

CHƯƠNG IV: HÌNH LĂNG TRỤ – HÌNH CHÓP ĐỀU

I. Mở đầu về hình học không gian

1. Đường thẳng, mặt phẳng

- Qua ba điểm không thẳng hàng xác định một và chỉ một mặt phẳng.
- Qua hai đường thẳng cắt nhau xác định một và chỉ một mặt phẳng.
- Đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đó đều thuộc mặt phẳng.

2. Hai đường thẳng song song trong không gian

- Hai đường thẳng a, b gọi là **song song** với nhau nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung. Kí hiệu $a // b$.
- Hai đường thẳng phân biệt, cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Chú ý: Hai đường thẳng phân biệt trong không gian có thể:

- Cắt nhau
- Song song
- Chéo nhau (không cùng nằm trong một mặt phẳng)

3. Đường thẳng song song với mặt phẳng

- Một đường thẳng a gọi là **song song** với một mặt phẳng (P) nếu đường thẳng đó không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng b nằm trong mặt phẳng.

Kí hiệu $a // (P)$.

- Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì chúng không có điểm chung.

4. Hai mặt phẳng song song

- Nếu mặt phẳng (Q) chứa hai đường thẳng cắt nhau, cùng song song với mặt phẳng (P) thì mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) . Kí hiệu $(Q) // (P)$.

- Hai mặt phẳng song song với nhau thì không có điểm chung.

- Hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có chung một đường thẳng đi qua điểm chung đó (đường thẳng chung đó đgl giao tuyến của hai mặt phẳng).

5. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

- Đường thẳng a gọi là **vuông góc** với mặt phẳng (P) nếu đường thẳng a vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (P) . Kí hiệu $a \perp (P)$.

- Nếu một đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) tại điểm A thì nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (P) và đi qua điểm A .

6. Hai mặt phẳng vuông góc

- Mặt phẳng (Q) gọi là **vuông góc** với mặt phẳng (P) nếu mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) . Kí hiệu $(Q) \perp (P)$.

II. Hình hộp chữ nhật - Hình lập phương

- Hình hộp chữ nhật có: 6 mặt đều là hình chữ nhật, 8 đỉnh, 12 cạnh.

- Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có 6 mặt đều là hình vuông.

- Thể tích hình hộp chữ nhật có ba kích thước a, b, c là: $V = abc$.

- Thể tích hình lập phương cạnh a là: $V = a^3$.

III. Hình lăng trụ đứng

- Hình lăng trụ đứng có:

- Hai đáy là hai đa giác bằng nhau và nằm trên hai mặt phẳng song song.

- Các cạnh bên song song, bằng nhau và vuông góc với hai mặt phẳng đáy. Độ dài cạnh bên đgl chiều cao của hình lăng trụ đứng.

- Các mặt bên là những hình chữ nhật và vuông góc với hai mặt phẳng đáy.

- Hình hộp chữ nhật, hình lập phương là những hình lăng trụ đứng.

- Hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành đgl hình hộp đứng.

- Diện tích - Thể tích

- Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng bằng chu vi đáy nhân với chiều cao:

$$S_{xq} = 2ph \quad (p: \text{nửa chu vi đáy}, h: \text{chiều cao})$$

– Diện tích toàn phần của hình lăng trụ đứng bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích hai đáy.

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S \quad (S: \text{diện tích đáy})$$

– Thể tích của hình lăng trụ đứng bằng diện tích đáy nhân với chiều cao:

$$V = S.h \quad (S: \text{diện tích đáy}, h: \text{chiều cao})$$

IV. Hình chóp - Hình chóp cụt

• Hình chóp có:

– Đáy là một đa giác, các mặt bên là những tam giác có chung một đỉnh.

– Đường thẳng đi qua đỉnh và vuông góc với mặt phẳng đáy gọi là đường cao.

• Hình chóp đều là hình chóp có đáy là một đa giác đều, các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau có chung đỉnh.

– Chân đường cao của hình chóp đều trùng với tâm của đường tròn đi qua các đỉnh của mặt đáy.

– Đường cao vẽ từ đỉnh của mỗi mặt bên của hình chóp đều đgl **trung đoạn** của hình chóp đó.

• Hình chóp cụt đều là phần hình chóp đều nằm giữa mặt phẳng đáy của hình chóp và mặt phẳng song song với đáy và cắt hình chóp.

– Mỗi mặt bên của hình chóp cụt đều là một hình thang cân.

• Diện tích - Thể tích:

– Diện tích xung quanh của hình chóp đều bằng tích của nửa chu vi đáy với trung đoạn:

$$S_{xq} = p.d \quad (p: \text{nửa chu vi đáy}, d: \text{trung đoạn})$$

– Diện tích toàn phần của hình chóp bằng tổng của diện tích xung quanh và diện tích đáy:

$$S_{tp} = S_{xq} + S \quad (S: \text{diện tích đáy})$$

– Thể tích của hình chóp bằng một phần ba của diện tích đáy nhân với chiều cao:

$$V = \frac{1}{3} S.h \quad (S: \text{diện tích đáy}, h: \text{chiều cao})$$

* Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác đgl đường tròn ngoại tiếp đa giác đó.

VẤN ĐỀ I: Chứng minh tính chất song song - vuông góc

Bài 1. Cho tam giác ABC và điểm S không thuộc mp(ABC). Nối S với A, B, C. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, SC, SA.

a) Chứng minh MQ // mp(SBC) và NP // mp(SAB).

b) Chứng minh tứ giác MNPQ là hình bình hành.

Bài 2. Cho hình thang vuông ABCD, $B = C = 90^\circ$ và AD không song song với BC. Trên đường thẳng vuông góc với mp(ABCD) tại B, lấy điểm S và nối S với A, C, D.

a) Chứng minh $AB \perp mp(SBC)$.

b) Chứng minh $mp(SBC) \perp mp(ABCD)$.

c) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

Bài 3. Cho hình vuông ABCD, O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Trên đường thẳng vuông góc với mp(ABCD) tại O, lấy điểm S và nối S với A, B, C, D.

a) Chứng minh $mp(SAC) \perp mp(SBD)$.

b) Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Chứng minh $mp(MNPQ) // mp(ABCD)$.

c) Tứ giác MNPQ là hình gì? Tính diện tích của tứ giác khi biết $AB = a$.

HD: c) $MNPQ$ là hình vuông; $S_{MNPQ} = \frac{1}{4}a^2$.

Bài 4. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.EFGH.

- Đường thẳng BF vuông góc với những mặt phẳng nào?
- Chứng minh $mp(AEHD) \perp mp(CGHD)$.
- Gọi M, P theo thứ tự là trung điểm của AE, CG. Chứng minh $MP \parallel AC$.
- Gọi N, Q theo thứ tự là trung điểm của BF, DH. Chứng tỏ M, N, P, Q cùng nằm trên một mặt phẳng và $mp(MNPQ)$ song song với những mặt phẳng nào?

Bài 5.

-

VẤN ĐỀ II: Tính diện tích - thể tích

Bài 1. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB = 12\text{cm}$, $AD = 16\text{cm}$, $AA' = 25\text{cm}$.

- Chứng minh $ACC'A'$, $BDD'B'$ là các hình chữ nhật.
- Chứng minh $BD'^2 = AB^2 + AD^2 + AA'^2$.
- Tính thể tích của hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'.

Bài 2. Một cái thùng hình lập phương, cạnh 7dm, có chứa nước với độ sâu của nước là 4dm. Người ta thả 25 viên gạch có chiều dài 2dm, chiều rộng 1dm và chiều cao 0,5dm vào thùng. Hỏi nước trong thùng dâng lên cách miệng thùng bao nhiêu dm? (giả thiết toàn bộ gạch đều ngập trong nước và gạch không thấm nước).

ĐS: Nước dâng lên cách miệng thùng là 2,49dm.

Bài 3. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a . M là trung điểm cạnh BC và $A'MA = 60^\circ$.

- Tính độ dài đoạn thẳng AA'.
- Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của hình lăng trụ.

$$\text{ĐS: a) } AA' = \frac{3a}{2} \quad \text{b) } S_{xq} = \frac{9a^2}{2}; S_{tp} = (9 + \sqrt{3})\frac{a^2}{2}; V = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^3.$$

Bài 4. Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và $DAB = 60^\circ$, $AA' = a$.

- Chứng minh $mp(A'BD) \parallel mp(CB'D')$.
- Chứng minh $mp(ACCA') \perp mp(BDD'B')$.
- Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình lăng trụ.

$$\text{ĐS: c) } S_{tp} = (4 + \sqrt{3})a^2; V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}.$$

Bài 5. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều, $AA' = 5\text{cm}$ và $BAB' = 45^\circ$. Tính diện tích xung quanh và thể tích của lăng trụ.

$$\text{ĐS: } S_{xq} = 75\text{cm}^2; V = \frac{125\sqrt{3}}{4}\text{cm}^3.$$

Bài 6. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có cạnh $AB = a$, $AD = b$. M và N lần lượt là hai điểm trên cạnh AB, BC. Mặt phẳng (MDD') cắt A'B' tại M', mặt phẳng (NDD') cắt B'C' tại N'. Các mặt phẳng đó chia hình hộp thành ba phần có thể tích bằng nhau.

- Tính AM, CN theo a, b .
- Tính tỉ số thể tích hai hình lăng trụ đứng DMN.D'M'N' và BMN.B'M'N'.

ĐS: a) $AM = \frac{2a}{3}; CN = \frac{2}{3}b$. Sử dụng giả thiết thể tích. b) $\frac{V_{DMN.D'M'N'}}{V_{BMN.B'M'N'}} = 5$.

Bài 7. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bên bằng 25cm, đáy là hình vuông có cạnh 30cm.

- Tính độ dài đường cao, diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp.
- Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp hình vuông, O' là trung điểm của SO. Cắt hình chóp bởi một mặt phẳng đi qua O' và song song với mp(ABCD) ta được hình chóp cắt ABCD.A'B'C'D'. Tính diện tích xung quanh và thể tích hình chóp cắt.

ĐS: a) $SO = 5\sqrt{43}cm; S_{tp} = 2100cm^2; V = 1500\sqrt{43}cm^3$

b) $S_{xq} = 900cm^2; V = \frac{2625\sqrt{43}}{2}cm^3$

Bài 8. Cho hình chóp đều S.ABC. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, bán kính R = OA = $2\sqrt{3}cm$ và M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA.

- Chứng minh $SMO = SNO = SPO$.
- Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp, biết $SMO = 60^\circ$.

Bài 9. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi S là giao điểm hai đường chéo A'C' và B'D'.

- Chứng minh rằng hình chóp S.ABCD là hình chóp đều.
- Tính tỉ số thể tích của hình chóp S.ABCD là hình lập phương.

ĐS: b) $\frac{V_{S.ABCD}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{1}{3}$.

Bài 10. Cho hình chóp lục giác đều S.MNOPQR. H là tâm đường tròn ngoại tiếp lục giác đáy và có bán kính R = HM = 12cm, chiều cao SH = 35cm.

- Tính diện tích đáy và thể tích của hình chóp.
- Tính độ dài cạnh bên SM và diện tích toàn phần của hình chóp.

ĐS: a) $S_{MNOPIQR} = 6\sqrt{108}cm^2; V = 70\sqrt{108}cm^3$ b)

$SM = 37cm; S_{tp} = 36\sqrt{1333} + 6\sqrt{108}(cm^2)$

Bài 11. Cho hình chóp cắt đều ABC.A'B'C' có các cạnh AB = 2a, A'B' = a, đường cao của mặt bên bằng a.

- Tính diện tích xung quanh của hình chóp cắt.
- Tính cạnh bên, chiều cao và thể tích của hình chóp cắt.

ĐS: a) $S_{xq} = \frac{9a^2}{2}$ b) $AA' = \frac{a\sqrt{5}}{2}, OO' = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{17}{3}}, V_{ABC.A'B'C'} = \frac{6}{5}a^3$.

Bài 12. Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D', đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi S là giao điểm hai đường chéo A'C' và B'D', M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

- Chứng minh hình chóp S.MNPQ là hình chóp đều.
- Tính tỉ số thể tích của hình chóp đều S.MNPQ và hình hộp đứng.

ĐS: b) $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{6}$.

Bài 13. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy là 8cm, chiều cao 10cm.

- Tính diện tích toàn phần của hình chóp.
- Tính thể tích của hình chóp.

ĐS: a) $S_{xq} = 16\sqrt{116}(cm^2), S_{tp} = 16\sqrt{116} + 64(cm^2)$ b) $V = \frac{640}{3}(cm^3)$.

Bài 14.

a)

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG IV

Bài 1. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông có $A = D = 90^\circ$, $AB = BC = AA' = 4\text{cm}$, $C = 60^\circ$.

- a) Chứng minh $\text{mp}(ABB'A') \perp \text{mp}(ADD'A')$.
b) Tính diện tích toàn phần, thể tích của hình lăng trụ đứng.

ĐS: b) $S_{xq} \approx 34,92(\text{cm}^2)$, $V \approx 69,20(\text{cm}^3)$.

Bài 2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

- a) Tứ giác $AA'C'C$ là hình gì?
b) Gọi O là giao điểm của AC' và $A'C$. Chứng minh ba điểm B, O, D' thẳng hàng.
c) Tính thể tích của hình hộp, biết $AD = 4\text{cm}$, $AB = 3\text{cm}$, $BD' = 13\text{cm}$.

ĐS: a) $AA'C'C$ là hình chữ nhật b) O là trung điểm của BD' c) $V = 144(\text{cm}^3)$.

Bài 3. Cho hình chóp đều $S.ABC$, đáy là tam giác đều có cạnh bằng 4cm . Gọi H là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- a) Chứng minh $SAH = SBH = SCH$.
b) Tính thể tích của hình chóp, biết $SAH = 45^\circ$.

ĐS: b) $V \approx 5,33(\text{cm}^3)$.

Bài 4. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh 6cm , góc $ABD = 60^\circ$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AA', CC' .

- a) Tứ giác $B'MDN$ là hình gì?
b) Khi tứ giác $B'MDN$ là hình vuông, tính thể tích của hình lăng trụ.

ĐS: a) $B'MDN$ là hình thoi b) $V \approx 264,72(\text{cm}^3)$

Bài 5. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $AB = 20\text{cm}$, $AA' = 19,4\text{cm}$.

- a) Chứng minh các tứ giác $ABC'D'$, $CDA'B'$ là những hình chữ nhật.
b) Tính thể tích và diện tích toàn phần của hình hộp.
c) Gọi S là giao điểm của hai đường chéo $A'C'$ và $B'D'$. Chứng minh $S.ABCD$ là hình chóp đều.
d) Tính độ dài cạnh bên SA , diện tích toàn phần và thể tích hình chóp.

ĐS: b) $S_{tp} = 2352(\text{cm}^2)$, $V = 7760(\text{cm}^3)$

d) $SA = 24(\text{cm})$, $S_{tp} = 1272(\text{cm}^2)$, $V = 2586,7(\text{cm}^3)$

Bài 6.

a)