Câu 31. Chọn B.

Ta có $y'=3x^2-6x+6=3(x-1)^2+3\ge 3\Rightarrow \min y'=3$ khi $x=x_0=1\Rightarrow y_0=y(1)=5$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến $y=3(x-1)+5=3x+2$.

Câu 32. Chọn A.

Ta có $y'=-3x^2+12x+3=-3(x+2)^2+15\le 15\Rightarrow \max y'=15$ khi $x=x_0=-2$. Lúc đó $y_0=y(-2)=25$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến $y=15(x+2)+25=15x+55$.

Câu 33. Chọn B.

[Phương pháp tự luận]

Ta có $y'=3x^2+1>0\Rightarrow \begin{cases} y'(x_1)=3x_1^2+1>0 \\ y'(x_2)=3x_2^2+1>0 \end{cases} \Rightarrow y'(x_1).y'(x_2)>0$

hay $y'(x_1).y'(x_2)\ne -1$. Suy ra 2 tiếp tuyến A và B không vuông góc.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Ta có $y'=3x^2+1>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và cắt trục hoành tại một điểm duy nhất $\rightarrow$ **A, D đúng**.

Với $x_0=1\Rightarrow y'(1)=4, y_0=3$. Vậy phương trình tiếp tuyến $y=4(x-1)+3=4x-1\rightarrow$ **C đúng**.

Câu 34. Chọn A.

Ta có $y'=3x^2+4x-1\Rightarrow y'(1)=6$. Khi đó phương trình tiếp tuyến tại $M(1;0)$ là $y=6(x-1)=6x-6$, nên $\begin{cases} a=6 \\ b=6 \end{cases} \Rightarrow ab=36$.

Câu 35. Chọn D.

Ta có $y'=3x^2-2x+2=3\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)+\frac{5}{3}=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{3}\ge\frac{5}{3}\Rightarrow \min y'=\frac{5}{3}$ khi $x=x_0=\frac{1}{3}$.

Câu 36. Chọn C.

Ta có $y'=\frac{-\sqrt{3}}{(x-1)^2}<0,\forall x\ne 1$. Tiếp tuyến tại điểm $M(x_0;y_0)\in(C)$ tạo với Ox góc 60^0

$$\Rightarrow y'(x_0)=\pm\tan 60^0=\pm\sqrt{3}\xrightarrow{y'<0} y'(x_0)=-\sqrt{3}\Rightarrow \frac{-\sqrt{3}}{(x_0-1)^2}=-\sqrt{3}\Leftrightarrow (x_0-1)^2=1$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 2\sqrt{3} \\ x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0 \end{array}\right.$. Các tiếp tuyến tương ứng có phương trình là $\left[\begin{array}{l} y = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3}x \end{array}\right.$

.

Câu 37. Chọn B.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m+1)$. Do $K \in (C_m)$ và có hoành độ bằng -1, suy ra $K(-1; -6m-3)$.

Khi đó tiếp tuyến tại K có phương trình

$$\Delta : y = y'(-1)(x+1) - 6m - 3 = (9m+6)x + 3m + 3.$$

Đường thẳng Δ song song với đường thẳng d

$$\Rightarrow 3x + y = 0 \Leftrightarrow y = -3x \Leftrightarrow \begin{cases} 9m+6 = -3 \\ 3m+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m \neq -1 \end{cases}.$$

Vậy không tồn tại m, ta chọn $\varnothing$.

Câu 38. Chọn A.

Ta có $y' = 4x^3 + mx$ và đường thẳng $x - 3y + 1 = 0$ viết thành $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.

Theo yêu cầu bài toán, phải có $y'(-1) = -3 \Leftrightarrow -4 - m = -3 \Leftrightarrow m = -1$.

Câu 39. Chọn C.

Ta có $y' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$. Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của d và (C).

Theo yêu cầu bài toán, ta có $y'(x_0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2x_0+1}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2x_0 + 1 = 9 \Leftrightarrow x_0 = 4$.

Câu 40. Chọn C.

Đường thẳng đi qua $M(1;3)$ có hệ số góc k có dạng $d : y = k(x-1) + 3$.

d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} 3x - 4x^3 = k(x-1) + 3 & (1) \\ 3 - 12x^2 = k & (2) \end{cases}$.

Thay (2) vào (1) ta được

$$3x - 4x^3 = (3 - 12x^2)(x-1) + 3 \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 3 \\ k = -24 \end{array}\right..$$

Vậy có 2 tiếp tuyến.

Câu 41. Chọn B.

Phương pháp tự luận

Ta có $y' = 3x^2 + 1 \Rightarrow y'(1) = 4$, suy ra tiếp tuyến tại $N(1;4)$ là $\Delta: y = 4x$.

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (C) là

$$x^3 + x + 2 = 4x \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \Rightarrow y = -8 \end{array}\right..$$

Phương pháp trắc nghiệm

$2x_N + x_M = -\dfrac{b}{a}$ (Với $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ là hàm số ban đầu)

$\Leftrightarrow 2 + x_M = 0 \Leftrightarrow x_M = -2 \Rightarrow M(-2;-8)$.

Câu 42. Chọn C.

Phương pháp tự luận

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-1;-2)$ có hệ số góc k có dạng $\Delta: y = k(x+1) - 2$.

Δ là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^3 - x^2 + x + 1 = k(x+1) - 2 & (1) \\ 3x^2 - 2x + 1 = k & (2) \end{cases}.$$

Thay (2) vào (1) ta được

$$x^3 - x^2 + x + 1 = (3x^2 - 2x + 1)(x+1) - 2 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \Rightarrow y = 2 \end{array}\right. \Rightarrow N(1;2).$$

Phương pháp trắc nghiệm

$2x_N + x_M = -\dfrac{b}{a}$ (Với $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ là hàm số ban đầu)

$\Leftrightarrow 2x_N + (-1) = 1 \Leftrightarrow x_N = 1 \Rightarrow N(1;2)$.

Câu 43. Chọn B.

Ta có $y' = 3x^2 + 6mx + m + 1$. Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần lập.

Khi đó $x_0 = -1 \Rightarrow \begin{cases} y'(-1) = 4 - 5m \\ y_0 = 2m - 1 \end{cases}$, suy ra phương trình tiếp tuyến là $\Delta: y = (4 - 5m)(x+1) + 2m - 1$.

Do $A(1;3)\in\Delta\Rightarrow 3=(4-5m)(1+1)+2m-1\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$.

Câu 44. Chọn D.

Ta có $y'=\frac{1+m}{(x+1)^2}$ khi đó $y'(0)=3\Leftrightarrow 1+m=3\Leftrightarrow m=2$.

Câu 45. Chọn B.

Ta có $y'=\frac{1}{(x+1)^2}>0,\forall x\neq -1$. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của (C) với tiếp tuyến cần lập. Tam giác *OAB* cân tại *O* nên *OA* = *OB*, suy ra

$$y'(x_0)=\pm 1\xrightarrow{y'>0}y'(x_0)=1\Leftrightarrow \frac{1}{(x_0+1)^2}=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=-2\end{array}\right..$$

- Với $x_0=0\Rightarrow y_0=0$ (loại, do $M(0;0)\equiv O$).
- Với $x_0=-2\Rightarrow y_0=2$, suy ra phương trình tiếp tuyến $\Delta: y=x+4$.

Câu 46. Chọn C.

Do $\frac{OB}{OA}=36\Rightarrow y'(x_0)=\pm 36$.

- Với $y'(x_0)=-36\Leftrightarrow -4x^3-2x_0=-36\Leftrightarrow 4x_0^3+2x_0-36=0\Leftrightarrow x_0=2$.

Vậy $y_0=y(2)=-14$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y=-36x+58$.

- Với $y'(x_0)=36\Leftrightarrow -4x^3-2x_0=36\Leftrightarrow 4x_0^3+2x_0+36=0\Leftrightarrow x_0=-2$.

Vậy $y_0=y(-2)=-14$. Suy ra phương trình tiếp tuyến $y=36x+58$.

Câu 47. Chọn A.

- Gọi $M\left(x_0;\frac{x_0-1}{2(x_0+1)}\right)\in(C)$ với $x_0\neq -1$ là điểm cần tìm.
- Gọi Δ tiếp tuyến của (C) tại M ta có phương trình.

$$\Delta: y=f'(x_0)(x-x_0)+\frac{x_0-1}{2(x_0+1)}=\frac{1}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0-1}{2(x_0+1)}.$$

- Gọi $A=\Delta\cap Ox\Rightarrow A\left(-\frac{x_0^2-2x_0-1}{2};0\right)$ và $B=\Delta\cap Oy\Rightarrow B\left(0;\frac{x_0^2-2x_0-1}{2(x_0+1)^2}\right)$.
- Khi đó Δ tạo với hai trục tọa độ ΔOAB có trọng tâm là

$$G\left(-\frac{x_0^2-2x_0-1}{6};\frac{x_0^2-2x_0-1}{6(x_0+1)^2}\right).$$

- Do G thuộc đường thẳng $4x+y=0 \Rightarrow -4.\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{6}+\dfrac{x_0^2-2x_0-1}{6(x_0+1)^2}=0$

$$\Leftrightarrow 4=\frac{1}{(x_0+1)^2} \text{ (vì } A, B \text{ không trùng } O \text{ nên } x_0^2-2x_0-1\neq 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0+1=\dfrac{1}{2} \\ x_0+1=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-\dfrac{1}{2} \\ x_0=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right. .$$

- Vì $x_0>-1$ nên chỉ chọn $x_0=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow M\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow x_0+2y_0=-\dfrac{7}{2}$.

Câu 48. Chọn B.

- $A\in(C_m)$ nên $A(1;1-m)$. Ngoài ra $y'=4x^3-4mx \Rightarrow y'(1)=4-4m$.
- Phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại A là $y-1+m=y'(1).(x-1)$, hay

$$(4-4m)x-y-3(1-m)=0.$$

- Khi đó $d(B;\Delta)=\dfrac{|-1|}{\sqrt{16(1-m)^2+1}}\leq 1$, Dấu '=' xảy ra $\Leftrightarrow$ khi $m=1$.
- Do đó $d(B;\Delta)$ lớn nhất bằng 1 khi và chỉ khi $m=1$.

Câu 49. Chọn C.

- Giả sử $M(x_0;y_0)\in(C) \Rightarrow y_0=\dfrac{2x_0+3}{x_0+1}$.
- Ta có $d(M,d_1)=2 \Leftrightarrow \dfrac{|3x_0+4y_0-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x_0+4y_0-12=0 \\ 3x_0+4y_0+8=0 \end{array}\right.$.
- Với $3x_0+4y_0-12=0 \Leftrightarrow 3x_0+4\left(\dfrac{2x_0+3}{x_0+1}\right)-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \Rightarrow M_1(0;3) \\ x_0=\dfrac{1}{3} \Rightarrow M_2\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{11}{4}\right) \end{array}\right.$
- Với $3x_0+4y_0+8=0 \Leftrightarrow 3x_0+4\left(\dfrac{2x_0+3}{x_0+1}\right)+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-5 \Rightarrow M_3\left(-5;\dfrac{7}{4}\right) \\ x_0=-\dfrac{4}{3} \Rightarrow M_4\left(-\dfrac{4}{3};-1\right) \end{array}\right.$.

Suy ra có 4 tiếp tuyến.

Câu 50. Chọn C.

Phương pháp tự luận.

- Giao điểm của hai tiệm cận là $I(1;2)$. Gọi $M(a;b)\in(C) \Rightarrow b=\dfrac{2a-1}{a-1}$ $(a>1)$.

- Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là $y=-\frac{1}{(a-1)^2}(x-a)+\frac{2a-1}{a-1}$.
- Phương trình đường thẳng MI là $y=\frac{1}{(a-1)^2}(x-1)+2$.
- Tiếp tuyến tại M vuông góc với MI nên ta có

$$-\frac{1}{(a-1)^2}\cdot\frac{1}{(a-1)^2}=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\Rightarrow b=1\\a=2\Rightarrow b=3\end{array}\right..$$

Vì yêu cầu hoành độ lớn hơn 1 nên điểm cần tìm là $M(2;3)$.

Phương pháp trắc nghiệm

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$, điểm M thoả yêu cầu bài toán có hoành độ được tính như sau:

$$x_0-1=\pm\sqrt{|2.(-1)-1.(-1)|}\Leftrightarrow x_0-1=\pm1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2\Rightarrow y_0=3\\x_0=0\ \ (L)\end{array}\right..$$

Vậy $M(2;3)$.

Câu 51. Chọn A.

- Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là

$$\frac{-x+1}{2x-1}=x+m\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{1}{2}\\g(x)=2x^2+2mx-m-1=0\ \ (*)\end{cases}.$$

- Theo định lí Viet ta có $x_1+x_2=-m;\ \ x_1x_2=\frac{-m-1}{2}$. Giả sử $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$.
- Ta có $y'=\frac{-1}{(2x-1)^2}$, nên tiếp tuyến của (C) tại A và B có hệ số góc lần lượt là

$k_1=-\frac{1}{(2x_1-1)^2}$ và $k_2=-\frac{1}{(2x_2-1)^2}$. Vậy

$$k_1+k_2=-\frac{1}{(2x_1-1)^2}-\frac{1}{(2x_2-1)^2}=-\frac{4(x_1^2+x_2^2)-4(x_1+x_2)+2}{[4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1]^2}$$
$$=-(4m^2+8m+6)=-4(m+1)^2-2\le-2$$

- Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m=-1$.

Vậy k_1+k_2 đạt giá trị lớn nhất bằng -2 khi $m=-1$.

Câu 52. Chọn A.

Phương pháp tự luận

- Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là toạ độ của tiếp điểm $\Rightarrow y'(x_0)=\dfrac{-1}{\left(2x_0+3\right)^2}<0$.
- ΔOAB cân tại O nên tiếp tuyến Δ song song với đường thẳng $y=-x$ (vì tiếp tuyến có

hệ số góc âm). Nghĩa là $y'\left(x_0\right)=\dfrac{-1}{\left(2x_0+3\right)^2}=-1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \Rightarrow y_0=1 \\ x_0=-2 \Rightarrow y_0=0 \end{array}\right.$.

- Với $x_0=-1;\ y_0=1 \Rightarrow \Delta$: $y-1=-\left(x+1\right) \Leftrightarrow y=-x$ (loại).
- Với $x_0=-2;\ y_0=0 \Rightarrow \Delta$: $y-0=-\left(x+2\right) \Leftrightarrow y=-x-2$ (nhận).

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-x-2$.

Phương pháp trắc nghiệm

- Tam giác OAB cân tại gốc tọa độ O nên ta có $OA=OB \Rightarrow n=1$.

  $acx_0^2+2bcx_0+bd\neq 0 \Rightarrow 2x_0^2+8x_0+6\neq 0 \Leftrightarrow x_0\neq -1; x_0\neq -3$

  $$cx_0+d=\pm\sqrt{n.\left|ad-bc\right|} \Rightarrow 2x_0+3=\pm\sqrt{1.\left|-1\right|} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1\left(L\right) \\ x_0=-2\left(N\right) \end{array}\right..$$

- Với $x_0=-2;\ y_0=0 \Rightarrow \Delta$: $y-0=-\left(x+2\right) \Leftrightarrow y=-x-2$ (nhận).

Câu 53. Chọn A.

- Giả sử tiếp tuyến d của $\left(C\right)$ tại $M(x_0;y_0)\in(C)$ cắt Ox tại A, Oy tại B sao cho $OA=4OB$.
- Do ΔOAB vuông tại A nên $\tan A=\dfrac{OB}{OA}=\dfrac{1}{4} \Rightarrow$ Hệ số góc của d bằng $\dfrac{1}{4}$ hoặc $-\dfrac{1}{4}$.
- Vì $y'\left(x_0\right)=-\dfrac{1}{\left(x_0-1\right)^2}<0$ nên hệ số góc của d bằng $-\dfrac{1}{4}$, suy ra

$$-\frac{1}{\left(x_0-1\right)^2}=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1 \Rightarrow y_0=\dfrac{3}{2} \\ x_0=3 \Rightarrow y_0=\dfrac{5}{2} \end{array}\right..$$

- Khi đó có 2 tiếp tuyến thoả mãn là: $\left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{1}{4}\left(x+1\right)+\dfrac{3}{2} \\ y=-\dfrac{1}{4}\left(x-3\right)+\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4} \\ y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4} \end{array}\right.$.

Câu 54. Chọn D.

Phương pháp tự luận

- Ta có $y'=\dfrac{-1}{\left(x-1\right)^2}$; $I\left(1;1\right)$.

- Gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0}{x_0-1}\right)\in(C),\ (x_0\neq 1)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng

$$\Delta: y=-\frac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\frac{x_0}{x_0-1}\Leftrightarrow x+(x_0-1)^2y-x_0^2=0.$$

- $d(I,\Delta)=\dfrac{2|x_0-1|}{\sqrt{1+(x_0-1)^4}}=\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{1}{(x_0-1)^2}+(x_0-1)^2}}\le\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

- Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{1}{(x_0-1)^2}=(x_0-1)^2\Leftrightarrow|x_0-1|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2\Rightarrow y_0=2(N)\\ x_0=0\ \ (L)\end{array}\right.$$

Tung độ này gần với giá trị $\dfrac{\pi}{2}$ nhất trong các đáp án.

Phương pháp trắc nghiệm

Ta có $IM\perp\Delta\Rightarrow$
$$cx_0+d=\pm\sqrt{|ad-bc|}\Rightarrow x_0-1=\pm\sqrt{|-1-0|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x_0=2\Rightarrow y_0=2(N)\\ x_0=0 & (L)\end{array}\right.$$

Câu 55. Chọn C.

Phương pháp tự luận

- Ta có $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}$.

- Gọi $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-1}{x_0+1}\right)\in(C),(x_0\neq-1)$. Phương trình tiếp tuyến tại M là

$$y=\frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-1}{x_0+1}\Leftrightarrow 3x-(x_0+1)^2y+2x_0^2-2x_0-1=0.$$

- $d(I,\Delta)=\dfrac{6|x_0+1|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\dfrac{6}{\sqrt{\dfrac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}\le\dfrac{6}{\sqrt{2\sqrt{9}}}=\sqrt{6}$.

- Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{9}{(x_0+1)^2}=(x_0+1)^2\Leftrightarrow(x_0+1)^2=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1+\sqrt{3}\Rightarrow y_0=2-\sqrt{3}(L)\\ x_0=-1-\sqrt{3}\Rightarrow y_0=2+\sqrt{3}(N)\end{array}\right.$$

Tung độ này gần với giá trị e nhất trong các đáp án.

Phương pháp trắc nghiệm

Ta có $IM \perp \Delta \Rightarrow cx_0 + d = \pm\sqrt{|ad-bc|} \Rightarrow x_0 + 1 = \pm\sqrt{|2+1|}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1+\sqrt{3} \Rightarrow y = 2-\sqrt{3}\,(L) \\ x_0 = -1-\sqrt{3} \Rightarrow y = 2+\sqrt{3}\,(N) \end{array}\right..$$

Câu 56. Chọn D.

Phương pháp tự luận

- Gọi $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-3}{x_0-2}\right) \in (C),(x_0 \neq 2)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng

$$\Delta : y = -\frac{1}{(x_0-2)^2}(x-x_0) + 2 + \frac{1}{x_0-2}.$$

- Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là $A\left(2;2+\dfrac{2}{x_0-2}\right)$.
- Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là $B(2x_0-2;2)$.
- Ta có $AB^2 = 4\left[(x_0-2)^2 + \dfrac{1}{(x_0-2)^2}\right] \geq 8$. Dấu "=" xảy ra khi $(x_0-2)^2 = \dfrac{1}{(x_0-2)^2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 3 \Rightarrow \overrightarrow{OM}(3;3) \Rightarrow \left|\overrightarrow{OM}\right| = 3\sqrt{2}\,(N) \\ x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow \overrightarrow{OM}(1;1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{2}\,(L) \end{array}\right..$$

Phương pháp trắc nghiệm

- AB ngắn nhất suy ra khoảng cách từ I đến tiếp tuyến Δ tại M ngắn nhất $\Rightarrow IM \perp \Delta \Rightarrow cx_M + d = \pm\sqrt{|ad-bc|} \Rightarrow x_M - 2 = \pm\sqrt{|-4+3|} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_M = 3 \Rightarrow y_M = 3 \\ x_M = 1 \Rightarrow y_M = 1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{OM}\right| = 3\sqrt{2}$.

Câu 57. Chọn D.

Phương pháp tự luận

- Gọi $M\left(x_0;\dfrac{x_0-2}{x_0+1}\right) \in (C)$, $(x_0 \neq -1)$, $I(-1;1)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng

$$\Delta : y = \frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0) + \frac{x_0-2}{x_0+1}.$$

- Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là $A\left(-1;\dfrac{x_0-5}{x_0+1}\right)$.
- Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là $B(2x_0+1;1)$.

- Ta có $IA=\dfrac{6}{|x_0+1|}$, $IB=2|x_0+1| \Rightarrow IA.IB=12$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp

ΔIAB là $S_{IAB}=pr$, suy ra

$$r=\frac{S_{IAB}}{p}=\frac{IA.IB}{IA+IB+AB}=\frac{IA.IB}{IA+IB+\sqrt{IA^2+IB^2}}\le\frac{IA.IB}{2\sqrt{IA.IB}+\sqrt{2.IA.IB}}=2\sqrt{3}-\sqrt{6}$$

.

- Suy ra $r_{\max}=2\sqrt{3}-\sqrt{6}\Leftrightarrow IA=IB\Leftrightarrow |x_0-1|^2=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_M=-1+\sqrt{3}\Rightarrow y_0=1-\sqrt{3}\\ x_M=-1-\sqrt{3}\Rightarrow y_0=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$

.

- $\overrightarrow{IM}\left(\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{IM}\right|=\sqrt{6}$.

Phương pháp trắc nghiệm

- $IA=IB\Rightarrow\Delta IAB$ vuông cân tại $I\Rightarrow IM\perp\Delta$.
- $cx_M+d=\pm\sqrt{|ad-bc|}\Rightarrow x_M+1=\pm\sqrt{|1+2|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_M=-1+\sqrt{3}\Rightarrow y_M=1-\sqrt{3}\\ x_M=-1-\sqrt{3}\Rightarrow y_M=1+\sqrt{3}\end{array}\right.$

  $\Rightarrow\left|\overrightarrow{IM}\right|=\sqrt{6}$.

Câu 58. Chọn D.

Phương pháp tự luận

- Gọi $M\left(x_0;2+\dfrac{3}{x_0-1}\right)\in(C),(x_0\ne1)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng

$$\Delta: y=\frac{-3}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+2+\frac{3}{x_0-1}.$$

- Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là $A\left(1;\ 2+\dfrac{6}{x_0-1}\right)$.
- Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là $B(2x_0-1;\ 2)$.
- Ta có $S_{\Delta IAB}=\dfrac{1}{2}IA.IB=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6}{|x_0-1|}\cdot2|x_0-1|=2.3=6$.
- ΔIAB vuông tại I có diện tích không đổi $\Rightarrow$ chu vi ΔIAB đạt giá trị nhỏ nhất khi

$$IA=IB\Leftrightarrow\frac{6}{|x_0-1|}=2|x_0-1|\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1+\sqrt{3}\\ x_0=1-\sqrt{3}\end{array}\right..$$

- Với $x_0=1+\sqrt{3}$ thì phương trình tiếp tuyến là $\Delta: y=-x+3+2\sqrt{3}$. Suy ra

$$d(O,\Delta)=\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

- Với $x_0 = 1-\sqrt{3}$ thì phương trình tiếp tuyến là $\Delta : y = -x + 3 - 2\sqrt{3}$. Suy ra
$$d(O,\Delta) = \frac{-3+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Vậy khoảng cách lớn nhất là $\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ gần với giá trị 5 nhất trong các đáp án.

Phương pháp trắc nghiệm

- $IA = IB \Rightarrow$

$$cx_M + d = \pm\sqrt{|ad-bc|} \Rightarrow x_M - 1 = \pm\sqrt{|-2-1|} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_M = 1+\sqrt{3} \Rightarrow y = 2+\sqrt{3} \\ x_M = 1-\sqrt{3} \Rightarrow y = 2-\sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow d(O,\Delta) = \frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(N).$$

Câu 59. Chọn A.

Phương pháp tự luận

- Gọi $M\left(x_0; \frac{2x_0-1}{x_0-2}\right) \in (C), (x_0 \neq 2)$. Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng
$$\Delta : y = -\frac{3}{(x_0-2)^2}(x-x_0) + \frac{2x_0-1}{x_0-2}.$$

- Giao điểm của Δ với tiệm cận đứng là $A\left(2; \frac{2x_0+2}{x_0-2}\right)$.
- Giao điểm của Δ với tiệm cận ngang là $B(2x_0-2; 2)$.
- Xét $\begin{cases} x_A + x_B = 2 + 2x_0 - 2 = 2x_0 \\ y_A + y_B = \frac{2x_0+2}{x_0-2} + 2 = 2.\frac{2x_0-1}{x_0-2} = 2y_0 \end{cases} \Rightarrow M$ là trung điểm của AB.
- ΔIAB vuông tại I nên M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB.

$$\Rightarrow S = \pi R^2 = \pi IM^2 = \pi\left[(x_0-2)^2 + \left(\frac{2x_0-1}{x_0-2} - 2\right)^2\right] = \pi\left[(x_0-2)^2 + \frac{9}{(x_0-2)^2}\right] \geq 6\pi$$

- Dấu "=" xảy ra khi $(x_0-2)^2 = \frac{9}{(x_0-2)^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = \sqrt{3}+2 \Rightarrow y_0 = \sqrt{3}+2 \\ x_0 = -\sqrt{3}+2 \Rightarrow y_0 = -\sqrt{3}+2 \end{array}\right.$.
- Với $x_0 = \sqrt{3}+2 \Rightarrow \Delta : y = -x + 2\sqrt{3} + 4$ cắt 2 trục tọa độ tại $E(0; 2\sqrt{3}+4)$ và

$F(2\sqrt{3}+4; 0)$, suy ra $S_{OEF} = \frac{1}{2}OE.OF = 14 + 8\sqrt{3} \approx 27,8564$

- Với $x_0 = -\sqrt{3} + 2 \Rightarrow \Delta: y = -x - 2\sqrt{3} + 4$ cắt 2 trục tọa độ tại $E\left(0;\ -2\sqrt{3}+4\right)$ và $F\left(-2\sqrt{3}+4;\ 0\right)$, suy ra $S_{OEF} = \frac{1}{2}OE.OF = 14 - 8\sqrt{3} \approx 0,1435$

Phương pháp trắc nghiệm

- IM lớn nhất $\Leftrightarrow IM \perp \Delta \Rightarrow cx_0 + d = \pm\sqrt{|ad - bc|} \Rightarrow x_0 - 2 = \pm\sqrt{|-4+1|}$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = \sqrt{3} + 2 \Rightarrow y_0 = \sqrt{3} + 2 \\ x_0 = -\sqrt{3} + 2 \Rightarrow y_0 = -\sqrt{3} + 2 \end{array}\right.$. Giải tương tự như trên.