Hình nón có bán kính đáy bằng $2a$, thiết diện qua trục là một tam giác đều.

a/ Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của khối nón.

b/ Cắt hình nón bởi mặt phẳng đi qua đỉnh, ta được thiết diện là một tam giác vuông. Tính diện tích của thiết diện này và khoảng cách từ tâm của mặt phẳng đáy đến mặt phẳng chứa thiết diện.

Bài 6. Một hình nón có bán kính đáy bằng $2cm$, góc ở đỉnh bằng 60^0.

a/ Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón.

b/ Tính thể tích của khối nón tương ứng.

Bài 7. Một hình nón có đỉnh S, bán kính đáy $r = 10cm$.

a/ Tính diện tích thiết diện do $mp(P)$ cắt hình nón theo hai đường sinh vuông góc nhau.

b/ Gọi G là trọng tâm của thiết diện và mặt phẳng (α) qua G, đồng thời vuông góc với trục của hình nón. Tính diện tích của thiết diện do mặt phẳng (α) cắt hình nón.

Bài 8. Cho hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác vuông cân, thiết diện này có diện tích bằng $12a^2$.

a/ Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón.
b/ Tính thể tích của khối nón tương ứng.
c/ Mặt phẳng (P) đi qua đỉnh của hình nón, cắt mặt phẳng đáy theo một dây cung có độ dài bằng $2a\sqrt{3}$. Tính góc tạo bởi mặt phẳng (P) và mặt phẳng đáy.

Bài 9. Mặt nón tròn xoay có đỉnh là S, O là tâm của đường tròn đáy, đường sinh bằng $a\sqrt{2}$ và góc giữa đường sinh và mặt phẳng đáy bằng 60^0.
a/ Tính diện xung quanh, diện tích toàn phần của hình nón và thể tích của khối nón được tạo nên.
b/ Gọi I là một điểm trên đường cao SO của hình nón sao cho tỉ số $\frac{SI}{SO} = \sqrt{2}$. Tính diện tích của thiết diện qua I và vuông góc với trục của hình nón.

Bài 10. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng a, góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy bằng 30^0. Hình nón đỉnh S có đường tròn đáy nội tiếp tam giác đều ABC (được gọi là hình nón nội tiếp hình chóp).
a/ Tính thể tích của hình chóp $S.ABC$.
b/ Tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích của khối nón tạo nên.

Bài 11. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có chiều cao $SO = h, SAB = \alpha, \left(45^0 < \alpha < 90^0\right)$. Hãy tính diện tích xung quanh của hình nón có đỉnh là S và có đường tròn đáy ngoại tiếp đáy $ABCD$ của hình chóp.

Bài 12. Cho hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều cạnh bằng $2a$.
a/ Tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích của khối nón tạo nên.
b/ Thiết diện qua đỉnh của hình nón và cách tâm của đáy hình nón một khoảng là $a/2$. Tính diện tích của thiết diện tạo thành đó.

Bài 13. Đường sinh của hình nón bằng $13a$, chiều cao là $12a$. Một đường thẳng d song song với đáy của hình nón và cắt hình nón. Khoảng cách từ đường thẳng d ấy đến mặt phẳng đáy và chiều cao hình nón lần lượt là $6a$ và $2a$. Tính độ dài đoạn thẳng d nằm trong phần hình nón.

Bài 14. Cho hình nón đỉnh S và đáy là hình tròn tâm O. Mặt phẳng (α) đi qua đỉnh, cắt đáy theo một dây cung AB, sao cho $AOB = 60^0$ và $mp(\alpha)$ hợp với mặt phẳng chứa đáy một góc 30^0.
a/ Tính góc ASB.
b/ Cho diện tích của tam giác SAB bằng b. Tính diện tích xung quanh của hình nón.

Bài 15. Tính thể tích hình nón biết thể tích hình chóp tam giác đều nội tiếp hình nón là V.

Bài 16. Trên một hình tròn làm đáy chung ta dựng hai hình nón (hình này chứa hình kia). Sao cho hai đỉnh cách nhau một đoạn là a. Góc ở đỉnh của thiết diện qua trục của hình nón lớn là 2α và của hình nón nhỏ là 2β.Tính thể tích phần ở ngoài hình nón nhỏ và ở trong hình nón lớn.

Bài 17. Cho hình nón có đường cao $SO = h$ và bán kính đáy R. Gọi M là điểm trên đoạn OS, đặt $OM = x \ \left(0 < x < h\right)$.

a/ Tính diện tích thiết diện (Γ) vuông góc với trục tại M.

b/ Tính thể tích của khối nón đỉnh O và đáy (Γ) theo R, h, x. Xác định x sao cho thể tích đạt giá trị lớn nhất.

Bài 18. Cho hình nón tròn xoay đỉnh S. Trong đáy của hình nón đó có hình vuông $ABCD$ nội tiếp, cạnh bằng a. Biết rằng: $ASB = 2\alpha, \left(0^0 < \alpha < 45^0\right)$. Tính diện tích xung quanh của hình nón và thể tích khối nón.

● BÀI TẬP HÌNH TRỤ - KHỐI TRỤ

Bài 19. Trong không gian cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi I, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Khi quay hình vuông đó xung quanh trục IH, ta được một hình trụ tròn xoay.

a/ Tính diện tích xung quanh của hình trụ đó.

b/ Tính thể tích khối trụ tròn xoay được tạo nên bởi hình trụ nói trên.

Bài 20. Một khối trụ có bán kính đáy bằng R và có thiết diện qua trục là một hình vuông.

a/ Tính diện tích xung, diện tích toàn phần và thể tích của hình trụ.

b/ Tính thể tích hình lăng trụ tứ giác đều nội tiếp hình trụ đã cho (hình lăng trụ này có đáy là hình vuông nội tiếp trong đường tròn đáy của hình trụ).

Bài 21. Một hình trụ có bán kính đáy là $20\left(cm\right)$, chiều cao là $30\left(cm\right)$.

a/ Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ.

b/ Tính thể tích của khối trụ tương ứng.

c/ Cho hai điểm A và B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy, sao cho góc giữa đường thẳng AB và trục của hình trụ bằng 60^0. Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và trục của hình trụ.

Bài 22. Một khối trụ có bán kính đáy bằng $10\left(cm\right)$ và chiều cao bằng $10\sqrt{3}\left(cm\right)$. Gọi A, B lần lượt là hai điểm trên hai đường tròn đáy, sao cho góc được tạo thành giữa 2 đường thẳng AB và trục của khối trụ bằng 30^0.

a/ Tính diện tích của thiết diện qua AB và song song với trục của khối trụ.

b/ Tính góc giữa hai bán kính đáy qua A và qua B.

c/ Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB và trục của khối trụ.

Bài 23. Một hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O', có bán kính r và có đường cao $h = r\sqrt{2}$. Gọi A là một điểm trên đường tròn tâm O và B là một điểm trên đường tròn tâm O' sao cho OA vuông góc với $O'B$.

a/ Chứng minh rằng các mặt bên của tứ diện $OABO'$ là những tam giác vuông. Tính thể tích tứ diện này.

b/ Gọi $mp\left(\alpha\right)$ đi qua AB và song song với OO'. Tính khoảng cách giữa trục OO' và $mp\left(\alpha\right)$.

c/ Chứng minh rằng $mp\left(\alpha\right)$ tiếp xúc với mặt trụ trục OO' có bán kính bằng $\dfrac{r\sqrt{2}}{2}$ dọc theo 1 đường sinh.

Bài 24. Một hình trụ có bán kính đáy bằng $30\left(cm\right)$ và có chiều cao $h = 30\left(cm\right)$.

a/ Tính diện tích toàn phần của hình trụ và thể tích của khối trụ được tạo nên.

b/ Một đoạn thẳng có chiều dài $60\,(cm)$ và có hai đầu mút nằm trên hai đường tròn đáy. Tính khoảng cách từ đoạn thẳng đó đến trục hình trụ.

Bài 25. Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$ và góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy bằng β.

a/ Tính diện tích xung quanh của hình trụ có đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác đáy của hình chóp và có chiều cao bằng chiều cao của hình chóp.

b/ Các mặt bên SAB, SBC, SCA cắt hình trụ theo những giao tuyến như thế nào?

Bài 26. Một hình trụ có thiết diện qua trục là một hình vuông, diện tích xung quanh bằng 4π.

a/ Tính diện tích xung quanh của hình trụ và thể tích của khối trụ tạo nên.

b/ Một $mp(\alpha)$ song song với trục của hình trụ và cắt hình trụ đó theo thiết diện ABA_1B_1. Biết một cạnh của thiết diện là một dây cung của một đường tròn đáy và căng một cung 120^0. Tính diện tích của thiết diện này.

Bài 27. Cho hình lăng trụ lục giác đều $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$ có cạnh đáy bằng a, chiều cao h.

a/ Tính diện tích xung quanh và thể thể tích hình trụ ngoại tiếp hình lăng trụ.

b/ Tính diện tích toàn phần và thể tích hình trụ nội tiếp hình lăng trụ.

Bài 28. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với đáy nhỏ $AB = a$, đáy lớn $CD = 4a$, cạnh bên bằng $\frac{5a}{2}$ và chiều cao hình lăng trụ là h.

a/ Chứng minh rằng có một hình trụ nội tiếp được trong hình lăng trụ đã cho.

b/ Tính diện tích xung quanh hình trụ và thể tích khối trụ đó.

Bài 29. Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường tròn đáy tâm O' lấy điểm B sao cho $AB = 2a$. Tính thể khối tứ diện $OO'AB$.

Bài 30. Bên trong hình trụ tròn xoay có một hình vuông $ABCD$ cạnh a nội tiếp mà 2 đỉnh liên tiếp A, B nằm trên đường tròn đáy thứ 1 của hình trụ, 2 đỉnh còn lại nằm trên đường tròn đáy thứ 2 của hình trụ. Mặt phẳng hình vuông tạo với đáy hình trụ một góc 45^0. Tính diện tích và thể tích của hình trụ đó.

● BÀI TẬP TÌM TÂM VÀ BÁN KÍNH MẶT CẦU

Bài 31. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$. Cạnh bên SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 30^0. Hãy tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Bài 32. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $2a$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Bài 33. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $3a$. Hãy tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Bài 34. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $C, SA \perp (ABC)$. Biết rằng: $AB = a\sqrt{3},\ BC = a, SB$ tạo với $mp(ABC)$ một góc 60^0. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Bài 35. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Hãy xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. Tính diện tích và thể tích của khối cầu đó.

Bài 36. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD), SA = a, AC = a\sqrt{2}$. Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. Tính diện tích và thể tích của mặt cầu đó.

Bài 37. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là nửa lục giác đều và $SA \perp (ABCD)$.

a/ Định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

b/ Gọi H, K, L là chân đường cao vẽ từ A tổng các tam giác: $\Delta SAB, \Delta SAC, \Delta SAD$. Chứng minh rằng các điểm A, B, C, D, H, K, L nằm trên một mặt cầu.

Bài 38. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC = a, BAC = 120^0, SA \perp (ABC), SA = 2a$. Định tâm và bán kính mặt cầu đi qua các điểm S, A, B, C. Tìm diện tích và thể tích khối cầu đó.

Bài 39. Cho hình chóp $S.ABC$ có $mp(SBC) \perp mp(ABC)$ và $SC = b, SA = SB = AB = AC = a$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho. Tìm diện tích và thể tích của nó.

Bài 40. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$ và O là tâm của mặt phẳng đáy. Góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy bằng 60^0. Gọi M là trung điểm của cạnh CD và H là hình chiếu của O trên SM.

a/ Tính khoảng cách từ A đến $mp(SCD)$. Tính thể tích hình chóp $S.ABCD$.

b/ Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$. Tìm diện tích và thể tích mặt cầu đó.

Bài 41. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a và ΔSAB là tam giác đều. Mặt phẳng $(SAB) \perp (ABCD)$.

a/ Tính thể tích của hình chóp $S.ABCD$.

b/ Tìm góc giữa hai $mp(SAB), mp(SCD)$.

c/ Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đã cho. Tìm diện tích và thể tích khối cầu đó.

Bài 42. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ đáy là tam giác vuông tại $A, AC = a, ACB = \alpha$ và BC' hợp với mặt phẳng $(ACC'A')$ một góc β.

a/ Tính thể tích lăng trụ đã cho.

b/ Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho.

Bài 43. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a, bán kính đường tròn ngoại tiếp một mặt bên là a.

a/ Tính thể tích và diện tích xung quanh của hình lăng trụ đã cho.

b/ Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ. Tính diện tích và thể tích khối cầu đó.

Bài 44. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $10(cm)$ và mỗi cạnh bên đều bằng $15(cm)$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp. Tìm diện tích và thể tích mặt cầu đó.

Bài 45. Ba đoạn thẳng SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau tạo thành một tứ diện $SABC, SA = a, SB = b, SC = c$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đó.

Bài 46. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có 9 cạnh đều bằng nhau. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đã cho. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp đó và thể tích khối cầu được tạo bởi mặt cầu ngoại tiếp đó. Biết mỗi cạnh có độ dài là $10(cm)$.

Bài 47. Cho tứ diện $SABC$ có $SA \perp mp(ABC), SA = a, AB = b, AC = c$. Xác định tâm, bán kính, diện tích và thể tích của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện trong các trường hợp sau:

a/ $BAC = 90^0$.

b/ $BAC = 60^0, b = c$.

c/ $BAC = 120^0, b = c$.

Bài 48. Cho hình chóp $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Một mặt cầu qua đỉnh A và tiếp xúc với hai cạnh SB, SC tại trung điểm của mỗi cạnh.

a/ Chứng minh mặt cầu đó đi qua trung điểm của AB, AC.

b/ Gọi giao điểm thứ hai của mặt cầu với đường thẳng SA là D. Tính độ dài đoạn thẳng AC, SD.

Bài 49. Hình tứ diện $ABCD$ có cạnh bằng a có đường cao AH. Gọi O là trung điểm AH. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OBCD$.

Bài 50. Hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a$ là chiều cao của hình chóp và đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B có $AB = BC = a, AD = 2a$. Gọi E là trung điểm của AD. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SCDE$. Tìm diện tích và thể tích mặt cầu đó.

Bài 51. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a.

a/ Tính diện tích xung quanh của hình trụ có đường tròn hai đáy ngoại tiếp các hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

b/ Tính diện tích mặt cầu đi qua tất cả các đỉnh của hình lập phương.

c/ Tính diện tích xung quanh của hình nón tròn xoay nhận đường thẳng AC' làm trục và đường sinh AB.

Bài 52. Cho tam giác vuông cân ABC có cạnh huyền $AB = 2a$. Trên đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng ABC lấy một điểm S khác A ta được tứ diện $SABC$.

a/ Xác định tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$.

b/ Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SABC$ trong trường hợp $mp\ SBC$ tạo với $mp\ ABC$ một góc 30^o.

<u>Bài 53</u>. Cho hình lăng trụ có bán kính đáy bằng R. Thiết diện qua trục của hình trụ là một hình vuông.

a/ Tính diện tích và thể tích hình cầu ngoại tiếp hình trụ.

b/ Một $mp\ \ P$ song song với trục của hình trụ, cắt đáy hình trụ theo một dây cung có độ dài bằng bán kính đáy hình trụ. Tính diện tích các thiết diện của hình trụ và hình cầu ngoại tiếp hình trụ khi cắt bởi $mp\ \ P$.

<u>Bài 54</u>. Cho hình chóp $S.ABC$ có ΔABC đều cạnh a và $mp\ \ SBC\ \ \perp mp\ \ ABC$, $SC = SB = a\sqrt{2}$

a/ Tính góc giữa $mp\ \ SAB$, $mp\ \ SAC$ và khoảng cách từ B đến $mp\ \ SAC$.

b/ Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp đã cho.

c/ Định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Tính diện tích và thể tích khối cầu này.

<u>Bài 55</u>. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a$. Hai mặt bên SAD , SAB cùng vuông góc với $mp(ABCD), SA = a$. Gọi O là tâm của hình chữ nhật.

a/ Tính thể tích hình chóp $O.SCD$.

b/ Tìm tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$. Tính diện tích và thể tích khối cầu đó.

<u>Bài 56</u>. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang vuông, đáy lớn $AD = 2a$, đường cao $AB = a, BC = a$, $SA \perp\ \ ABCD$, $SA = a$.

a/ Tính thể diện tích toàn phần và thể tích hình chóp.

b/ Định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABD$.

c/ Định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CDM$ với M là trung điểm AD.

d/ Định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.BCD$.