# HƯỚNG DẪN GIẢI.

## Bài toán 1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI .

**Bài 1**

**1**. Đường thẳng $d_1$ có $\overrightarrow{u_1} = (2;-1;-2)$ là VTCP, đường thẳng $d_2$ có $\overrightarrow{u_2} = (-2;1;3)$ là VTCP.

Vì hệ phương trình : $\begin{cases} 1+2t = -1-2t' \\ 3-t = 1+t' \\ -2t = -2+3t' \end{cases}$ vô nghiệm và $\overrightarrow{u_1} \neq k\overrightarrow{u_2}$ nên ta có hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ chéo nhau.

**2**. Xét hệ phương trình $\begin{cases} 1+t = -3+3t' \\ 2-2t = 5-t' \\ 3+2t = -6+t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t' = 1 \end{cases}$

Do đó hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ cắt nhau tại $A(0;4;-5)$.

**3**. Ta viết lại phương trình đường thẳng $d_2$ : $\dfrac{x+\frac{1}{2}}{\frac{-1}{2}} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$

Đường thẳng $d_1$ có $\overrightarrow{u_1} = (1;-2;2)$ là VTCP, đường thẳng $d_2$ có $\overrightarrow{u_2} = (-\frac{1}{2};1;-1)$ là VTCP. Ta có $\overrightarrow{u_1} = -2\overrightarrow{u_2}$ và $A(1;-2;-1) \in d_1$ nhưng $A \notin d_2$s

Vậy hai đường thẳng $d_1$ và $d_2$ chéo nhau.

**Bài 2**

**1**. Ta có $\overrightarrow{u_1}(-1;\ 3;\ -2), \overrightarrow{u_2}(0;\ 0;\ 5)$ không cùng phương nên hai đường thẳng hoặc cắt nhau, hoặc chéo nhau.

Hệ phương trình tương giao $\begin{cases} -t = 0 \\ 3t = 9 \\ -1-2t = 5+5u \end{cases}$ vô nghiệm, nên hai đường thẳng chéo nhau.

Góc giữa hai đường thẳng

$$\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\left|\cos(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})\right|=\frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}=\frac{10}{\sqrt{14.5}}=\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\Rightarrow(\Delta_1,\Delta_2)=\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)\approx 57,69^0$$

**2.** Ta có $\overrightarrow{u_{\Delta_2}}=\left[\overrightarrow{n_{\alpha_1}},\overrightarrow{n_{\alpha_2}}\right]=(1;-4;-3)=\overrightarrow{u_{\Delta_1}}$ nên hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

Vì điểm $M(0;\ -3;\ -3)\in\Delta_1$ nhưng $M\notin\Delta_2$ nên hai đường thẳng này song song.

Góc giữa hai đường thẳng $(\Delta_1,\Delta_2)=0^0$.

**Bài 3**

**1.** Ta có $\vec{u}=(8;2;3)$ là VTCP của $d$, $\vec{n}=(1;2;-4)$ là VTPT của $(\alpha)$

Do $\vec{u}.\vec{n}=0$ và điểm $N(13;1;4)\in d$ đồng thời $N\in(\alpha)$ nên suy ra $d\subset(\alpha)$.

**2.** Ta có $\overrightarrow{u_d}=(8;2;3)$, $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;2;-4)\Rightarrow\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_\alpha}=0$ và điểm $M(13;1;4)\in d$ đồng thời $M\in(\alpha)\Rightarrow d\subset(\alpha)$.

**Bài 4.**

**1.** Gọi $I$ là tâm của hình vuông thì $I$ chính là hình chiếu của $C$ trên $BD$.

Ta có $I(-1+4t;\ 1-t;\ -1+t)\Rightarrow\overrightarrow{CI}(4t-2;\ 2-t;\ t+1)$.

Vì $CI\perp BD$ nên $\overrightarrow{CI}.\vec{u}_{BD}=0\Leftrightarrow 4(4t-2)-(2-t)+t+1=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$

Do đó $I\left(1;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right), CI=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Từ điều kiện $I$ là trung điểm $AC$ suy ra $A(1;\ 2;\ 3)$.

Tọa độ điểm $B(-1+4t;\ 1-t;\ -1+t)$ với $t>\frac{1}{4}$.

Ta có $IB=IC$ nên

$$(-2+4t)^2+\left(\frac{1}{2}-t\right)^2+\left(-\frac{1}{2}+t\right)^2=\frac{9}{2}\Leftrightarrow t^2-t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=1\end{array}\right.$$

Tọa độ điểm $B(3;\ 0;\ 0)$, suy ra $D(-1;\ 1;\ -1)$.

Vậy tọa độ các điểm cần tìm là $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(3;\ 0;\ 0)$, $D(-1;\ 1;\ -1)$.

**2.** Ta có $A(1+a;\ 1-a;\ -1+a)$, $B(b;\ 1+b;\ -1+2b)$

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}(b-a-1;\ b+a;\ 2b-a)$.

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = t.\vec{u}_{CD}$, hay

$$\frac{b-a-1}{2} = \frac{b+a}{1} = \frac{2b-a}{2} \Rightarrow a = 0;\ b = -1.$$

Vì thế $A(1;\ 1;\ -1),\ B(-1;\ 0;\ -3)$.

**Bài 5**

**1.** Đường thẳng $\Delta$ đi qua $B(-1;2;0)$ và có $\vec{u} = (2;3;1)$ là VTCP

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-4;0;-1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}\right] = (3;2;-12)$

Vậy $d(A,\Delta) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \sqrt{\dfrac{157}{14}}$.

2. Đường thẳng $\Delta_1$ đi qua $A_1(1;-4;3)$ và có $\overrightarrow{u_1} = (0;2;1)$ là VTCP

Đường thẳng $\Delta_1$ đi qua $A_2(0;3;-2)$ và có $\overrightarrow{u_2} = (-3;1;0)$ là VTCP

Ta có $\overrightarrow{A_1A_2} = (-1;7;-5)$, $\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-1;-3;6)$

$\Rightarrow \overrightarrow{A_1A_2}.\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = -50 \neq 0$

Suy ra hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ chéo nhau và

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\left|\overrightarrow{A_1A_2}.\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|} = \frac{25\sqrt{46}}{23}.$$

**3.** Đường thẳng $\Delta_1$ đi qua $M(1;-1;-2)$ và có $\overrightarrow{u_1} = (2;-1;3)$ là VTCP

Đường thẳng $\Delta_2$ đi qua $N(2;1;3)$ và có $\overrightarrow{u_2} = (1;-2;4)$ là VTCP

Ta có $\overrightarrow{MN} = (1;2;5), \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (2;-3;-3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{MN} = -19$

Hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ chéo nhau và

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right]\right|} = \frac{19}{\sqrt{22}}.$$

**4.** Ta thấy $C(1;1;-2) \in \Delta$ và $\Delta // (\alpha)$ nên ta có: $d(\Delta,(\alpha)) = d(C,(\alpha)) = \dfrac{6}{\sqrt{21}}$.

**Bài 6**

Tọa độ điểm $M(t;\,-2-t;\,1+t),\ t\in\mathbb{R}$. Ta có

$$\overrightarrow{AB}(-1;\,1;\,1),\ \overrightarrow{AC}(-1;\,0;\,2),\ \overrightarrow{AM}(t-1;\,-t-2;\,t+1).$$

Suy ra một véc tơ chỉ phương của mặt phẳng $(MAB)$ là

$$\vec{n}_1=\left[\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AM}\right]=(2t+3;\,2t;\,3).$$

Một véc tơ chỉ phương của mặt phẳng $(CAB)$ là

$$\vec{n}_2=\left[\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AC}\right]=(2;\,1;\,1).$$

Vì góc giữa hai mặt phẳng $(MAB)$ và $(CAB)$ là $30^0$ nên

$$\cos 30^0=\left|\cos(\vec{n}_1,\,\vec{n}_1)\right|\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\left|2(2t+3)+2t+3\right|}{\sqrt{(2t+3)^2+(2t)^2+3^2}.\sqrt{6}}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(2t+3)^2+(2t)^2+3^2}=\sqrt{2}\left|2t+3\right|$$

$$\Leftrightarrow 2(2t+3)^2=8t^2+12t+18\Leftrightarrow t=0$$

Điểm cần tìm có tọa độ là $M(0;\,-2;\,1)$.

**Bài 7**

Mặt phẳng qua $O$ và vuông góc với $AB$ là $(P): x-y=0$.

Ta có $C=AC\cap(P)\Rightarrow C\left(-\frac{4}{13};\,-\frac{4}{13};\,\frac{8}{13}\right)$.

Mặt phẳng qua $O$ và vuông góc với $AC$ là $(Q): 7x-6y-z=0$.

Vậy $B=AB\cap(Q)\Rightarrow B\left(-\frac{5}{13};\,-\frac{8}{13};\,1\right)$.

## Bài toán 2. LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

**Bài 1**

**1**. Phương trình tham số của $d:\begin{cases}x=2+t\\ y=-t\\ z=1-t\end{cases},\ t\in R$.

Phương trình chính tắc của $d:\ \frac{x-2}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{-1}$.

**2.** Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;-2;-1)$ là VTCP của $d$

Phương trình tham số của $d:\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2-2t \\ z = 1-t \end{cases},\ t \in R$

Phương trình chính tắc của $d: \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-1}$.

**3.** Ta có $\vec{n} = (1;2;-2)$ là VTPT của $(P)$

Vì $d \perp (P)$ nên $d$ nhận $\vec{n} = (1;2;-2)$ làm VTCP

Phương trình tham số của $d:\begin{cases} x = -2+t \\ y = 1+2t \\ z = -2t \end{cases},\ t \in R$.

Phương trình chính tắc của $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-2}$.

**4.** Đường thẳng $\Delta$ có $\vec{u} = (2;-2;-1)$ là VTCP

Vì $d // \Delta$ nên $d$ nhận $\vec{u} = (2;-2;-1)$ làm VTCP.

Phương trình tham số của $d:\begin{cases} x = -1+4t \\ y = 2-7t \\ z = -3-3t \end{cases},\ t \in R$.

Phương trình chính tắc của $d: \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z+3}{-3}$.

**5.** Tọa độ điểm $I$ của $\Delta$ với $(P)$ thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1} \\ x+2y-3z+4=0 \end{cases} \Rightarrow I\left(-3;1;1\right).$$

Ta có $\vec{n} = \left(1;2;-3\right)$ là VTPT của $(P)$; $\vec{u} = \left(1;1;-1\right)$ là VTCP của $\Delta$.

Đường thẳng $d$ cần tìm qua $I$ và có $\vec{v} = \left[\vec{n},\vec{u}\right] = \left(1;-2;-1\right)$ là VTCP.

Phương trình tham số của $d: \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$.

**Bài 2**

**1**. Gọi $d$ là giao tuyến của hai mp $(P)$ và $(Q)$

Suy ra $\overrightarrow{u_d} = [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}] = (-1; 9; -24)$ là VTCP của $d$

Vì $\begin{cases} \Delta // (P) \\ \Delta // (Q) \end{cases} \Rightarrow \Delta // d \Rightarrow \overrightarrow{u_\Delta} = \overrightarrow{u_d} = (-1; 9; -24)$

Vậy phương trình của $\Delta : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4 + 9t \\ z = -2 - 24t \end{cases}, \quad (t \in \mathbb{R})$.

2. Gọi $A, B$ lần lượt là giao điểm của $(P)$ với $d_1, d_2$. Ta có :
$A(1; 0; 0), B(6; -2; 1)$

Vì $\Delta$ nằm trong $(P)$ đồng thời $\Delta$ cắt $d_1, d_2$ nên $\Delta$ đi qua $A, B$

Suy ra $\Delta$ nhận $\overrightarrow{AB} = (5; -2; 1)$ làm VTCP.

Vậy phương trình của đường thẳng $\Delta$ là: $\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}, (t \in \mathbb{R})$.

3. Ta có $d_1$ đi qua $M_1(-1; -3; 2)$ và VTCP $\overrightarrow{u_1} = (3; -2; -1)$

Đường thẳng $d_2$ đi qua $M_2(2; -1; 1)$ và VTCP $\overrightarrow{u_2} = (2; 3; -5)$

Gọi $(P)$ là mp đi qua $M$ và chứa đường thẳng $d_1$.

Khi đó $(P)$ có $\overrightarrow{n_P} = [\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{u_1}] = (-4; 0; -12)$ là VTPT

Tương tự gọi $(Q)$ là mp đi qua $M$ và đường thẳng $d_2$, suy ra
$\overrightarrow{n_Q} = (7; -13; -5)$ là VTPT của $(Q)$.

Vì $\Delta$ đi qua $M$ và cắt hai đường thẳng $d_1, d_2$ nên $\Delta$ là giao tuyến của $(P)$ và $(Q)$

suy ra $\overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{n_Q}\right] = -52(3; 2; -1)$

Phương trình $\Delta : \begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = -5 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$.

**Bài 3**

**1**. Ta có $\overrightarrow{AB} = \left(-4; 3; -5\right)$ là một VTCP của đường thẳng $\Delta$

Suy ra phương trình tham số của đường thẳng $\Delta$ là: $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + 3t \\ z = 4 - 5t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

**2**. Đường thẳng $d$ có $\vec{u} = (2;1;-1)$ là một VTCP

Do $\Delta // d$, suy ra $\vec{u} = (2;1;-1)$ cũng là VTCP của $\Delta$

Vậy phương trình tham số của đường thẳng $\Delta$ là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 4 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

**3**. Gọi $I = d \cap \Delta$, suy ra $\begin{cases} I \in d \\ I \in (\alpha) \end{cases} \Rightarrow I = d \cap (\alpha)$, do đó tọa độ của $I$ là

nghiệm của hệ $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z}{-1} \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases}$, giải hệ này ta được:

$x = 5, y = 0, z = -2$ hay $I(5;0;-2)$

Vì $\begin{cases} \Delta \subset (\alpha) \\ \Delta // d \end{cases}$, suy ra $\vec{v} = \left[\vec{u}, \overrightarrow{n_1}\right] = (2;-3;1)$ là VTCP của $\Delta$

Vậy phương trình tham số của đường thẳng $\Delta$ là: $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -3t \\ z = -2 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

**Bài 4**

Đường thẳng $d$ có $\vec{u} = (2;3;-4)$ là VTCP

**1.** Gọi $H$ là hình chiếu của $A$ lên đường thẳng $d$, suy ra
$H(-1+2t;-1+3t;7-4t)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = (2t-6;3t-6;-4t+7)$

Vì
$AH \perp d \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(2t-6) + 3(3t-6) + 4(4t-7) = 0 \Leftrightarrow t = 2$
$\Rightarrow H(3;5;-1)$

Do $H$ là trung điểm của $AA'$ nên $A'(1;5;-2)$.

**2.** Vì tam giác $ABC$ vuông tại $C$ nên $AC \perp d \Rightarrow C \equiv H$ hay $C(3;5;-1)$

$B \in d \Rightarrow B(-1+2t;-1+3t;7-4t) \Rightarrow \overrightarrow{CB} = (2t-4;3t-6;-4t+8)$

Do đó $BC = \sqrt{29} \Leftrightarrow (2t-4)^2 + (3t-6)^2 + (4t-8)^2 = 29 \Leftrightarrow t = 3, t = 1$

Suy ra $B(1;2;3)$ hoặc $B(5;8;-5)$.

**Bài 5**

**1**. Ta có $M \in \Delta \Rightarrow M\left(1+2t;-1-3t;2-t\right)$ nên $\overrightarrow{AM} = \left(2t-3;-3t-4;-t\right)$

Do đó $AM = \sqrt{105} \Leftrightarrow AM^2 = 105 \Leftrightarrow (2t-3)^2 + (3t+4)^2 + t^2 = 105$

$\Leftrightarrow 7t^2 + 6t - 40 = 0 \Leftrightarrow t = 2, t = -\dfrac{20}{7}$

Từ đó ta tìm được hai điểm $M(5;-7;;0)$ hoặc $M(-\dfrac{33}{7};\dfrac{53}{7};\dfrac{34}{7})$.

**2**. Gọi $H$ là hình chiếu của $A$ lên $\Delta$, suy ra $H\left(1+2t;-1-3t;2-t\right)$,

$\overrightarrow{AH} = \left(2t-3;-3t-4;-t\right)$

Vì $AH \perp \Delta$ nên $\overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0$, trong đó $\vec{u} = (2;-3;-1)$ là VTCP của $\Delta$

Do đó : $2(2t-3) - 3(-3t-4) + t = 0 \Leftrightarrow 14t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{3}{7}$. Suy ra

$H\left(\dfrac{1}{7};\dfrac{2}{7};\dfrac{17}{7}\right)$

Vì $H$ là trung điểm của $AA'$ nên

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = -\dfrac{26}{7} \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = -\dfrac{17}{7} \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = \dfrac{20}{7} \end{cases} \Rightarrow A'\left(-\dfrac{26}{7};\dfrac{-17}{7};\dfrac{20}{7}\right).$$

**3**. Ta có $D \in \Delta$ nên $D\left(1+2t;-1-3t;2-t\right)$

Suy ra $d\left(D,(\alpha)\right) = \dfrac{\left|(1+2t)+2(1+3t)+2(2-t)+2\right|}{3} = \left|2t+3\right|$

Do đó $d\left(D,(\alpha)\right) = 1 \Leftrightarrow \left|2t+3\right| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \Rightarrow D(-1;2;3) \\ t = -2 \Rightarrow D(-3;5;4) \end{array}\right.$

**Bài 6**

**1**. Vì $B \in Oy \Rightarrow B(0;b;0) \Rightarrow OB = 2OA \Leftrightarrow b^2 = 36 \Leftrightarrow b = \pm 6$

- $b = 6 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2;4;-1)$ nên phương trình $\Delta : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-6}{4} = \dfrac{z}{-1}$

- $b = -6 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2;-8;-1)$ nên phương trình $\Delta : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+6}{-8} = \dfrac{z}{-1}$.

**2**. Ta có $C\left(2+t;3-2t;-1+t\right) \Rightarrow \overrightarrow{OC} = \left(2+t;3-2t;-1+t\right), \overrightarrow{OB} = (1;1;2)$

Suy ra $\left[\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right] = \left(5t-7;t+5;1-3t\right) \Rightarrow S_{\Delta OBC} = \dfrac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]\right\|$

Do đó

$\left\|\left[\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]\right\| = \sqrt{83} \Leftrightarrow (5t-7)^2 + (t+5)^2 + (1-3t)^2 = 83 \Leftrightarrow t = 2, t = -\dfrac{4}{35}$

- $t = 2 \Rightarrow C(4;-1;1) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (3;-2;-1)$, phương trình

$\Delta : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-2}{-1}$

- $t = -\dfrac{4}{35} \Rightarrow C\left(\dfrac{66}{35};\dfrac{113}{35};-\dfrac{39}{35}\right) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \left(\dfrac{31}{35};\dfrac{78}{35};-\dfrac{109}{35}\right)$,

phương trình $\Delta : \dfrac{x-1}{31} = \dfrac{y-1}{78} = \dfrac{z-2}{-109}$.

**Bài 7**

**1**. Đường thẳng $\Delta_1$ qua điểm $M_1(1;\ -1;\ 0)$ và có $\overrightarrow{u_{\Delta_1}} = (2;\ 1;\ -1)$. Đường thẳng $\Delta_1$ qua điểm $M_2(3;\ 0;\ -1)$ và có $\overrightarrow{u_{\Delta_2}} = (-1;\ 2;\ 1)$.

Hệ phương trình tương giao của $\Delta_1$ và $\Delta_2$ là:

$$\begin{cases} 1+2t_1 = 3-t_2 \\ -1+t_1 = 2t_2 \\ -t_1 = -1+t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t_1 + t_2 = 2 \\ t_1 - 2t_2 = 1 \\ t_1 + t_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 0 \end{cases}.$$

Do đó hai đường thẳng cắt nhau tại điểm $I(3;\ 0;\ -1)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{u_{\Delta_1}}, \overrightarrow{u_{\Delta_2}}\right] = (3;\ -1;\ 5)$ nên phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$ là $3x - y + 5z - 4 = 0$.

**2**. Vì $M \in \Delta_1$ nên $M(1+2t;\ -1+t;\ -t)$.

Ta có: $\overrightarrow{M_2M}(2t-2;\ -1+t; 1-t)$, $\left[\overrightarrow{M_2M}, \vec{u}_{\Delta_2}\right] = (3t-3;\ 1-t;\ 5t-5)$.

Do đó

$$d(M, \Delta_2) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_2M}, \vec{u}_{\Delta_2}\right]\right|}{\left|\vec{u}_{\Delta_2}\right|} = \frac{\sqrt{(3t-3)^2 + (1-t)^2 + (5t-5)^2}}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2}} = |t-1|\sqrt{\frac{35}{6}}.$$

Theo giả thiết ta có $|t-1|\sqrt{\frac{35}{6}} = \frac{\sqrt{210}}{3} \Leftrightarrow |t-1| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -1 \end{array}\right.$.

Từ đó ta có tọa độ điểm $M$ cần tìm là $M(7;\ 2;\ -3)$ hoặc $M(-1; -2; 1)$.

**3**. Hai đường thẳng cắt nhau tại $I(3;\ 0;\ -1)$.

Xét hai điểm thuộc hai đường thẳng là $A(1;\ -1;\ 0)$, $B(2; 2; 0)$.

Ta có $\overrightarrow{IA}(-2;\ -1;\ 1), \left|\overrightarrow{IA}\right| = \sqrt{6}$ và $\overrightarrow{IB}(-1;\ 2;\ 1), \left|\overrightarrow{IB}\right| = \sqrt{6}$ nên véc tơ đơn vị của $\Delta_1$ và $\Delta_2$ lần lượt là:

$$\vec{e}_1 = \frac{\overrightarrow{IA}}{\left|\overrightarrow{IA}\right|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right),\ \vec{e}_2 = \frac{\overrightarrow{IB}}{\left|\overrightarrow{IB}\right|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng là đường thẳng qua $I$ và có véc tơ chỉ phương là $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \left(-\frac{3}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-3;\ 1;\ 2)$, hoặc

$$\vec{e}_1 - \vec{e}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{3}{\sqrt{6}};\ 0\right) = -\frac{1}{\sqrt{6}}(1;\ 3;\ 0).$$

Vậy phương trình tham số của các đường phân giác cần tìm là

$\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$, $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3t \\ z = -1 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

**Bài 8**

**1.** Giải theo hai cách.

**Cách 1**: Vì $\Delta$ đi qua điểm $A(2;\,0;\,3)$ và vuông góc với $\Delta_1$ nên $\Delta$ thuộc mặt phẳng $(\alpha)$ qua $A, (\alpha) \perp \Delta_1$ có phương trình $x + 2y - z + 1 = 0$.

Gọi $A' = \Delta \cap \Delta_1$ thì $A' = (\alpha) \cap \Delta_1$ nên tọa độ của $A'$ thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+2}{-1} \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A'\left(\dfrac{2}{3};\, -\dfrac{5}{3};\, -\dfrac{4}{3}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{AA'}\left(-\dfrac{4}{3};\, -\dfrac{5}{3};\, -\dfrac{13}{3}\right) = -\dfrac{1}{3}(4;\,5;\,13)$ nên phương trình chính tắc của đường thẳng cần tìm là $\Delta: \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z-3}{13}$.

**Cách 2**: Gọi $A' = \Delta \cap \Delta_1$ thì $A'(1+t;\, -1+2t;\, -2-t)$.

Ta có $\overrightarrow{AA'}(t-1;\, 2t-1;\, -t-5)$. Mà $\Delta \perp \Delta_1$ nên $\overrightarrow{AA'}.\vec{u}_{\Delta_1} = 0$, hay

$$t - 1 + 2(2t-1) + t + 5 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}.$$

Do đó $\overrightarrow{AA'}\left(-\dfrac{4}{3};\, -\dfrac{5}{3};\, -\dfrac{13}{3}\right) = -\dfrac{1}{3}(4;\,5;\,13)$ nên ta có phương trình đường thẳng $\Delta$ là $\Delta: \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z-3}{13}$.

**2.** $\Delta$ thuộc mặt phẳng $(\beta)$, với $(\beta)$ đi qua $B(1;\,-1;\,1)$ và $(\beta) \perp d_1$ nên $(\beta)$ có phương trình là $2x + 3y + z = 0$.

Gọi $B' = \Delta \cap d_2$ thì $B' = (\beta) \cap d_2$ nên tọa độ của $B'$ thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z+3}{3} \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow B'(3;\,-2;\,0)$.

Vì $\overrightarrow{BB'}(2;\,-1;\,-1)$ nên phương trình chính tắc của $\Delta$ là

$$\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{-1}.$$

**3.** Vì $\Delta$ song song $(Q): 5x + 2y + 7z + 7 = 0$ nên $\Delta$ thuộc mặt phẳng $(P)$ qua $C(0;\,-4;\,0)$ và $(P) // (Q)$.

Phương trình mặt phẳng $(P)$: $5x + 2y + 7z + 8 = 0$.

Gọi $C' = \Delta \cap d_2$ thì $C' = (P) \cap d$ nên tọa độ của $C'$ thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z}{1} \\ 5x + 2y + 7z + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow C'(-1;\ 2;\ -1).$

Vì $\overrightarrow{CC'}(-1;\ 6;\ -1)$ nên phương trình chính tắc của $\Delta$ là

$\Delta: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+4}{-6} = \dfrac{z}{1}.$

**Bài 9**

**1.** Góc giữa đường thẳng $\Delta$ và $(\alpha)$ là $30^0$. Điểm $A(-1;\ 0;\ 4)$.

Ta có $B(-3+2t;\ -1+t;\ 3+t)$ và $AB = \sqrt{6}$ nên $B(-3;\ -1;\ 3)$ hoặc $B(1;\ 1;\ 5)$. Vì $BA = 2BC = \sqrt{6}$ và $ABC = 60^0$ nên tam giác $ABC$ vuông tại $C$. Suy ra $BAC = 30^0$ do đó điểm $C$ là hình chiếu của điểm $B$ trên mặt phẳng $(\alpha)$. Từ đó ta tìm được hai điểm $C$ tương ứng với hai điểm $B$ ở trên là $C\left(-\dfrac{5}{2};\ 0;\ \dfrac{5}{2}\right)$ hoặc $C\left(\dfrac{1}{2};\ 0;\ \dfrac{11}{2}\right)$.

**2.** Vì $B \in d \Rightarrow B\left(1+t; 2+2t; -t\right)$, khi đó

$$d\left(B,(\alpha)\right) = \frac{|2t+2|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow |t+1| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -4 \end{array}\right.$$

- $t = 2 \Rightarrow B(3;6;-2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1;3;-1)$, suy ra phương trình $\Delta$ là:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-6}{3} = \frac{z+2}{-1}.$$

- $t = -2 \Rightarrow B(-3;-6;2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-5;-9;3)$, suy ra phương trình $\Delta$ là:

$$\frac{x+3}{-5} = \frac{y+6}{-9} = \frac{z-2}{3}.$$

**Bài 10**

**1.** Đường thẳng $\Delta_1$ đi qua $M_1(1;-1;3)$ có $\overrightarrow{u_1} = (1;2;-1)$ là VTCP

Đường thẳng $\Delta_2$ đi qua $M_2(2;3;-9)$ có $\overrightarrow{u_2} = (3;2;-2)$ là VTCP

$\overrightarrow{M_2M_1} = (-1;-4;12)$, $\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-2;-1;-4) \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_2M_1} = -42 \neq 0$

Suy ra hai đường thẳng $\Delta_1$, $\Delta_2$ chéo nhau và khoảng cách giữa chúng là :

$$d\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_2M_1}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\right|}=\frac{42}{\sqrt{21}}=2\sqrt{21}.$$

**2**. Gọi $H$ là hình chiếu của $C$ lên đường thẳng $\Delta_1$, khi đó :

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}CH.AB=CH$$

Do đó tam giác $ABC$ có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi $CH$ nhỏ nhất

Hay $CH$ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng $\Delta_1$, $\Delta_2$.

Ta có : $C\left(1+t;-1+2t;3-t\right)$, $H\left(2+3t';3+2t';-9-2t'\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{HC}=\left(t-3t'-1;2t-2t'-4;-t+2t'+12\right)$

Mà $\begin{cases} HC\perp\Delta_1 \\ HC\perp\Delta_2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{u_1}=0 \\ \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{u_2}=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2t-3t'=7 \\ 9t-17t'=35 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} t=2 \\ t'=-1 \end{cases}$

Vậy $C(3;3;1)$ là điểm cần tìm.

**3**. Vì $M\in\Delta_1, N\in\Delta_2$ nên suy ra

$M\left(1+a;-1+2a;3-a\right)$, $N\left(2+3b;3+2b;-9-2b\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{NM}=\left(a-3b-1;2a-2b-4;-a+2b+12\right)$

Theo giả thiết bài toán ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} MN^2=(a-3b-1)^2+(2a-2b-4)^2+(a-2b-12)^2=180 \\ \cos\alpha=\dfrac{\left|\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{u_1}\right|}{\left|\overrightarrow{NM}\right|.\left|\overrightarrow{u_1}\right|}=\dfrac{\left|3(2a-3b-7)\right|}{6\sqrt{30}}=\sqrt{\dfrac{8}{15}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} (a-3b-1)^2+(2a-2b-4)^2+(a-2b-12)^2=180 & (1) \\ \left|2a-3b-7\right|=4 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a-3b-7=4 \\ 2a-3b-7=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{3b+11}{2} \\ a=\dfrac{3b+3}{2} \end{array}\right.$$

- $a=\dfrac{3b+11}{2}$ thay vào (1) ta có được :

$$\frac{(3b-9)^2}{4}+(b+7)^2+\frac{(b+13)^2}{4}=180 \Leftrightarrow 14b^2+28b-274=0$$

**Bài 11**

**1.** Vì $B \in Oz$ nên $B(0;0;t)$.

Ta có $OB=2OA$ nên $|t|=2\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} \Leftrightarrow t=\pm 6.$

Nếu $t=6$ thì $B(0;0;6)$ nên $\overrightarrow{AB}(-1;\,2;4)$ do đó phương trình chính tắc của đường thẳng $\Delta$ là $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-6}{4}$.

Nếu $t=-6$ thì $B(0;0;-6)$ nên $\overrightarrow{AB}(-1;\,2;-8)$ do đó phương trình chính tắc của đường thẳng $\Delta$ là $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+6}{-8}$.

**2.** Ta có $C \in d$ nên $C(1+t;\,2t;\,-t)$ mà $d(C,\,(Oxy))=3$ nên $|-t|=3 \Leftrightarrow t=\pm 3.$

Nếu $t=3$ thì $C(4;6;-3)$ nên $\overrightarrow{AC}(3;\,8;-5)$ do đó phương trình chính tắc của đường thẳng $\Delta$ là $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{8}=\dfrac{z-2}{-5}$.

Nếu $t=-3$ thì $C(-2;-6;3)$ nên $\overrightarrow{AC}(-3;\,-4;1)$ do đó phương trình chính tắc của đường thẳng $\Delta$ là $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-2}{1}$.

**3.** $D \in d'$ nên $D(-1+2t;2+t;1-t)$.

Ta có: $\overrightarrow{OA}(1;\,-2;\,2)$, $\overrightarrow{OD}(-1+2t;\,2+t;\,1-t)$

nên $\left[\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OD}\right]=(-6;\,5t-3;\,5t)$.

Do đó $S_{OAD}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OD}\right]\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+(5t-3)^2+(5t)^2}$.

Theo bài ra $S_{OAD}=\dfrac{45}{2}$, nên

$$\sqrt{(-6)^2+(5t-3)^2+(5t)^2}=45 \Leftrightarrow 5t^2-3t-198=0 \Rightarrow t=-6;\ t=\frac{33}{5}.$$

Nếu $t=-6$ thì $D(-13;-4;7)\Rightarrow \overrightarrow{AD}(-14;-2;5)$, do đó phương trình chính tắc của đường thẳng $\Delta$ là $\dfrac{x-1}{-14}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-2}{5}$.

Nếu $t=\dfrac{33}{5}$ thì $D\left(\dfrac{61}{5};\dfrac{43}{5};-\dfrac{28}{5}\right)\Rightarrow \overrightarrow{AD}\left(\dfrac{56}{5};\dfrac{53}{5};-\dfrac{38}{5}\right)$, do đó phương trình chính tắc của đường thẳng $\Delta$ là $\dfrac{x-1}{56}=\dfrac{y+2}{53}=\dfrac{z-2}{-38}$.

**Bài 12**

**1.** $M(1+2t;-1+t;2+3t)\Rightarrow \overrightarrow{AM}(2t-1;t-2;2+3t)$.

$$AM=3\Leftrightarrow \sqrt{14t^2+4t+9}=3\Leftrightarrow t=0 \text{ hoặc } t=-\frac{2}{7}$$

$t=0\Rightarrow \overrightarrow{AM}(-1;-2;2)$ nên $\Delta: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-2}$.

$t=-\dfrac{2}{7}\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{7}(11;16;-8)$ nên $\Delta: \dfrac{x-2}{11}=\dfrac{y-1}{16}=\dfrac{z}{-8}$.

**2.** $N(1+2t;-1+t;2+3t)\Rightarrow \overrightarrow{BN}(2t+1;t-5;2+3t)$.

$$\overrightarrow{BC}(0;-2;-1)\Rightarrow\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BN}\right]=(-9-5t;-1-2t;4t+2).$$

Diện tích tam giác $BNC$ là $S_{BNC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BN}\right]\right|$ nên

$$\frac{1}{2}\sqrt{(-9-5t)^2+(-1-2t)^2+(4t+2)^2}=\frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 45t^2+110t+86=21\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=-\dfrac{13}{9}\end{array}\right.$$

$t=-\dfrac{13}{9}\Rightarrow \overrightarrow{BN}\left(-\dfrac{17}{9};-\dfrac{58}{9};-\dfrac{7}{3}\right)$ nên $\Delta: \dfrac{x}{17}=\dfrac{y-4}{58}=\dfrac{z}{21}$.

$t=-1\Rightarrow \overrightarrow{BN}(-1;-6;-1)$ nên $\Delta: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-4}{6}=\dfrac{z}{1}$.

**3.** Ta có $D(1+2t;-1+t;2+3t), \overrightarrow{AB}(-2;3;0), \overrightarrow{AC}(-2;1;-1)$ nên

$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-3;-2;4)\Rightarrow S_{ABC}=\dfrac{\sqrt{29}}{2}\Rightarrow d(D,(ABC))=\dfrac{19}{\sqrt{29}}$.

Phương trình $(ABC): 3x+2y-4z-8=0$.

Do đó $|4t+15|=19\Rightarrow t=1;\ t=-\dfrac{17}{2}$.

Có hai đường thẳng thỏa mãn là

$$\Delta: \frac{x-3}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-5}{-4} \text{ hoặc } \Delta: \frac{x+16}{3}=\frac{y+\frac{19}{2}}{2}=\frac{z+\frac{47}{2}}{-4}.$$

**Bài 13**

**1.** $\Delta_1 \cap \Delta_2 = I(1;\ 0;\ 1)$.

**2.** $\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{1}{2}$ nên $S_{IAB}=\frac{1}{2}IA.IB\sin(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{\sqrt{3}}{4}IA^2 \Rightarrow IA=IB=\sqrt{2}.$

Gọi $A(-1+a;-2+a;1), B(1-b;0;1+b)$ ta có

$$IA=\sqrt{2} \Leftrightarrow |a-2|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=1 \end{array}\right. \Rightarrow A_1(2;1;1),\ A_2(0;-1;1).$$

$$IB=\sqrt{2} \Leftrightarrow |b|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=-1 \end{array}\right. \Rightarrow B_1(0;0;2),\ B_2(2;0;0).$$

Có bốn đường thẳng thỏa mãn là

$$\Delta(A_1B_1): \frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}; \quad \Delta(A_2B_2): \frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$$

Và $\Delta(A_1B_2): \begin{cases} x=2 \\ y=m,\ (t\in R) \\ z=m \end{cases}$ $\Delta(A_2B_1): \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=2+n \end{cases}$ $(m,n\in\mathbb{R})$.

**Bài 14**

**1**. Đường thẳng $d_1$ đi qua $A(1;-3;-2)$ và có $\overrightarrow{u_1}=(1;2;3)$ là VTCP

Đường thẳng $d_2$ đi qua $B(4;2;3)$ và có $\overrightarrow{u_2}=(1;-4;-3)$ là VTCP

Ta có: $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(6;6;-6)$, $\overrightarrow{AB}=(3;5;5) \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{AB}=18\neq 0$ suy ra hai đường thẳng $d_1,d_2$ chéo nhau.

Gọi $MN$ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng $d_1,d_2$

( với $M\in d_1$, $N\in d_2$)

Suy ra $M\left(1+t;-3+2t;-2+3t\right)$, $N\left(4+t';2-4t';3-3t'\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\left(-t+t'+3;-2t-4t'+5;-3t-3t'+5\right)$$

Vì $\begin{cases} MN\perp d_1 \\ MN\perp d_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_1}=0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_2}=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1(-t+t'+3)+2(-2t-4t'+5)+3(-3t-3t'+5)=0 \\ 1(-t+t'+3)-4(-2t-4t'+5)-3(-3t-3t'+5)=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 7t+8t'-14=0 \\ 8t+13t'-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t'=0 \end{cases}$

Từ đó suy ra $M(3;1;4)$, $\overrightarrow{MN}=(1;1;-1)$

Vậy phương trình $MN: \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-4}{-1}$.

**2.** Ta có $A(1+2a;\ a;\ 3+a)$, $B(b;\ 2+2b; 1+3b)$.

Vì $AB\perp d_3$ nên $\overrightarrow{AB}.\vec{u}_{d_3}=0 \Leftrightarrow 1+9a=10b$.

Vì $AB=\sqrt{13}$ nên tìm được hai cặp điểm là

$a=b=1$ thì $A(3;\ 1;\ 4)$, $B(1;\ 4;\ 4)$

$a=-\dfrac{223}{237}, b=-\dfrac{177}{237}$ thì $A\left(-\dfrac{209}{237};-\dfrac{223}{237};\dfrac{488}{237}\right)$, $B\left(-\dfrac{177}{237};\dfrac{120}{237};-\dfrac{294}{237}\right)$.

**Bài 15**

**1.** Gọi $M=\Delta\cap\Delta_1$ thì $M(t;\ -1+2t;\ 6-t)$.

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta$ là $\overrightarrow{AM}(t+1;\ -1+2t;\ 2-t)$.

Vì góc giữa hai đường thẳng là $60^0$ nên $\cos 60^0=\cos(\Delta,\Delta_1)$, hay

$$\frac{1}{2}=\frac{\left|\overrightarrow{AM}.\vec{u}_{\Delta_1}\right|}{\left|\overrightarrow{AM}\right|.\left|\vec{u}_{\Delta_1}\right|} \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{|t+1-2+4t-2+t|}{\sqrt{(t+1)^2+(-1+2t)^2+(2-t)^2}.\sqrt{6}}$$

$$\Leftrightarrow 3t^2-3t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \end{array}\right..$$

Nếu $t=0$ thì $\overrightarrow{AM}(1;\ -1;\ 2)$ nên $\Delta$ có phương trình tham số

$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=-t \qquad (t\in\mathbb{R}). \\ z=4+2t \end{cases}$$

Nếu $t=1$ thì $\overrightarrow{AM}(2;\ 1;\ 1)$ nên $\Delta$ có phương trình tham số

$$\begin{cases} x=-1+2t \\ y=t \qquad (t\in\mathbb{R}). \\ z=4+t \end{cases}$$

**2.** Gọi $N=\Delta\cap\Delta_2$ thì $N(1+3t;\ 1+2t;\ 5+2t)$.

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta$ là $\overrightarrow{BN}(3t+4;\ 2t+2;\ 2t+2)$.

Vì góc giữa đường thẳng $\Delta$ và mặt phẳng $(\alpha): x+2y-z+5=0$ là $30^0$ nên

$\sin 30^0 = \sin(\Delta,(\alpha)) = \left|\cos(\vec{u}_\Delta, \vec{n}_{(\alpha)})\right|$, hay

$$\frac{1}{2} = \frac{\left|\overrightarrow{BN}.\vec{n}_{(\alpha)}\right|}{\left|\overrightarrow{BN}\right|.\left|\vec{n}_{(\alpha)}\right|} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{|3t+4+4+4t-2-2t|}{\sqrt{(3t+4)^2+(2+2t)^2+(2+2t)^2}.\sqrt{6}}$$

$$\Leftrightarrow 4(5+6t)^2 = 3\left[(3t+4)^2 + 2(2+2t)^2\right] \Leftrightarrow t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

Với $t = 0$ thì $\overrightarrow{BN}(4;\ 2;\ 2) = 2(2;\ 1;\ 1)$ nên

$\Delta$ có phương trình tham số $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

**Bài 16**

Đường thẳng $d_m$ đi qua $A(4m-3; 2m+3; 8m+7)$ và có

$\vec{u} = \left(2m-1; m+1; 4m+3\right)$

Giả sử $d_m \subset (\alpha): ax + by + cz + d = 0$ với mọi $m$, khi đó ta có:

$$\begin{cases} a(2m-1) + b(m+1) + c(4m+3) = 0 \\ a(4m-3) + b(2m+3) + c(8m+7) + d = 0 \end{cases} \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2a+b+4c)m - a + b + 3c = 0 \\ (4a+2b+8c)m - 3a + 3b + 7c + d = 0 \end{cases} \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b+4c = 0 \\ -a+b+3c = 0 \\ 2a+b+4c = 0 \\ -3a+3b+7c+d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 10a \\ c = -3a \\ d = -6a \end{cases}$$ , ta chọn

$a = 1 \Rightarrow b = 10, c = -3, d = -6$

Vậy $d_m \subset (\alpha): x + 10y - 3z - 6 = 0$.