CHƯƠNG III: TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

I. ĐỊNH LÍ TA-LÉT TRONG TAM GIÁC – TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC

1. Tỉ số của hai đoạn thẳng

- *Tỉ số của hai đoạn thẳng là tỉ số độ dài của chúng theo cùng một đơn vị đo.*
- *Tỉ số của hai đoạn thẳng không phụ thuộc vào cách chọn đơn vị đo.*

2. Đoạn thẳng tỉ lệ

Hai đoạn thẳng AB và CD đgl tỉ lệ với hai đoạn thẳng A′B′ và C′D′ nếu có tỉ lệ thức:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'} \quad \text{hay} \quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{CD}{C'D'}$$

3. Định lí Ta-lét trong tam giác

Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

$$B'C' \parallel BC \Rightarrow \frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC};\frac{AB'}{B'B}=\frac{AC'}{C'C};\frac{AB}{B'B}=\frac{AC}{C'C}$$

4. Định lí Ta-lét đảo

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

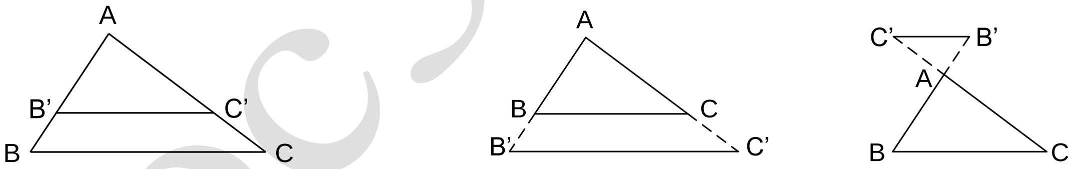
$$\frac{AB'}{B'B}=\frac{AC'}{C'C} \Rightarrow B'C' \parallel BC$$

5. Hệ quả

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.

$$B'C' \parallel BC \Rightarrow \frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}$$

Chú ý: *Hệ quả trên vẫn đúng cho trường hợp đường thẳng song song với một cạnh và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại.*



6. Tính chất đường phân giác trong tam giác

Trong tam giác, đường phân giác của một góc chia cạnh đối diện thành hai đoạn thẳng tỉ lệ với hai cạnh kề hai đoạn ấy.

$$AD,\ AE \text{ là các phân giác trong và ngoài của góc } BAC \Rightarrow \frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{EB}{EC}$$

7. Nhắc lại một số tính chất của tỉ lệ thức

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \begin{cases} ad=bc \\ \dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d} \\ \dfrac{a\pm b}{b}=\dfrac{c\pm d}{d} \\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a-c}{b-d} \end{cases}$$

VẤN ĐỀ I. Tính độ dài đoạn thẳng

Bài 1. Cho tam giác ABC, G là trọng tâm. Qua G vẽ đường thẳng song song với cạnh AC, cắt các cạnh AB, BC lần lượt ở D và E. Tính độ dài đoạn thẳng DE, biết $AD + EC = 16cm$ và chu vi tam giác ABC bằng $75cm$.

HD: Vẽ DN // BC $\Rightarrow$ DNCE là hbh $\Rightarrow$ DE = NC. DE = 18 cm.

Bài 2. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Đường thẳng song song hai đáy cắt cạnh AD tại M, cắt cạnh BC tại N sao cho MD = 3MA.

a) Tính tỉ số $\dfrac{NB}{NC}$.

b) Cho AB = 8cm, CD = 20cm. Tính MN.

HD: a) Vẽ AQ // BC, cắt MN tại P $\Rightarrow$ ABNP, PNCQ là các hbh $\Rightarrow \dfrac{NB}{NC} = \dfrac{1}{3}$.

b) Vẽ PE // AD $\Rightarrow$ MPED là hbh $\Rightarrow$ MN = 11 cm.

Bài 3. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm B′, C′ sao cho $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC}$.

Qua B′ vẽ đường thẳng *a* song song với BC, cắt cạnh AC tại C″.

a) So sánh độ dài các đoạn thẳng AC′ và AC″.

b) Chứng minh B′C′ // BC.

HD: a) AC′ = AC″ b) C′ trùng với C″ $\Rightarrow$ B′C′ // BC.

Bài 4. Cho tam giác ABC, đường cao AH. Đường thẳng *a* song song với BC cắt các cạnh AB, AC và đường cao AH lần lượt tại B′, C′, H′.

a) Chứng minh $\dfrac{AH'}{AH} = \dfrac{B'C'}{BC}$.

b) Cho $AH' = \dfrac{1}{3}AH$ và diện tích tam giác ABC là $67,5cm^2$. Tính diện tích tam giác AB′C′.

HD: b) $S_{AB'C'} = \dfrac{1}{9}S_{ABC} = 7,5cm^2$.

Bài 5. Cho tam giác ABC. Gọi D là điểm chia cạnh AB thành hai đoạn thẳng có độ dài AD = 13,5cm, DB = 4,5cm. Tính tỉ số các khoảng cách từ các điểm D và B đến cạnh AC.

HD: Vẽ BM ⊥ AC, DN ⊥ AC $\Rightarrow \dfrac{DN}{BM} = 0,75$.

Bài 6. Cho tam giác ABC có BC = 15cm. Trên đường cao AH lấy các điểm I, K sao cho AK = KI = IH. Qua I và K vẽ các đường thẳng EF // BC, MN // BC (E, M ∈ AB; F, N ∈ AC).

a) Tính độ dài các đoạn thẳng MN và EF.

b) Tính diện tích tứ giác MNFE, biết rằng diện tích của tam giác ABC là $270cm^2$.

HD: a) EF = 10 cm, MN = 5cm b) $S_{MNFE} = \dfrac{1}{3}S_{ABC} = 90cm^2$.

Bài 7. Cho tứ giác ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo. Qua điểm I thuộc đoạn OB, vẽ đường thẳng song song với đường chéo AC, cắt các cạnh AB, BC và các tia DA, DC theo thứ tự tại các điểm M, N, P, Q.

a) Chứng minh: $\dfrac{IM}{OA} = \dfrac{IB}{OB}$ và $\dfrac{IM}{IP} = \dfrac{IB}{ID}.\dfrac{OD}{OB}$.

b) Chứng minh: $\dfrac{IM}{IP} = \dfrac{IN}{IQ}$.

HD: Sử dụng định lí Ta-lét.

Bài 8. Cho hình bình hành ABCD. Gọi E là trung điểm của cạnh AB, F là trung điểm của cạnh CD. Chứng minh rằng hai đoạn thẳng DE và BF chia đường chéo AC thành ba đoạn bằng nhau.

HD: Gọi M, N lần lượt là giao điểm của DE và BF với AC. Chứng minh: AM = MN = NC.

Bài 9. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Vẽ đường thẳng song song với cạnh AB, cắt cạnh AD ở M, cắt cạnh BC ở N. Biết rằng $\frac{DM}{MA}=\frac{CN}{NB}=\frac{m}{n}$. Chứng minh rằng: $MN=\frac{mAB+nCD}{m+n}$.

HD: Gọi E là giao điểm của MN với AC. Tính được $EN=\frac{m}{m+n}AB, ME=\frac{n}{m+n}CD$.

Bài 10. Cho tứ giác ABCD có các góc B và D là góc vuông. Từ một điểm M trên đường chéo AC, vẽ MN ⊥ BC, MP ⊥ AD. Chứng minh: $\frac{MN}{AB}+\frac{MP}{CD}=1$.

HD: Tính riêng từng tỉ số $\frac{MN}{AB};\frac{MP}{CD}$, *rồi cộng lại.*

Bài 11. Cho hình bình hành ABCD. Một cát tuyến qua D, cắt đường chéo AC ở I và cắt cạnh BC ở N, cắt đường thẳng AB ở M.

a) Chứng minh rằng tích AM.CN không phụ thuộc vào vị trí của cát tuyến qua D.

b) Chứng minh hệ thức: $ID^2=IM.IN$.

Bài 12. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm B′, C′.

Chứng minh: $\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}}=\frac{AB}{AB'}.\frac{AC}{AC'}$.

HD: Vẽ các đường cao CH và C′H′ $\Rightarrow \frac{AC}{AC'}=\frac{CH}{C'H'}$.

Bài 13. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, BC, CD lấy lần lượt các điểm D, E, F sao cho $AD=\frac{1}{4}AB$, $BE=\frac{1}{4}BC$, $CF=\frac{1}{4}CA$. Tính diện tích tam giác DEF, biết rằng diện tích tam giác ABC bằng $a^2(cm^2)$.

HD: $S_{BED}=S_{CEF}=S_{ADF}=\frac{3}{16}S_{ABC} \Rightarrow S_{DEF}=\frac{7}{16}a^2(cm^2)$.

Bài 14. Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy điểm K sao cho $\frac{AK}{BK}=\frac{1}{2}$. Trên cạnh BC lấy điểm L sao cho $\frac{CL}{BL}=\frac{2}{1}$. Gọi Q là giao điểm của các đường thẳng AL và CK. Tính diện tích tam giác ABC, biết diện tích tam giác BQC bằng $a^2(cm^2)$.

HD: Vẽ LM // CK. $\frac{S_{BLQ}}{S_{BLA}}=\frac{S_{CLQ}}{S_{CLA}}=\frac{4}{7} \Rightarrow S_{ABC}=\frac{7}{4}S_{BQC}=\frac{7}{4}a^2(cm^2)$.

Bài 15. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, BC, CA lấy lần lượt các điểm D, E, F sao cho:

$$\frac{AD}{AB}=\frac{BE}{BC}=\frac{CF}{CA}=\frac{1}{3}$$

Tính diện tích tam giác tạo thành bởi các đường thẳng AE, BF, CD, biết diện tích tam giác ABC là S.

HD: Gọi M, P, T lần lượt là giao điểm của AE và CD, AE và BF, BF và CD.

Qua D vẽ DD′// AE. Tính được $\frac{DD'}{ME}=\frac{7}{6} \Rightarrow \frac{CM}{CD}=\frac{6}{7} \Rightarrow S_{CMA}=\frac{6}{7}S_{CAD}=\frac{2}{7}S_{ABC}=\frac{2}{7}S$.

$S_{MPT}=S_{ABC}-(S_{CMA}+S_{APB}+S_{BTC})=\frac{1}{7}S$.

Bài 16. Cho

a)

VẤN ĐỀ II. Chứng minh hai đường thẳng song song

Bài 1. Cho hình chữ nhật ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm E, F, G, H sao cho $\frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AD} = \frac{CF}{CB} = \frac{CG}{CD}$.

a) Chứng minh tứ giác EFGH là hình bình hành.

b) Chứng minh hình bình hành EFGH có chu vi không đổi.

HD: b) Gọi I, J là giao điểm của AC với HE và GF $\Rightarrow P_{EFGH} = 2(AI + IJ + JC) = 2AC$.

Bài 2. Cho hình thang ABCD (AB // CD), M là trung điểm của CD. Gọi I là giao điểm của AM và BD, K là giao điểm của BM và AC.

a) Chứng minh IK // AB.

b) Đường thẳng IK cắt AD, BC lần lượt ở E và F. Chứng minh EI = IK = KF.

HD: a) Chứng minh $\frac{MI}{IA} = \frac{MK}{KB} \Rightarrow IK \parallel AB$.

Bài 3. Cho hình thang ABCD có đáy nhỏ CD. Từ D, vẽ đường thẳng song song với cạnh BC, cắt AC tại M và AB tại K. Từ C, vẽ đường thẳng song song với cạnh bên AD, cắt cạnh đáy AB tại F. Qua F, vẽ đường thẳng song song với đường chéo AC, cắt cạnh bên BC tại P. Chứng minh rằng:

a) MP song song với AB.

b) Ba đường thẳng MP, CF, DB đồng qui.

HD: b) Gọi I là giao điểm của DB với CF. Chứng minh P, I, M thẳng hàng.

Bài 4. Cho tứ giác ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Đường thẳng song song với BC qua O, cắt AB ở E và đường thẳng song song với CD qua O, cắt AD ở F.

a) Chứng minh đường thẳng EF song song với đường chéo BD.

b) Từ O vẽ các đường thẳng song song với AB và AD, cắt BC và DC lần lượt tại G và H. Chứng minh hệ thức: CG.DH = BG.CH.

HD: a) Chứng minh $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD}$ *b) Dùng kết quả câu a) cho đoạn GH.*

Bài 5.

a)

VẤN ĐỀ III. Tính chất đường phân giác của tam giác

Bài 1. Cho tam giác ABC cân ở A, BC = 8cm, phân giác của góc B cắt đường cao AH ở K, $\frac{AK}{AH}=\frac{3}{5}$.

a) Tính độ dài AB.

b) Đường thẳng vuông góc với BK cắt AH ở E. Tính EH.

HD: a) AB = 6cm   b) EH = 8,94 cm.

Bài 2. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh AB = *m*, AC = *n*; AD là đường phân giác trong của góc A. Tính tỉ số diện tích của tam giác ABD và tam giác ACD.

HD: $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{m}{n}$.

Bài 3. Cho tam giác ABC cân ở A, phân giác trong BD, BC = 10cm, AB = 15cm.

a) Tính AD, DC.

b) Đường phân giác ngoài của góc B của tam giác ABC cắt đường thẳng AC tại D′. Tính D′C.

HD: a) DA = 9cm, DC = 6cm   b) D′C = 10cm.

Bài 4. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM và đường phân giác trong AD.

a) Tính diện tích tam giác ADM, biết AB = *m*, AC = *n* (*n* > *m*) và diện tích ΔABC bằng S.

b) Cho *n* = 7cm, *m* = 3cm. Diện tích tam giác ADM chiếm bao nhiêu phần trăm diện tích tam giác ABC?

HD: a) $S_{ADM}=\frac{n-m}{2(m+n)}S_{ABC}$ *b)* $S_{ADM}=20\%S_{ABC}$.

Bài 5. Cho tam giác ABC có AB = 5cm, AC = 6cm, BC = 7cm. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, O là giao điểm của hai đường phân giác BD, AE.

a) Tính độ dài đoạn thẳng AD.

b) Chứng minh OG // AC.

HD: a) $AD=2,5cm$ *b)* $OG \,//\, DM \Rightarrow OG \,//\, AC$.

Bài 6. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM, đường phân giác của góc $\widehat{AMB}$ cắt AB ở D, đường phân giác của góc $\widehat{AMC}$ cắt cạnh AC ở E. Chứng minh DE // BC.

HD: $\frac{DA}{DB}=\frac{EA}{EC}\Rightarrow DE \parallel BC$.

Bài 7. Cho tam giác ABC (AB < AC), AD là phân giác trong của góc A. Qua trung điểm E của cạnh BC, vẽ đường thẳng song song với AD, cắt cạnh AC tại F, cắt đường thẳng AB tại G. Chứng minh CF = BG.

HD: $\frac{BG}{CF}=\frac{BE.CD.BA}{BD.CE.AC}=\frac{CD.AB}{BD.AC}=1$.

Bài 8. Cho tam giác ABC và ba đường phân giác AM, BN, CP cắt nhau tại O. Ba cạnh AB, BC, CA tỉ lệ với 4, 7, 5.

a) Tính MC, biết BC = 18cm.

b) Tính AC, biết NC – NA = 3cm.

c) Tính tỉ số $\frac{OP}{OC}$.

d) Chứng minh: $\frac{MB}{MC}.\frac{NC}{NA}.\frac{PA}{PB}=1$.

e) Chứng minh: $\frac{1}{AM}+\frac{1}{BN}+\frac{1}{CP}>\frac{1}{BC}+\frac{1}{CA}+\frac{1}{AB}$.

HD: a) MC = 10cm b) AC = 11cm c) $\frac{OP}{OC}=\frac{1}{3}$

e) Vẽ BD // AM ⇒ BD < 2AB ⇒ $AM<\frac{2AC.AB}{AC+AB}\Rightarrow\frac{1}{AM}>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}\right)$.

Tương tự: $\frac{1}{BN}>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{BC}\right)$, $\frac{1}{CP}>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{AC}+\frac{1}{BC}\right)$ ⇒ đpcm.

Bài 9. Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của cạnh BC. Đường phân giác của góc AIB cắt cạnh AB ở M. Đường phân giác của góc AIC cắt cạnh AC ở N.

a) Chứng minh rằng MM // BC.

b) Tam giác ABC phải thoả điều kiện gì để có MN = AI?

c) Tam giác ABC phải thoả điều kiện gì để có MN ⊥ AI?

HD: a) Chứng minh $\frac{AM}{BM}=\frac{AN}{CN}$.

Bài 10. Cho hình thang cân ABCD, đáy lớn DC, góc $D=60^0$. Đường phân giác của góc D cắt đường chéo AC tại I, chia AC thành hai đoạn theo tỉ số $\frac{4}{11}$ và cắt đáy AB tại M. Tính các cạnh đáy AB, DC, biết MA – MB = 6cm.

HD: Chứng minh DC = AB + AD ⇒ DC = AB + AM ⇒ $\frac{MB}{MA}=\frac{3}{4}$ ⇒ DC = 66cm, AB = 42cm.

Bài 11. Cho hình bình hành ABCD. Một đường thẳng cắt AB ở E, AD ở F và cắt đường chéo AC ở G. Chứng minh hệ thức: $\frac{AB}{AE}+\frac{AD}{AF}=\frac{AC}{AG}$.

HD: Vẽ DM // EF, BN // EF. Áp dụng định lí Ta-lét vào các tam giác ADM, ABN.

Bài 12. Cho hình bình hành ABCD. Trên cạnh AB lấy một điểm M và trên cạnh CD lấy một điểm N sao cho DN = BM. Chứng minh rằng ba đường thẳng MN, DB, AC đồng qui.

HD:

Bài 13.

a)

HD:

II. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

1. Khái niệm hai tam giác đồng dạng

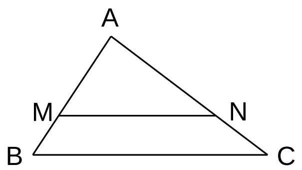
a) Định nghĩa: *Tam giác $A'B'C'$ gọi là đồng dạng với tam giác ABC nếu:*

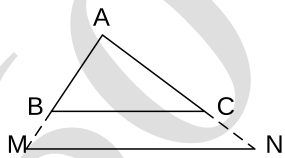
$$A' = A,\ B' = B,\ C' = C;\ \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$$

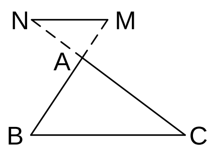
Chú ý: *Khi viết kí hiệu hai tam giác đồng dạng, ta phải viết theo đúng thứ tự các cặp đỉnh tương ứng:* $\Delta A'B'C' \# \ \Delta ABC$.

b) Định lí: *Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với hai cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho.*

Chú ý: *Định lí trên cũng đúng trong trường hợp đường thẳng a cắt phần kéo dài hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại.*







2. Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác

Trường hợp 1: *Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.*

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} \Rightarrow \Delta A'B'C' \# \Delta ABC$$

Trường hợp 2: *Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.*

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC},\ A' = A \Rightarrow \Delta A'B'C' \# \Delta ABC$$

Trường hợp 3: *Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.*

$$A' = A,\ B' = B \Rightarrow \Delta A'B'C' \# \Delta ABC$$

3. Các trường hợp đồng dạng của tam giác vuông

Trường hợp 1: *Nếu tam giác vuông này có **một góc nhọn** bằng **góc nhọn** của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng với nhau.*

Trường hợp 2: *Nếu tam giác vuông này có **hai cạnh góc vuông** tỉ lệ với **hai cạnh góc vuông** của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng với nhau.*

Trường hợp 3: *Nếu **cạnh huyền và một cạnh góc vuông** của tam giác vuông này tỉ lệ với **cạnh huyền và cạnh góc vuông** của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng với nhau.*

4. Tính chất của hai tam giác đồng dạng

Nếu hai tam giác đồng dạng với nhau thì:

- *Tỉ số hai đường cao tương ứng bằng tỉ số đồng dạng.*
- *Tỉ số hai đường phân giác tương ứng bằng tỉ số đồng dạng.*
- *Tỉ số hai đường trung tuyến tương ứng bằng tỉ số đồng dạng.*

- *Tỉ số các chu vi bằng tỉ số đồng dạng.*
- *Tỉ số các diện tích bằng bình phương tỉ số đồng dạng.*

VẤN ĐỀ I. Sử dụng tam giác đồng dạng để tính toán

Bài 1. Cho tam giác A′B′C′ đòng dạng với tam giác ABC theo tỉ số *k*.

a) Tính tỉ số chu vi của hai tam giác.

b) Cho $k = \frac{3}{5}$ và hiệu chu vi của hai tam giác là 40*dm*. Tính chu vi của mỗi tam giác.

HD: a) $\frac{P'}{P} = k$ *b)* $P' = 60(dm), P = 100(dm)$.

Bài 2. Cho tam giác A′B′C′ đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số $k = \frac{4}{3}$. Tính chu vi của tam giác ABC, biết chu vi của tam giác A′B′C′ bằng 27*cm*.

HD: $P = 20,25(cm)$.

Bài 3. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là AB = 3*cm*, AC = 5*cm*, BC = 7*cm*. Tam giác A′B′C′ đồng dạng với tam giác ABC và có chu vi bằng 75*cm*. Tính độ dài các cạnh của ΔA′B′C′.

HD: $A'B' = 15cm,\ B'C' = 25cm,\ A'C' = 35cm$.

Bài 4. Cho tam giác ABC và các đường cao BH, CK.

a) Chứng minh ΔABH # ΔACK. b) Cho $ACB = 40^0$. Tính AKH.

HD: b) $AKH = ACB = 40^0$.

Bài 5. Cho hình vuông ABCD. Trên hai cạnh AB, BC lấy hai điểm P và Q sao cho BP = BQ. Gọi H là hình chiếu của B trên đường thẳng CP.

a) Chứng minh ΔBHP # ΔCHB. b) Chứng minh: $\frac{BH}{BQ} = \frac{CH}{CD}$.

c) Chứng minh ΔCHD # ΔBHQ. Từ đó suy ra $DHQ = 90^0$.

HD: c) Chứng minh $DHQ = CHD + CHQ = BHQ + CHQ = BHC = 90^0$.

Bài 6. Hai tam giác ABC và DEF có $A = D$, $B = E$, AB = 8*cm*, BC = 10*cm*, DE = 6*cm*.

a) Tính độ dài các cạnh AC, DF, EF, biết rằng cạnh AC dài hơn cạnh DF là 3*cm*.

b) Cho diện tích tam giác ABC bằng $39,69cm^2$. Tính diện tích tam giác DEF.

HD: a) ΔABC # ΔDEF ⇒ EF = 7,5cm, DF = 9cm, AC = 12cm *b)* $S_{DEF} = 22,33(cm^2)$.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, BH = 4*cm*, CH = 9*cm*. Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC.

a) Chứng minh ΔAKI # ΔABC. b) Tính diện tích tam giác ABC.

c) Tính diện tích của tứ giác AKHI.

HD: b) $S_{ABC} = 39cm^2$ *c)* $S_{AKHI} = \frac{216}{13}cm^2$.

Bài 8. Cho tam giác ABC, có $A = 90^0 + B$, đường cao CH. Chứng minh:

a) $CBA = ACH$ b) $CH^2 = BH.AH$

Bài 9. Cho tam giác ABC, hai trung tuyến BM và CN cắt nhau tại G. Tính diệnt ích tam giác GMN, biết diện tích tam giác ABC bằng S.

HD: $S_{GMN} = \frac{S}{12}$.

Bài 10. Cho hình vuông ABCD, cạnh *a*. Gọi E là điểm đối xứng với C qua D, EB cắt AD tại I. Trên EB lấy điểm M sao cho DM = DA.

a) Chứng minh ΔEMC # ΔECB. b) Chứng minh EB.MC = $2a^2$.

c) Tính diện tích tam giác EMC theo *a*.

HD: c) $S_{EMC} = \frac{4}{5}a^2$.

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên cạnh AB, lấy điểm M sao cho $2AM = 3MB$. Một đường thẳng qua M, song song với BC, cắt AC tại N. Một đường thẳng qua N, song song với AB, cắt BC tại D.

a) Chứng minh ΔAMN # Δ NDC.

b) Cho AN = 8*cm*, BM = 4*cm*. Tính diện tích các tam giác AMN, ABC và NDC.

HD: b) $S_{AMN} = 24cm^2$, $S_{ABC} = \frac{200}{3}cm^2$, $S_{NDC} = \frac{32}{3}cm^2$.

VẤN ĐỀ II. Chứng minh hai tam giác đồng dạng

Bài 1. Cho tam giác ABC. Gọi A′, B′, C′ lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA.

a) Chứng minh ΔA′B′C′ # ΔCAB.

b) Tính chu vi của ΔA′B′C′, biết chu vi của ΔABC bằng 54*cm*.

HD: b) $P' = 27(cm)$.

Bài 2. Cho tam giác ABC, G là trọng tâm của tam giác. Gọi E, F, H lần lượt là trung điểm của AG, BG, CG. Chứng minh các tam giác EFH và ABC đồng dạng với nhau và G là trọng tâm của tam giác EFH.

HD: Sử dụng tính chất đường trung bình và trọng tâm tam giác.

Bài 3. Cho tam giác ABC. Trên các cạnh BC, CA, AB lấy lần lượt các điểm M, N, P sao cho AM, BN, CP đồng qui tại O. Qua A và C vẽ các đường thẳng song song với BO cắt CO, OA lần lượt ở E và F.

a) Chứng minh: ΔFCM # ΔOMB và ΔPAE # ΔPBO.

b) Chứng minh: $\frac{MB}{MC}.\frac{NC}{NA}.\frac{PA}{PB} = 1$.

HD: b) Sử dụng định lí Ta-lét và tam giác đồng dạng.

Bài 4. Cho tam giác ABC có AB = 15*cm*, AC = 20*cm*. Trên hai cạnh AB, AC lần lượt lấy 2 điểm D, E sao cho AD = 8*cm*, AE = 6*cm*.

a) Chứng minh ΔAED # ΔABC.

b) Tính chu vi của tam giác ADE, khi biết BC = 25*cm*.

c) Tính góc ADE, biết $C = 20^0$.

HD: b) $P_{ADE} = 24(cm)$ *c)* $ADE = 20^0$.

Bài 5. Cho góc $xOy\,(xOy \neq 180^0)$. Trên cạnh O*x*, lấy 2 điểm A, B sao cho OA = 5*cm*, OB = 16*cm*. Trên cạnh O*y*, lấy 2 điểm C, D sao cho OC = 8*cm*, OD = 10*cm*.

a) Chứng minh: ΔOCB # ΔOAD.

b) Gọi I là giao điểm của AD và BC. Chứng minh $BAI = DCI$.

HD:

Bài 6. Cho tam giác ABC có các cạnh AB = 24*cm*, AC = 28*cm*. Đường phân giác góc A cắt cạnh BC tại D. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của các điểm B, C trên đường thẳng AD.

a) Tính tỉ số $\dfrac{BM}{CN}$ b) Chứng minh $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{DM}{DN}$.

HD: a) Chứng minh ΔBDM # ΔCDN $\Rightarrow \dfrac{BM}{CN} = \dfrac{6}{7}$ *b) Chứng minh ΔABM # ΔCAN.*

Bài 7. Cho hình bình hành ABCD. Vẽ CE ⊥ AB và CF ⊥ AD, BH ⊥ AC.

a) Chứng minh ΔABH # ΔACE. b) Chứng minh: $AB.AE + AD.AF = AC^2$.

HD: b) Chứng minh: AB.AE = AC.AH, AD.AF = AC.CH ⇒ đpcm.

Bài 8. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

a) Chứng minh OA.OD = OB.OC.

b) Đường thẳng qua O, vuông góc với AB, CD theo thứ tự tại H, K. Chứng minh $\dfrac{OH}{OK} = \dfrac{AB}{CD}$.

HD: a) Chứng minh ΔOAB # ΔOCD.

Bài 9. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi O là giao điểm của ba đường cao AH, BK, CI.

a) Chứng minh OK.OB = OI.OC b) Chứng minh ΔOKI # ΔOCB

c) Chứng minh ΔBOH # ΔBCK d) Chứng minh $BO.BK + CO.CI = BC^2$.

HD:

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông ở A, AB = 5,4*cm*, AC = 7,2*cm*.

a) Tính BC.

b) Từ trung điểm M của BC, vẽ đường thẳng vuông góc với BC, cắt đường thẳng AC tại H và cắt đường thẳng AB tại E. Chứng minh ΔEMB # ΔCAB.

c) Tính EB và EM.

d) Chứng minh BH vuông góc với EC.

e) Chứng minh HA.HC = HM.HE.

HD: a) $BC = 9(cm)$ *c)* $EM = 6(cm), EB = 7,5(cm)$

Bài 11. Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH.

a) Hãy nêu từng cặp các tam giác đồng dạng.

b) Cho AB = 12,45*cm*, AC = 20,50*cm*. Tính độ dài các đoạn thẳng BC, AH, BH, CH.

HD: b) BC = 23,98cm, AH = 10,64cm, HB = 6,45cm, HC = 17,53cm.

Bài 12. Cho tam giác ABC và đường cao AH, AB = 5*cm*, BH = 3*cm*, $AC = \dfrac{20}{3}cm$.

a) Tính độ dài AH b) Chứng minh ΔABH # ΔCAH. Từ đó tính BAC.

HD: a) AH = 4cm *b)* $BAC = 90^0$.

Bài 13. Cho tứ giác ABCD, có $DBC = 90^0$, $AD = \sqrt{20}cm$, $AB = 4cm$, $DB = 6cm$, $DC = 9cm$.

a) Tính góc BAD b) Chứng minh ΔBAD # ΔDBC c) Chứng minh DC // AB.

HD: a) $BAD = 90^0$

Bài 14.

a)

HD:

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG III

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = 15*cm*, AC = 20*cm*. Tia phân giác của góc A, cắt cạnh BC tại D.

a) Tính $\frac{DB}{DC}$.

b) Đường thẳng qua D, song song với AB, cắt AC tại E. Chứng minh ∆EDC # ∆ABC.

c) Tính DE và diện tích của tam giác EDC.

HD: a) $\frac{DB}{DC} = \frac{3}{4}$ *c)* $DE = \frac{60}{7}(cm)$, $S_{EDC} = \frac{2400}{49}(cm^2)$.

Bài 2. Cho tam giác cân ABC, AB = AC = *b*, BC = *a*. Vẽ các đường cao BH, CK.

a) Chứng minh BK = CH b) Chứng minh KH // BC c) Tính độ dài HC và HK.

HD: c) $HC = \frac{a^2}{2b}$, $KH = a - \frac{a^3}{2b^2}$.

Bài 3. Cho tam giác cân ABC (AB = AC), I là trung điểm của BC. Trên các cạnh AB, AC lấy lần lượt các điểm K, H sao cho $BK.CH = BI^2$. Chứng minh:

a) ∆KBI # ∆ICH b) ∆KIH # ∆KBI

c) KI là phân giác của góc BKH d) $IH.KB + HC.IK > HK.BI$.

HD: d) Chứng minh $IH.KB + HC.IK = BI(KI + IH) > HK.BI$.

Bài 4. Cho tam giác ABC (AB < AC). Vẽ đường cao AH, đường phân giác trong AD, đường trung tuyến AM.

a) Chứng minh $HD + DM = HM$.

b) Vẽ các đường cao BF, CE. So sánh hai đoạn thẳng BF và CE.

c) Chứng minh ∆AFE # ∆ABC.

d) Gọi O là trực tâm của ∆ABC. Chứng minh $BO.BF + CO.CE = BC^2$.

HD: a) $AB < AC \Rightarrow DC > MC$, $CAH > \frac{A}{2} \Rightarrow$ *D nằm giữa H và M* $\Rightarrow$ *đpcm.*

b) $BF < CE$ *d)* $BO.BF = BC.BH$, $CO.CE = BC.CH$

Bài 5. cho tam giác ABC. Trên các cạnh AB, AC lấy lần lượt các điểm D, E sao cho $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. Đường trung tuyến AI (I ∈ BC) cắt đoạn thẳng DE tại H. Chứng minh DH = HE.

HD: $\frac{DH}{BI} = \frac{HE}{IC} \Rightarrow$ *đpcm.*

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, $C = 30^0$ và đường phân giác BD (D $\in$ AC).

a) Tính tỉ số $\frac{DA}{CD}$ b) Cho AB = 12,5*cm*. Tính chu vi và diện tích tam giác ABC.

HD: a) $\frac{DA}{DC} = \frac{1}{2}$ *b) BC = 25cm, AC = 21,65cm.*

Bài 7. Cho tam giác đều ABC cạnh *a*, M là trung điểm của BC. Trên cạnh AB lấy điểm D, trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $DME = 60^0$.

a) Chứng minh $BD.CE = \frac{a^2}{4}$.

b) Chứng minh ΔMBD # ΔEMD và ΔECM # ΔEMD.

c) Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng DE.

HD: c) Vẽ MH $\perp$ DE, MK $\perp$ EC $\Rightarrow$ MH = MK; $MK = \sqrt{MC^2 - CK^2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Bài 8. Cho tam giác ABC cân tại A, $A = 20^0$, AB = AC = *b*, BC = *a*. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $DBC = 20^0$.

a) Chứng minh ΔBDC # ΔABC.

b) Vẽ AE vuông góc với BD tại E. Tính độ dài các đoạn thẳng AD, DE, AE.

c) Chứng minh $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

HD: b) $AE = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, $DE = \frac{b}{2} - a$, $AD = b - \frac{a^2}{b}$ *c)* $AD^2 = DE^2 + AE^2$ *$\Rightarrow$ đpcm.*

Bài 9. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM, K là điểm trên AM sao cho AM = 3AK, BK cắt AC tại N, P là trung điểm của NC.

a) Tính tỉ số diện tích của các tam giác ANK và AMP.

b) Cho biết diện tích ΔABC bằng S. tính diện tích tam giác ANK.

c) Một đường thẳng qua K cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại I và J. Chứng minh $\frac{AB}{AI} + \frac{AC}{AJ} = 6$.

HD: a) $\frac{S_{ANK}}{S_{AMP}} = \frac{1}{9}$ *b)* $S_{AMP} = \frac{3}{5}S_{AMC}; S_{AMC} = \frac{1}{2}S_{ABC} \Rightarrow S_{ANK} = \frac{S}{30}$.

c) Vẽ BE // IJ, CH // IJ (E, H $\in$ AM) $\Rightarrow$ ΔEBM = ΔHCM $\Rightarrow$ EM = MH;

$\frac{AB}{AI} = \frac{AE}{AK}, \frac{AC}{AJ} = \frac{AH}{AK}$ *$\Rightarrow$ đpcm.*

Bài 10. Cho tam giác ABC. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, AC. O là giao điểm các đường trung trực, H là trực tâm, G là trọng tâm của tam giác ABC.

a) Chứng minh ΔOMN # ΔHAB.

b) So sánh độ dài AH và OM.

c) Chứng minh ΔHAG # ΔOMG.

d) Chứng minh ba điểm H, G, O thẳng hàng và GH = 2GO.

HD: b) AH = 2OM d) $HGO = HGM + MGO = HGM + AGH = MGA = 180^0$ *$\Rightarrow$ đpcm.*

Bài 11. Cho tam giác ABC, các đường cao AK và BD cắt nhau tại G. Vẽ các đường trung trực HE, HF của AC và BC. Chứng minh:

a) BG = 2HE b) AG = 2HF.

HD: ΔABG # ΔFEH $\Rightarrow$ đpcm.

Bài 12. Cho hình thang vuông ABCD (AB // DC, $A = D = 90^0$). Đường chéo BD vuông góc với cạnh bên BC. Chứng minh $BD^2 = AB.DC$.

HD: Chứng minh ΔABD # ΔBCD.

Bài 13. Cho tam giác cân ABC (AB = AC), O là trung điểm của cạnh đáy BC. Một điểm D di động trên cạnh AB. Trên cạnh AC lấy một điểm E sao cho $CE = \dfrac{OB^2}{BD}$. Chứng minh:

a) Hai tam giác DBO, OCE đồng dạng.
b) Tam giác DOE cũng đồng dạng với hai tam giác trên.
c) DO là phân giác của góc $\widehat{BDE}$, EO là phân giác của góc $\widehat{CED}$.
d) Khoảng cách từ điểm O đến đoạn ED không đổi khi D di động trên AB.
HD: d) Vẽ $OI \perp DE$, $OH \perp AC \Rightarrow OI = OH$.

Bài 14. Cho tam giác ABC, trong đó $\widehat{B}, \widehat{C}$ là các góc nhọn. Các đường cao AA′, BB′, CC′ cắt nhau tại H.
a) Chứng minh: A′A.A′H = A′B.A′C.
b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Giả sử đường thẳng GH song song với cạnh đáy BC. Chứng minh: $A'A^2 = 3A'B.A'C$.

HD: a) Chứng minh $\Delta BA'H \sim \Delta BB'C$, $\Delta CAA' \sim \Delta CB'B$ b) $GH \,//\, BC \Rightarrow A'H = \dfrac{A'A}{3}$.

Bài 15. Cho hình thang KLMN (KN // LM). gọi E là giao điểm của hai đường chéo. Qua E, vẽ một đường thẳng song song với LM, cắt MN tại F. Chứng minh: $\dfrac{1}{EF} = \dfrac{1}{KN} + \dfrac{1}{LM}$.

HD: Tính các tỉ số $\dfrac{EF}{LM}, \dfrac{EF}{KN}$.

Bài 16. Qua một điểm O tuỳ ý ở trong tam giác ABC, vẽ đường thẳng song song với AB, cắt AC và BC lần lượt tại D và E; đường thẳng song song với AC, cắt AB và BC lần lượt ở F và K; đường thẳng song song với BC, cắt AB và AC lần lượt ở M và N. Chứng minh:

$$\frac{AF}{AB} + \frac{BE}{BC} + \frac{CN}{CA} = 1.$$

HD: Chứng minh $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{KC}{BC}, \dfrac{CN}{CA} = \dfrac{KE}{BC} \Rightarrow$ đpcm.

Bài 17. Qua một điểm O tuỳ ý ở trong tam giác ABC, vẽ các đường thẳng AO, BO, CO cắt BC, CA, AB lần lượt tại A′, B′, C′. Chứng minh: $\dfrac{OA'}{AA'} + \dfrac{OB'}{BB'} + \dfrac{OC'}{CC'} = 1$.

HD: Vẽ $AH \perp BC$, $OI \perp BC \Rightarrow \dfrac{OA'}{AA'} = \dfrac{OI}{AH}$; $\dfrac{S_{BOC}}{S_{ABC}} = \dfrac{OI}{AH} \Rightarrow \dfrac{S_{BOC}}{S_{ABC}} = \dfrac{OA'}{AA'}$.

Tương tự: $\dfrac{S_{COA}}{S_{ABC}} = \dfrac{OB'}{BB'}, \dfrac{S_{AOB}}{S_{ABC}} = \dfrac{OC'}{CC'} \Rightarrow$ đpcm.

Bài 18. Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC, lấy lần lượt các điểm P, Q, R. Chứng minh rằng nếu các đường thẳng AP, BQ, CR đồng qui tại O thì $\dfrac{PB}{PC}.\dfrac{QC}{QA}.\dfrac{RA}{RB} = 1$ (*định lí Ceva*).

HD: Qua C và A vẽ các đường thẳng song song với BQ, cắt đường thẳng AP tại E và cắt đường thẳng CR tại D. Chứng minh $\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{OB}{EC}, \dfrac{RA}{RB} = \dfrac{AD}{OB}, \dfrac{QC}{QA} = \dfrac{EC}{AD} \Rightarrow$ đpcm.

Bài 19. Trên các đường thẳng qua các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC, lấy lần lượt các điểm P, Q, R (không trùng với đỉnh nào của tam giác). Chứng minh rằng nếu ba điểm P, Q, R thẳng hàng thì $\dfrac{PB}{PC}.\dfrac{QC}{QA}.\dfrac{RA}{RB} = 1$ (*định lí Menelaus*).

HD: Gọi các khoảng cách từ A, B, C đến đường thẳng PQR là m, n, p.

Ta có: $\dfrac{PB}{PC}=\dfrac{n}{p}, \dfrac{QC}{QA}=\dfrac{p}{m}, \dfrac{RA}{RB}=\dfrac{m}{n} \Rightarrow đpcm.$

Bài 20.

a)

HD: