CHƯƠNG II: ĐA GIÁC

1. Định nghĩa

• ***Đa giác lồi*** *là đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của đa giác đó.*

• ***Đa giác đều*** *là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.*

2. Một số kết quả

• *Tổng các góc của đa giác n cạnh bằng* $(n-2).180^0$.

• *Mỗi góc của đa giác đều n cạnh bằng* $\dfrac{(n-2).180^0}{n}$.

• *Số các đường chéo của đa giác n cạnh bằng* $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

3. Diện tích

• ***Diện tích tam giác*** *bằng nửa tích một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó:* $S = \dfrac{1}{2}a.h$.

• ***Diện tích tam giác vuông*** *bằng nửa tích hai cạnh góc vuông:* $S = \dfrac{1}{2}ab$.

• ***Diện tích hình chữ nhật*** *bằng tích hai kích thước của nó:* $S = ab$.

• ***Diện tích hình vuông*** *bằng bình phương cạnh của nó:* $S = a^2$.

• ***Diện tích hình thang*** *bằng nửa tích của tổng hai đáy với chiều cao:* $S = \dfrac{1}{2}(a+b)h$.

• ***Diện tích hình bình hành*** *bằng tích của một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó:* $S = ah$.

• ***Diện tích hình thoi*** *bằng nửa tích hai đường chéo:* $S = \dfrac{1}{2}d_1d_2$.

Bài 1. Cho hình thoi ABCD có $A = 60^0$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh đa giác EBFGDH là lục giác đều.

Bài 2. Cho tam giác ABC, O là trọng tâm của tam giác. Gọi E, F, G lần lượt là các điểm đối xứng với điểm O qua trung điểm của AB, BC, AC. Chứng minh lục giác AEBFCG là lục giác đều.

Bài 3. Cho ngũ giác ABCDE có các cạnh bằng nhau và $A = B = C$.

a) Chứng minh tứ giác ABCD là hình thang cân.

b) Chứng minh ngũ giác ABCDEF là ngũ giác đều.

Bài 4. Cho ngũ giác đều ABCDE. Gọi K là giao điểm của hai đường chéo AC và BE.

a) Tính số đo mỗi góc của ngũ giác.

b) Chứng minh CKED là hình thoi.

Bài 5. Cho hình chữ nhật ABCD. E là điểm bất kì nằm trên đường chéo AC. Đường thẳng qua E, song song với AD cắt AB, DC lần lượt tại F, G. Đường thẳng qua E, song song với AB cắt AD, BC lần lượt tại H, K. Chứng minh hai hình chữ nhật EFBK và EGDH có cùng diện tích.

Bài 6. Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC. Vẽ BP ⊥ MN, CQ ⊥ MN (P, Q ∈ MN).

a) Chứng minh tứ giác BPQC là hình chữ nhật.

b) Chứng minh $S_{BPQC} = S_{ABC}$.

Bài 7. Cho hình vuông ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Chứng minh các tứ giác ADCM và ABCN có diện tích bằng nhau.

Bài 8. Cho hình thang vuông ABCD ($A = D = 90^0$), AB = 3cm, AD = 4cm và $ABC = 135^0$. Tính diện tích của hình thang đó.

ĐS: $S_{ABCD} = 20cm^2$.

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông tại A. Về phía ngoài tam giác, vẽ các hình vuông ABDE, ACFG, BCHI. Chứng minh $S_{BCHI} = S_{ABDE} + S_{ACFG}$.

Bài 10. Diện tích hình bình hành bằng $24cm^2$. Khoảng cách từ giao điểm của hai đường chéo đến các đường thẳng chứa các cạnh hình bình hành bằng $2cm$ và $3cm$. Tính chu vi của hình bình hành.

ĐS: $P_{ABCD} = 20cm$.

Bài 11. Cho hình bình hành ABCD. Gọi K, O, E, N là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Các đoạn thẳng AO, BE, CN và DK cắt nhau tại L, M, R, P. Chứng minh $S_{ABCD} = 5.S_{MLPR}$.

Bài 12. Cho tam giác ABC. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BA, BC. Lấy điểm M trên đoạn thẳng EF (M ≠ E, M ≠ F). Chứng minh $S_{AMB} + S_{BMC} = S_{MAC}$.

Bài 13. Cho tam giác ABC cân tại A, điểm M thuộc đáy BC. Gọi BD là đường cao của tam giác ABC; H và K chân đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC. Chứng minh: $MH + MK = BD$.

Bài 14. Cho hình bình hành ABCD. Gọi K và L là hai điểm thuộc cạnh BC sao cho BK = KL = LC. Tính tỉ số diện tích của:

a) Các tam giác DAC và DCK.

b) Tam giác DAC và tứ giác ADLB.

c) Các tứ giác ABKD và ABLD.

ĐS: a) $\frac{S_{DAC}}{S_{DCK}} = \frac{3}{2}$ *b)* $\frac{S_{DAC}}{S_{ADLB}} = \frac{3}{5}$ *c)* $\frac{S_{ABKD}}{S_{ABLD}} = \frac{4}{5}$.

Bài 15. Cho tam giác ABC, hai đường trung tuyến AM, BN cắt nhau tại G. Diện tích tam giác AGB bằng $336cm^2$. Tính diện tích tam giác ABC.

ĐS: $S_{ABC} = 1008cm^2$.

Bài 16. Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho BD = 3DA, trên cạnh BC lấy điểm E sao cho BE = 4EC. Gọi F là giao điểm của AE và CD.

a) Chứng minh: FD = FC.

b) Chứng minh: $S_{ABC} = 2S_{AFB}$.

Bài 17. Cho tam giác đều ABC, đường cao AH và điểm M thuộc miền trong của tam giác. Gọi P, Q, R lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ M đến BC, AC, AB.
Chứng minh: MP + MQ + MR = AH.

Bài 18. Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, AB. Từ N kẻ đường thẳng song song với BM cắt đwòng thẳng BC tại D. Biết diện tích tam giác ABC bằng $a(cm^2)$.

a) Tính diện tích hình thang CMND theo *a*.

b) Cho $a = 128cm^2$ và $BC = 32cm$. Tính chiều cao của hình thang CMND.

ĐS: a) $S_{CMND} = a(cm^2)$ *b)* $h = 4(cm)$.

Bài 19.* Cho tứ giác ABCD. Kéo dài AB một đoạn BM = AB, kéo dài BC một đoạn CN = BC, kéo dài CD một đoạn DP = CD và kéo dài DA một đoạn AQ = DA. Chứng minh $S_{MNPQ} = 5.S_{ABCD}$

HD: Từ $S_{PDQ} = 2S_{DAC}$, $S_{MNB} = 2S_{ABC}$, $S_{QAM} = 2S_{DAB}$, $S_{PNC} = 2S_{DBC}$ $\Rightarrow$ *đpcm.*

Bài 20. * Cho tam giác ABC với BC = *a*, CA = *b*, AB = *c* và ba đường cao ứng với ba cạnh lần lượt có độ dài h_a, h_b, h_c. Gọi *r* là khoảng cách từ giao điểm của ba đường phân giác của tam giác đến một cạnh của tam giác. Chứng minh $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$.

Bài 21. * Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác sao cho các đường thẳng AM, BN, CP đồng qui tại điểm O. Chứng minh

Chứng minh: $\frac{AP}{PB}.\frac{BM}{MC}.\frac{CN}{NA}=1$.

HD: Từ $\frac{S_{ACP}}{S_{BCP}}=\frac{S_{AOP}}{S_{BOP}}=\frac{AP}{PB}\Rightarrow\frac{S_{AOC}}{S_{BOC}}=\frac{AP}{PB}$ *(1). Tương tự* $\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}=\frac{BM}{MC}$ *(2),* $\frac{S_{BOC}}{S_{AOB}}=\frac{CN}{NA}$ *(3)*

Nhân (1), (2), (3), vế theo vế, ta được đpcm.

Bài 22. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, P, N, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, AD; O là giao điểm của MN và PQ. Chứng minh:

a) $S_{AOQ}+S_{BOP}=S_{MPQ}$.

b) $S_{AOD}+S_{BOC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

HD: Vẽ AA′, BB′, MM′ vuông góc với PQ.

Bài 23. Cho tứ giác ABCD. Qua điểm B vẽ đường thẳng song song với đường chéo AC. Đường thẳng đó cắt cạnh DC ở E. Chứng minh: $S_{ADE}=S_{ABCD}$.

HD: Chú ý: $S_{BAC}=S_{EAC}$.

Bài 24. Cho tứ giác ABCD có AC = 10cm, BD = 12cm. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Biết $AOB=30^0$. Tính diện tích tứ giác ABCD.

ĐS: $S_{ABCD}=30cm^2$.

Bài 25. Cho hình thang cân ABCD (AB // CD). Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

a) Tứ giác IJKL là hình gì?

b) Cho biết diện tích hình thang ABCD bằng $20cm^2$. Tính diện tích tứ giác IJKL.

ĐS: a) IJKL là hình thoi *b)* $S_{IJKL}=10cm^2$.

Bài 26. Cho hình bình hành ABCD. Vẽ phân giác AM của góc A (M ∈ CD), phân giác CN của góc C (N ∈ AB). Các phân giác AM, CN lần lượt cắt BD tại E và F. Chứng minh diện tích hai tứ giác AEFN và CFEM bằng nhau.

HD: AEFN và CFEM là hai hình thang có các cạnh đáy tương ứng bằng nhau và cùng chiều cao nên có diện tích bằng nhau.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG II

Bài 1. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 12 cm, AD = 6,8 cm. Gọi H, I, E, K là các trung điểm tương ứng của BC, HC, DC, EC.

a) Tính diện tích tam giác DBE.

b) Tính diện tích tứ giác EHIK.

ĐS: a) $S_{DBE} = 20,4\,cm^2$ *b)* $S_{EHIK} = 8,55\,cm^2$.

Bài 2. Cho hình vuông ABCD có tâm đối xứng O, cạnh *a*. Một góc vuông xOy có tia Ox cắt cạnh AB tại E, tia Oy cắt cạnh BC tại F. Tính diện tích tứ giác OEBF

ĐS: $S_{OEBF} = S_{AOB} = \frac{a^2}{4}$.

Bài 3. Tính diện tích một hình thang vuông, biết hai đáy có độ dài 6 cm và 9 cm, góc tạo bởi cạnh bên và đáy lớn có số đo bằng 45^0.

ĐS: $S_{ABCD} = 22,5\,cm^2$.

Bài 4. Cho hình thang ABCD có độ dài hai đáy AB = 5cm, CD = 15cm, độ dài hai đường chéo AC = 16cm, BD = 12cm. Từ A vẽ đường thẳng song song với BD, cắt CD tại E.

a) Chứng minh tam giác ACE là tam giác vuông.

b) Tính diện tích hình thang ABCD.

ĐS: b) $S_{ABCD} = 96\,cm^2$.

Bài 5. Gọi O là điểm nằm trong hình bình hành ABCD. Chứng minh: $S_{ABO} + S_{CDO} = S_{BCO} + S_{DAO}$

HD: $S_{ABO} + S_{CDO} = S_{BCO} + S_{DAO} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Bài 6. Cho hình chữ nhật ABCD, O là điểm nằm trong hình chữ nhật, $AB = a,\ AD = b$. Tính tổng diện tích các tam giác OAB và OCD theo *a* và *b*.

HD: $S_{OAB} + S_{ODC} = \frac{1}{2}AB.AD = \frac{1}{2}ab$.

Bài 7. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Trên cạnh AC, lấy điểm B sao cho AN = 2NC. Gọi I là giao điểm của BN và CM. Chứng minh:

a) $S_{BIC} = S_{AIC}$. b) $BI = 3IN$.

Bài 8. Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BC. Chứng minh $S_{ABNM} = \frac{3}{4}S_{ABC}$.

HD: Từ $S_{ABM} = \frac{1}{2}S_{ABC}$, $S_{BMN} = \frac{1}{4}S_{ABC} \Rightarrow$ *đpcm.*

Bài 9. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi E, F là hai điểm lần lượt trên hai cạnh AB và DC sao cho AE = CF; I là điểm trên cạnh AD; IB và IC lần lượt cắt EF tại M và N.

Chứng minh: $S_{IMN} = S_{MEB} + S_{NFC}$.

HD: Từ $S_{BEFC} = S_{IBC} = S_{DBC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \Rightarrow$ *đpcm.*

Bài 10. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng ta luôn vẽ được một tam giác mà diện tích của nó bằng diện tích tứ giác ABCD.

HD: Qua B, vẽ đường thẳng song song với AC, cắt DC tại E. Suy ra được $S_{ADE} = S_{ABCD}$.

Bài 11. Cho tam giác ABC và điểm D trên cạnh BC. Hãy chia tam giác ABC thành hai phần có diện tích bằng nhau bởi một đường thẳng đi qua D.

HD: Xét hai trường hợp:

– Nếu D là trung điểm của BC thì AD là đường thẳng cần tìm.

– Nếu D không là trung điểm của BC. Gọi I là trung điểm BC, vẽ IH // AD (H $\in$ *AB).*

Từ $S_{ADH} = S_{ADI} \Rightarrow$ *DH là đường thẳng cần tìm.*

Bài 12. Cho tam giác ABC có BC = *a*, đường cao AH = *h*. Từ điểm I trên đường cáo AH, vẽ đường thẳng song song với BC, cắt hai cạnh AB, AC lần lượt tại M và N. Vẽ MQ, NP vuông góc với BC. Đặt AI = *x*.

a) Tính diện tích tứ giác MNPQ theo *a, h, x*.

b) Xác định vị trí điểm I trên AH để diện tích tứ giác MNPQ lớn nhất.

ĐS: a) $S_{MNPQ} = \frac{ax(h-x)}{h}$ *b)* $\max S = \frac{ah}{4}$ *khi* $x = \frac{h}{2} \Rightarrow$ *I là trung điểm của AH.*

Bài 13. Cho tam giác ABC và ba đường trung tuyến AM, BN, CP. Chứng minh rằng sáu tam giác tạo thành trong tam giác ABC có diện tích bằng nhau.

Bài 14. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Một đường thẳng song song với hai đáy cắt AD ở E, MN ở I, BC ở F. Chứng minh IE = IF.

HD: Từ $S_{AMND} = S_{BMNC}, S_{EAM} = S_{FBM}, S_{EDN} = S_{FCN} \Rightarrow S_{EMN} = S_{FMN} \Rightarrow EK = FH$

$\Rightarrow \Delta EKI = \Delta FHI \Rightarrow EI = FI.$

Bài 15. Cho tứ giác ABCD. Qua trung điểm K của đường chéo BD, vẽ đường thẳng song song với đường chéo AC, cắt AD tại E. Chứng minh CE chia tứ giác thành hai phần có diện tích bằng nhau.

HD: Xét các trường hợp:

a) E thuộc đoạn AD b) AC qua trung điểm K của BD c) E nằm ngoài đoạn thẳng AD.

Bài 16. Cho tam giác ABC. Trên cạnh AC lấy các điểm M, N sao cho AM = MN = NC. Đường thẳng qua M, song song với AB, cắt đường thẳng qua N song song với BC tại O. Chứng minh OA, OB, OC chia tam giác ABC thành ba phần có diện tích bằng nhau.

Bài 17.* Cho ngũ giác ABCDE. Hãy vẽ một tam giác có diện tích bằng diện tích ngũ giác ABCDE.

HD: Vẽ BH // AC (H $\in$ *DC), EI // AD (I* $\in$ *DC)* $\Rightarrow S_{ABCDE} = S_{AIH}$.

Bài 18.

a)