Câu 81. Tích phân $\int_0^1 \frac{x^7}{(1+x^2)^5}dx$ bằng

A. $\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^5}dt$. **B.** $\int_1^3 \frac{(t-1)^3}{t^5}dt$. **C.** $\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^4}dt$. **D.** $\frac{3}{2}\int_1^4 \frac{(t-1)^3}{t^4}dt$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=1+x^2 \Rightarrow dt=2xdx$. Vậy $I=\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t^5}dt=\frac{1}{4}.\frac{1}{2^5}=\frac{1}{128}$.

Câu 82. Tích phân $I=\int_1^{\sqrt[4]{3}} \frac{1}{x(x^4+1)}dx$ bằng

A. $\ln\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{3}\ln\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{5}\ln\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=x^2 \Rightarrow dt=2xdx$. Vậy $I=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+1}\right)dt=\frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}$.

Câu 83. Cho hai tích phân $I=\int_0^2 x^3dx$, $J=\int_0^2 xdx$ .Tìm mối quan hệ giữa I và J

A. $I.J=8$. **B.** $I.J=\frac{32}{5}$. **C.** $I-J=\frac{128}{7}$. **D.** $I+J=\frac{64}{9}$.

Hướng dẫn giải

$I=\int_0^2 x^3dx=4$ và $J=\int_0^2 xdx=2$, suy ra $I.J=8$.

Câu 84. Cho số thực a thỏa mãn $\int_1^a e^{x+1}dx=e^4-e^2$, khi đó a có giá trị bằng

A. -1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Ta có $\int_1^a e^{x+1}dx=e^{x+1}\Big|_1^a=e^{a+1}-e^2=e^4-e^2 \Rightarrow a=3$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Thế từng đáp án vào và bấm máy

$\int_1^3 e^{x+1}dx-\left(e^4-e^2\right)=0$ $\int_1^{-1} e^{x+1}dx-\left(e^4-e^2\right)\approx -53,5981$

$\int_1^0 e^{x+1}dx-\left(e^4-e^2\right)\approx -51,8798$ $\int_1^2 e^{x+1}dx-\left(e^4-e^2\right)\approx -34,5126$.

Câu 85. Tích phân $\int_0^2 ke^xdx$ (với k là hằng số)có giá trị bằng

A. $k(e^2-1)$. **B.** e^2-1. **C.** $k(e^2-e)$. **D.** e^2-e.

Hướng dẫn giải

Ta có $\int_0^2 ke^xdx=ke^x\Big|_0^\pi=k(\mathrm{e}^2-1)$.

Câu 86. Với hằng số k, tích phân nào sau đây có giá trị khác với các tích phân còn lại ?

A. $\int_0^1 k(e^2-1)dx$. **B.** $\int_0^2 ke^x dx$. **C.** $\int_0^{\frac{2}{3}} 3ke^{3x}dx$. **D.** $\int_0^{\frac{2}{3}} ke^{2x}dx$.

Hướng dẫn giải

Ta có
- $\int_0^{\frac{2}{3}} ke^{2x}dx = \frac{k}{2}e^{2x}\Big|_0^{\frac{2}{3}} = \frac{k}{2}(e^{\frac{4}{3}}-1)$
- $\int_0^2 ke^x dx = ke^x\Big|_0^{\pi} = k(e^2-1)$
- $\int_0^{\frac{2}{3}} 3ke^{3x}dx = ke^{3x}\Big|_0^{\frac{2}{3}} = k(e^2-1)$
- $\int_0^1 k(e^2-1)dx = kx(e^2-1)\Big|_0^1 = k(e^2-1)$.

Câu 87. Với số thực k, xét các phát biểu sau:

(I) $\int_{-1}^{1} dx = 2$; (II) $\int_{-1}^{1} kdx = 2k$; (III) $\int_{-1}^{1} xdx = 2x$; (IV) $\int_0^1 3kx^2dx = 2k$.

Số phát biểu đúng là

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

(III): sai

Câu 88. Cho hàm số f và g liên tục trên đoạn $[1;5]$ sao cho $\int_1^5 f(x)dx = -7$ và $\int_1^5 g(x)dx = 5$ và $\int_1^5 [g(x)-kf(x)]dx = 19$ Giá trị của k là:

A. 2. **B.** 6. **C.** 2. **D.** -2.

Hướng dẫn giải

Ta có $\int_1^5 [g(x)-kf(x)]dx = 19 \Leftrightarrow \int_1^5 g(x)dx - k\int_1^5 f(x)dx = 19 \Leftrightarrow 5-k(-7) = 19 \Leftrightarrow k = 2$.

Câu 89. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$. Nếu $\int_1^5 2f(x)dx = 2$ và $\int_1^3 f(x)dx = 7$ thì $\int_3^5 f(x)dx$ có giá trị bằng:

A. 5. **B.** -6. **C.** 9. **D.** -9.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Ta có $\int_3^5 f(x)dx = \int_3^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx = -\int_1^3 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx = -7 + \frac{2}{2} = -6$.

Câu 90. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[0;3]$. Nếu $\int_1^2 f(x)dx = 4$ và tích phân $\int_1^2 [kx - f(x)]dx = -1$ giá trị k bằng

A. 7. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 5. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Ta có $\int_1^2 [kx - f(x)]dx = -1 \Leftrightarrow k\int_1^2 xdx - \int_1^2 f(x)dx = k\frac{3}{2} - 4 = -1 \Leftrightarrow k = 2$.

Câu 91. Tích phân $\int_1^e (2x-5)\ln x dx$ bằng

A. $-(x^2-5x)\ln x\Big|_1^e-\int\limits_1^e(x-5)dx$. **B.** $(x^2-5x)\ln x\Big|_1^e+\int\limits_1^e(x-5)dx$.

C. $(x^2-5x)\ln x\Big|_1^e-\int\limits_1^e(x-5)dx$. **D.** $(x-5)\ln x\Big|_1^e-\int\limits_1^e(x^2-5x)dx$.

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=(2x-5)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{1}{x}dx\\ v=x^2-5x\end{cases}$. Vậy $\int\limits_1^e(2x-5)\ln xdx=(x^2-5x)\ln x\Big|_1^e-\int\limits_1^e(x-5)dx$.

Câu 92. Tích phân $\mathrm{I}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cos 2xdx$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{-5\pi}{8}$. **B.** $\dfrac{\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{3\pi}{8}$. **D.** $\dfrac{\pi}{8}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cos 2xdx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)\cos 2xdx=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2x+\cos 4x)dx$$

$$=\frac{1}{4}(x+\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{8}.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Chuyển chế độ radian: SHIFT MODE 4.

Bấm máy $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cos 2xdx-\dfrac{\pi}{8}=0$. Vậy đáp án là $\dfrac{\pi}{8}$.

Câu 93. Tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{4\sin^3 x}{1+\cos x}dx$ có giá trị bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$$\frac{4\sin^3 x}{1+\cos x}=\frac{4\sin^3 x(1-\cos x)}{\sin^2 x}=4\sin x-4\sin x\cos x=4\sin x-2\sin 2x$$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\sin x-2\sin 2x)dx=2.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Chuyển chế độ radian: SHIFT MODE 4

Bấm máy tính $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{4\sin^3 x}{1+\cos x}dx-2=0$. Vậy đáp án là 2.

Câu 94. Tích phân $I=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin x}dx$ có giá trị bằng

A. $4\sqrt{2}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $-\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

$$I=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}dx=\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|dx=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left|\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx$$

$$=\sqrt{2}\left[\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx-\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx\right]=4\sqrt{2}$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bấm máy tính $I=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin x}dx-4\sqrt{2}$ được đáp số là 0. Vậy đáp án là $4\sqrt{2}$.

Câu 95. Tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x\tan xdx$ có giá trị bằng

A $\ln 3-\frac{3}{5}$. **B.** $\ln 2-2$. **C.** $\ln 2-\frac{3}{4}$. **D.** $\ln 2-\frac{3}{8}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x.\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos x}dx$. Đặt $t=\cos x\Rightarrow I=-\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{1-u^2}{u}du=\ln 2-\frac{3}{8}$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bấm máy tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2 x\tan xdx-\left(\ln 2-\frac{3}{8}\right)$ được đáp số là 0. Vậy đáp án là $\ln 2-\frac{3}{8}$.

Câu 96. Cho hàm số *f(x)* liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(x)+f(-x)=\cos^4 x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $I=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$ là

A. -2. **B.** $\frac{3\pi}{16}$. **C.** $\ln 2-\frac{3}{4}$. **D.** $\ln 3-\frac{3}{5}$.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Đặt $x=-t\Rightarrow\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}f(-t)(-dt)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(-t)dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(-x)dx$

$$\Rightarrow 2\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}[f(x)+f(-x)]dx=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 xdx\quad\Rightarrow I=\frac{3\pi}{16}.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bấm máy tính $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 xdx-\frac{3\pi}{16}$ được đáp số là 0. Vậy đáp án là $\frac{3\pi}{16}$.

Câu 97. Nếu $\int_{-2}^{0}(5-e^{-x})dx=K-e^2$ thì giá trị của K là:

A. 11. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 12,5.

Hướng dẫn giải

$K=\int_{-2}^{0}\left(5-e^{-x}\right)dx+e^2=\left(5x+e^{-x}\right)\Big|_{-2}^{0}+e^2=11$.

Câu 98. Cho tích phân $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3\cos x}.\sin xdx$.Đặt $u=\sqrt{3\cos x+1}$ .Khi đó I bằng

A. $\frac{2}{3}\int_{1}^{3}u^2du$. **B.** $\frac{2}{3}\int_{0}^{2}u^2du$. **C.** $\frac{2}{9}u^3\Big|_{1}^{2}$. **D.** $\int_{1}^{3}u^2du$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u=\sqrt{3\cos x+1}\Rightarrow 2udu=-3\sin xdx$. Khi $x=0\Rightarrow u=2;\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=1$.

Khi đó $I=\frac{2}{3}\int_{1}^{2}u^2du=\frac{2}{9}u^3\Big|_{1}^{2}$.

Câu 99. Tích phân $I=\int_{1}^{e}\frac{\sqrt{8\ln x+1}}{x}dx$ bằng

A. -2. **B.** $\frac{13}{6}$. **C.** $\ln 2-\frac{3}{4}$. **D.** $\ln 3-\frac{3}{5}$.

Hướng dẫn giải
[Phương pháp tự luận]

Đặt $t=\sqrt{8\ln x+1}\Rightarrow tdt=\frac{4}{x}dx$. Với $x=1\Rightarrow t=1,\ x=e\Rightarrow t=3$. Vậy $I=\frac{1}{4}\int_{1}^{3}t^2dt=\frac{t^3}{12}\Big|_{1}^{3}=\frac{13}{6}$.

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bấm máy tính $I=\int_{1}^{e}\frac{\sqrt{8\ln x+1}}{x}dx$ được đáp số là $\frac{13}{6}$. Vậy đáp án là $\frac{13}{6}$.

Câu 100. Tích phân $\int_{-1}^{5}\left|x^2-2x-3\right|dx$ có giá trị bằng

A. 0. **B.** $\frac{64}{3}$. **C.** 7. **D.** $12,5$.

Hướng dẫn giải

$$\int_{-1}^{5}\left|x^2-2x-3\right|dx=\int_{-1}^{5}\left|(x-3)(x+1)\right|dx=-\int_{-1}^{3}\left(x^2-2x-3\right)dx+\int_{3}^{5}\left(x^2-2x-3\right)dx$$

$$=-\left(\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right)\Big|_{-1}^{3}+\left(\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right)\Big|_{3}^{5}=\frac{64}{3}.$$

Câu 101. Tìm a để $\int_{1}^{2}(3-ax)dx=-3$?

A. 2. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

$\int_{1}^{2}(3-ax)dx=-3\Leftrightarrow\left[3x-\frac{a}{2}x^2\right]\Big|_{1}^{2}=-3\Leftrightarrow a=4$.

Câu 102. Nếu $\int_{2}^{5}k^2\left(5-x^3\right)dx=-549$ thì giá trị của k là:

A. ±2 **B.** 2. **C.** -2 . **D.** 5.

Hướng dẫn giải
[Phương pháp tự luận]

$$\int_2^5 k^2\left(5-x^3\right)dx=-549 \Leftrightarrow k^2\left(5x-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_2^5=-549 \Leftrightarrow k^2=\frac{-549}{\frac{-549}{4}}=4 \Leftrightarrow k=\pm 2.$$

Câu 103. Tích phân $\int_2^3 \frac{x^2-x+4}{x+1}dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}+6\ln\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}+6\ln\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}-\ln\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}+\ln\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

$$\int_2^3 \frac{x^2-x+4}{x+1}dx=\int_2^3\left(x-2+\frac{6}{x+1}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-2x+6\ln|x+1|\right)\Bigg|_2^3=\frac{1}{2}+6\ln\frac{4}{3}.$$

[Phương pháp trắc nghiệm]

Bước 1: Bấm máy tính để tính $\int_2^3 \frac{x^2-x+4}{x+1}dx$

Bước 2: Bấm SHIFT STO A để lưu vào biến **A.**

Bước 3: Bấm $A-\left(\frac{1}{2}+6\ln\frac{4}{3}\right)=0$. Vậy đáp án là $\frac{1}{2}+6\ln\frac{4}{3}$.

Câu 104. Cho hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $I=\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ là

A. 2. **B.** -7. **C.** 7. **D.** -2.

Hướng dẫn giải

[Phương pháp tự luận]

Ta có $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ (1)

Tính $I_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx$. Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt\Rightarrow I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx$.

Thay vào (1), ta được $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(-x)+f(x)\right]dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\left(1+\cos 2x\right)}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos x|dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=2$.

Câu 105. Tìm m để $\int_m^2 (3-2x)^4dx=\frac{122}{5}$?

A. 0. **B.** 9. **C.** 7. **D.**2.

Hướng dẫn giải

$$A=\int_m^2 (3-2x)^4dx=-\frac{1}{10}(3-2x)^5\Big|_m^2=-\frac{1}{10}\left[(3-4)^5-(3-2m)^5\right]=\frac{122}{5}\Rightarrow m=0.$$

4.3 TÍCH PHÂN

I. VẬN DỤNG THẤP

Câu 106. Giá trị của tích phân $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ là

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** $\frac{\pi}{3}$. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x=\sin t,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=\cos tdt$. Đổi cận : $x=0\Rightarrow t=0,\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}$.

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}dt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos t}{|\cos t|}dt=\int_0^{\frac{\pi}{6}}dt=t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}-0=\frac{\pi}{6}$.

Câu 107. Giá trị của tích phân $I=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$ là

A $I=\frac{\pi}{2}$. **B.** $I=\frac{3\pi}{4}$. **C.** $I=\frac{\pi}{4}$. **D.** $I=\frac{5\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x=\tan t,\ t\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow dx=(\tan^2 x+1)dt$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=0,\ x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$, suy ra $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2 t+1}{1+\tan^2 t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=\frac{\pi}{4}$.

Câu 108. Giá trị của tích phân $I=\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{dx}{x^2+2x+2}$ là

A. $I=\frac{5\pi}{12}$. **B.** $I=\frac{\pi}{6}$. **C.** $I=\frac{3\pi}{12}$. **D.** $I=\frac{\pi}{12}$.

Hướng dẫn giải

$I=\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{dx}{1+(x+1)^2}$. Đặt $x+1=\tan t$

Câu 109. Tích phân $I=\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+5}dx$ có giá trị là

A. $\frac{4}{3}\sqrt{6}-\frac{10}{9}\sqrt{3}$. **B.** $\frac{4}{3}\sqrt{7}-\frac{10}{9}\sqrt{5}$. **C.** $\frac{4}{3}\sqrt{6}-\frac{10}{9}\sqrt{5}$. **D.** $\frac{2}{3}\sqrt{6}-\frac{10}{9}\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $t=x^3+5\Rightarrow dt=3x^2dx$. Khi $x=0$ thì $t=5$; khi $x=1$ thì $t=6$.

Vậy $I=\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+5}dx=\int_5^6\sqrt{t}\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\int_5^6(t)^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{3}\frac{(t)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_5^6=\frac{2}{9}t\sqrt{t}\Big|_5^6=\frac{4}{3}\sqrt{6}-\frac{10}{9}\sqrt{5}$.

Câu 110. Tích phân $\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx$ có giá trị là

A. $\frac{\pi}{4}$. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** $\frac{\pi}{3}$. **D.** π.

Hướng dẫn giải

Đặt $x=2\sin t,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Khi x = 0 thì t = 0. Khi $x=2$ thì $t=\frac{\pi}{2}$.

Từ $x=2\sin t\Rightarrow dx=2\cos tdt$

Vậy $\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2 t}.2\cos tdt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\pi$.

Câu 111. Tích phân $I=\int\limits_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx$ có giá trị là

A. $\frac{3\sqrt{2}-1}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{2}-1}{2}$. D. $\frac{3\sqrt{2}-1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow x^2=t^2-1\Rightarrow dx=\frac{tdt}{x}$.

Vậy $I=\int\limits_1^{\sqrt{2}} t^2dt=\left.\frac{t^3}{3}\right|_1^{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$.

Câu 112. Tích phân $I=\int\limits_{-1}^0 x\sqrt[3]{x+1}dx$ có giá trị là

A. $-\frac{9}{28}$. B. $-\frac{3}{28}$. C. $\frac{3}{28}$. D. $\frac{9}{28}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt[3]{x+1}\Rightarrow t^3=x+1\Rightarrow dx=3t^2dt$.

Vậy $I=\int\limits_0^1 3t^3\left(t^3-1\right)dt=3\left.\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)\right|_0^1=-\frac{9}{28}$.

Câu 113. Giá trị của tích phân $I=2\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{(x+1)\sqrt{x+1}}$ là

A. $\frac{16-10\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{16-11\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{16-10\sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{16-11\sqrt{2}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2=x+1\Rightarrow 2tdt=dx$.

Ta có $I=\int\limits_1^{\sqrt{2}} \frac{\left(t^2-1\right)^2}{t^3}.2tdt=2\int\limits_1^{\sqrt{2}}\left(t-\frac{1}{t}\right)^2dt=2\left.\left(\frac{t^3}{3}-2t-\frac{1}{t}\right)\right|_1^{\sqrt{2}}=\frac{16-11\sqrt{2}}{3}$

Câu 114. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^1 x^5\left(1-x^3\right)^6dx$ là

A. $\frac{1}{167}$. B. $\frac{1}{168}$. C. $\frac{1}{166}$. D. $\frac{1}{165}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=1-x^3\Rightarrow dt=-3x^2dx\Rightarrow dx=\frac{-dt}{3x^2}$, ta có

$$I=\frac{1}{3}\int\limits_0^1 t^6(1-t)dt=\frac{1}{3}\int\limits_0^1\left(t^6-t^7\right)dt=\frac{1}{3}\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^8}{8}\right)=\frac{1}{168}.$$

Câu 115. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^3 \frac{2x^2+x-1}{\sqrt{x+1}}dx$ là

A. $\frac{53}{5}$. B. $\frac{54}{5}$. C. $\frac{52}{5}$. D. $\frac{51}{5}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $\sqrt{x+1}=t\Rightarrow x=t^2-1\Rightarrow dx=2tdt$. Khi x = 0 $\Rightarrow$ t = 1, x = 3 $\Rightarrow$ t = 2.

Vậy $I=\int_1^2 \frac{2\left(t^2-1\right)^2+\left(t^2-1\right)-1}{t}2tdt=2\int_1^2\left(2t^4-3t^2\right)dt=\left(\frac{4t^5}{5}-2t^3\right)\Big|_1^2=\frac{128}{5}-\frac{4}{5}-16+2=\frac{54}{5}$.

Câu 116. Giá trị của tích phân $I=\int_0^1\sqrt{\frac{3-x}{1+x}}dx$ là

A. $\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}+2$. **B**. $\frac{\pi}{3}-\sqrt{2}+2$. **C**. $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}+2$. **D**. $\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}+2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt{\frac{3-x}{1+x}}\Rightarrow I=8\int_1^{\sqrt{3}}\frac{t^2dt}{(t^2+1)^2}$; đặt $t=\tan u$.... ĐS: $I=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}+2$.

Chú ý: Phân tích $I=\int_0^1\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{1+x}}dx$, rồi đặt $t=\sqrt{1+x}$ sẽ tính nhanh hơn.

Câu 117. Giá trị của tích phân $\int_0^1(2x+1)^5dx$ là

A. $30\frac{1}{3}$. **B**. $60\frac{1}{3}$. **C**. $60\frac{2}{3}$. **D**. $30\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u=2x+1$ khi $x=0$ thì $u=1$. Khi $x=1$ thì $u=3$

Ta có: $du=2dx\Rightarrow dx=\frac{du}{2}$.

Do đó: $\int_0^1(2x+1)^5dx=\frac{1}{2}\int_1^3u^5du=\frac{u^6}{12}\Big|_1^3=\frac{1}{12}(3^6-1)=60\frac{2}{3}$.

Câu 118. Giá trị của tích phân $\int_0^1\frac{4x+2}{x^2+x+1}dx$ là

A. $\ln 2$. **B**. $\ln 3$. **C**. $2\ln 2$. **D**. $2\ln 3$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u=x^2+x+1$. Khi $x=0$ thì $u=1$. Khi $x=1$ thì $u=3$.

Ta có: $du=(2x+1)dx$.

Do đó: $\int_0^1\frac{4x+2}{x^2+x+1}dx=\int_1^3\frac{2du}{u}=2\ln|u|\Big|_1^3=2(\ln 3-\ln 1)=2\ln 3$.

Câu 119. Giá trị của tích phân $\int_1^2\frac{dx}{(2x-1)^2}$ là

A $\frac{1}{2}$. **B**. $\frac{1}{3}$. **C**. $\frac{1}{4}$. **D**. $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u=2x-1$. Khi $x=1$ thì $u=1$. Khi $x=2$ thì $u=3$.

Ta có $du=2dx\Rightarrow dx=\frac{du}{2}$.

Do đó $\int_1^2\frac{dx}{(2x-1)^2}=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{2u}\Big|_1^3=-\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-1)=\frac{1}{3}$.

Câu 120. Giá trị của tích phân $\int_0^3\frac{x-3}{3.\sqrt{x+1}+x+3}dx$ **là**

A. $3+3\ln\frac{3}{2}$. B. $3+6\ln\frac{3}{2}$. B. $-3+6\ln\frac{3}{2}$. D. $-3+3\ln\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u=\sqrt{x+1}\Rightarrow u^2-1=x\Rightarrow 2udu=dx$; đổi cận: $\begin{cases} x=0\Rightarrow u=1 \\ x=3\Rightarrow u=2 \end{cases}$

Ta có

$$\int_0^3 \frac{x-3}{3\sqrt{x+1}+x+3}dx=\int_1^2 \frac{2u^3-8u}{u^2+3u+2}du=\int_1^2 (2u-6)du+6\int_1^2 \frac{1}{u+1}du$$

$$=\left(u^2-6u\right)\Big|_1^2+6\ln|u+1|\Big|_1^2=-3+6\ln\frac{3}{2}.$$

Câu 121. Giá trị của tích phân: $\mathrm{I}=\int_0^4 \frac{x+1}{\left(1+\sqrt{1+2x}\right)^2}dx$ là

A. $2\ln 2-\frac{1}{2}$. B. $2\ln 2-\frac{1}{3}$. C. $2\ln 2-\frac{1}{4}$. D. $\ln 2-\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=1+\sqrt{1+2x}\Rightarrow dt=\frac{dx}{\sqrt{1+2x}}\Rightarrow dx=(t-1)dt$ và $x=\frac{t^2-2t}{2}$

Đổi cận:

x	0	4
t	2	4

Ta có

$$I=\frac{1}{2}\int_2^4 \frac{(t^2-2t+2)(t-1)}{t^2}dt=\frac{1}{2}\int_2^4 \frac{t^3-3t^2+4t-2}{t^2}dt=\frac{1}{2}\int_2^4\left(t-3+\frac{4}{t}-\frac{2}{t^2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}-3t+4\ln|t|+\frac{2}{t}\right)\Bigg|=2\ln 2-\frac{1}{4}$$

Câu 122. Giá trị của tích phân: $I=\int_0^1 \frac{(7x-1)^{99}}{(2x+1)^{101}}dx$ là

A. $\frac{1}{900}\left[2^{100}-1\right]$. B. $\frac{1}{900}\left[2^{101}-1\right]$. C. $\frac{1}{900}\left[2^{99}-1\right]$. D. $\frac{1}{900}\left[2^{98}-1\right]$.

Hướng dẫn giải

$$I=\int_0^1\left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)^{99}\frac{dx}{(2x+1)^2}=\frac{1}{9}\int_0^1\left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)^{99}d\left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{100}\left(\frac{7x-1}{2x+1}\right)^{100}\Bigg|_0^1=\frac{1}{900}[2^{100}-1]$$

Câu 123. Tích phân $I=\int_1^2 \frac{x^{2001}}{(1+x^2)^{1002}}dx$ có giá trị là

A. $\frac{1}{2002.2^{1001}}$. B. $\frac{1}{2001.2^{1001}}$. C. $\frac{1}{2001.2^{1002}}$. D. $\frac{1}{2002.2^{1002}}$.

Hướng dẫn giải

$I=\int_1^2 \frac{x^{2004}}{x^3(1+x^2)^{1002}}.dx=\int_1^2 \frac{1}{x^3\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{1002}}.dx$. Đặt $t=\frac{1}{x^2}+1\Rightarrow dt=-\frac{2}{x^3}dx$.

Câu 124. Giá trị của tích phân $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos(3x-\frac{2\pi}{3})dx$ là

A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$. C. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u=3x-\frac{2\pi}{3}$. Khi $x=\frac{\pi}{3}$ thì $u=\frac{\pi}{3}$, khi $x=\frac{2\pi}{3}$ thì $u=\frac{4\pi}{3}$.

Ta có $du=3dx \Rightarrow dx=\frac{du}{3}$.

Do đó:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos(3x-\frac{2\pi}{3})dx=\frac{1}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos u du=\frac{1}{3}\sin u\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}=\frac{1}{3}\left(\sin\frac{4\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 125. Giá trị của tích phân $\mathrm{I}=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\cos 2x dx$ là

A. $\frac{\pi}{6}$. B. $\frac{\pi}{8}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

$$I=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\cos 2x dx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2x)\cos 2x dx=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2x+\cos 4x)dx$$

$$=\frac{1}{4}(x+\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{8}$$

Câu 126. Giá trị của tích phân: $I=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ là

A. $\frac{\pi^2}{2}$. B. $\frac{\pi^2}{6}$. C. $\frac{\pi^2}{8}$. D. $\frac{\pi^2}{4}$.

Hướng dẫn giải

$$x=\pi-t \Rightarrow dx=-dt \Rightarrow I=\int\limits_{0}^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt=\pi\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt-I$$

$$\Rightarrow 2I=\pi\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt=-\pi\int\limits_{0}^{\pi}\frac{d(\cos t)}{1+\cos^2 t}=\pi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow I=\frac{\pi^2}{4}$$

Câu 127. Giá trị tích phân $J=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^4 x+1\right)\cos x dx$ là

A. $\frac{2}{5}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $\frac{4}{5}$. D. $\frac{6}{5}$.

Hướng dẫn giải

$$J=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^4 x+1\right)\cos x dx=\left(\frac{1}{5}\sin^5 x+\sin x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{6}{5}$$

Câu 128. Giá trị tích phân $I=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}}dx$ là

A. $\frac{3}{2}\ln 2$. **B.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **C.** $\ln 2$. **D.** $\frac{1}{2}\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt{1+\sin 2x}\Rightarrow t^2=1+\sin 2x\Rightarrow 2tdt=2\cos 2xdx$

$\Rightarrow dx=\frac{tdt}{t(\cos x-\sin x)}\Rightarrow I=\int\limits_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{t}dt=\ln|t|\Big|_1^{\sqrt{2}}=\ln(\sqrt{2})=\frac{1}{2}\ln 2$

Câu 129. Giá trị tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+3\cos x}dx$ là

A. $\frac{2}{3}\ln 2$. **B.** $\frac{2}{3}\ln 4$. **C.** $\frac{1}{3}\ln 4$. **D.** $\frac{1}{3}\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=1+3\cos x\Rightarrow dt=-3\sin xdx\Rightarrow dx=\frac{-dt}{3\sin x}\Rightarrow I=\frac{1}{3}\int\limits_1^4\frac{1}{t}dt=\frac{\ln|t|}{3}=\frac{1}{3}\ln 4$

Câu 130. Giá trị của tích phân $I=2\int\limits_1^2\sqrt[6]{1-\cos^3 x}.\sin x.\cos^5 xdx$ là

A. $\frac{21}{91}$. **B.** $\frac{12}{91}$. **C.** $\frac{21}{19}$. **D.** $\frac{12}{19}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt[6]{1-\cos^3 x}\Leftrightarrow t^6=1-\cos^3 x\Rightarrow 6t^5dt=3\cos^2 x\sin xdx$

$\Rightarrow dx=\frac{2t^5dt}{\cos^2 x\sin x}\Rightarrow I=2\int\limits_0^1 t^6\left(1-t^6\right)dt=2\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^{13}}{13}\right)\Big|_0^1=\frac{12}{91}$

Câu 131. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{(\sin x+\cos x)^3}dx$ là

A. $\frac{1}{8}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{5}{8}$. **D.** $\frac{7}{8}$.

Hướng dẫn giải

$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{(\sin x+\cos x)^3}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\tan x+1)^3\cos^2 x}dx$. Đặt $t=\tan x+1$

Câu 132. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin xdx}{(\sin x+\cos x)^3}$ là

A $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải

Đặt: $x=\frac{\pi}{2}-u\Rightarrow dx=-du$. Đổi cận: $x=0\Rightarrow u=\frac{\pi}{2}$; $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow u=0$.

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)du}{\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\right]^3}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos xdx}{(\sin x+\cos x)^3}$

Vậy: $2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{(\sin x+\cos x)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\left.\frac{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

Câu 133. Giá trị của tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\sin^2 xdx$ là

A. $I=\frac{\pi}{32}$. **B.** $I=\frac{\pi}{16}$. **C.** $I=\frac{\pi}{8}$. **D.** $I=\frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\sin^2 xdx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^2 2xdx=\frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4x)dx+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\sin^2 2xdx$

$=\left.\left(\frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{\sin^3 2x}{24}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{32}$.

Câu 134. Giá trị của tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 x+\cos^4 x)(\sin^6 x+\cos^6 x)dx$ là

A. $I=\frac{32}{128}\pi$. **B.** $I=\frac{33}{128}\pi$. **C.** $I=\frac{31}{128}\pi$. **D.** $I=\frac{30}{128}\pi$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $(\sin^4 x+\cos^4 x)(\sin^6 x+\cos^6 x)=\frac{33}{64}+\frac{7}{16}\cos 4x+\frac{3}{64}\cos 8x\Rightarrow I=\frac{33}{128}\pi$.

Câu 135. Giá trị của tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 4x}{\sqrt{\sin^6 x+\cos^6 x}}dx$ là

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Hướng dẫn giải

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 4x}{\sqrt{1-\frac{3}{4}\sin^2 2x}}dx$. Đặt $t=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\Rightarrow \mathrm{I}=\int_1^{\frac{1}{4}}\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt=\left.\frac{4}{3}\sqrt{t}\right|_{\frac{1}{4}}^{1}=\frac{2}{3}$.

Câu 136. Giá trị của tích phân $I=\int_0^{\pi}\frac{xdx}{\sin x+1}$ là

A. $I=\frac{\pi}{4}$. **B.** $I=\frac{\pi}{2}$. **C.** $I=\frac{\pi}{3}$. **D.** $I=\pi$.

Hướng dẫn giải

Đặt: $x=\pi-t\Rightarrow dx=-dt$ Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=\pi,\ x=\pi\Rightarrow t=0$

$\Rightarrow I=-\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)dt}{\sin(\pi-t)+1}=\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{\sin t+1}-\frac{t}{\sin t+1}\right)dt=\pi\int_0^{\pi}\frac{dt}{\sin t+1}-I\Rightarrow I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{dt}{\sin t+1}$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{dt}{\left(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)^2} = \frac{\pi}{4}\int_0^{\pi} \frac{dt}{\cos^2\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{d\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\pi}{2}\tan\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\pi} = \pi .$$

Tổng quát: $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$ **.**

Câu 137. Giá trị của tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2007} x}{\sin^{2007} x + \cos^{2007} x} dx$ là

A. $I = \frac{\pi}{2}$. **B.** $I = \frac{\pi}{4}$. **C.** $I = \frac{3\pi}{4}$. **D.** $I = \frac{5\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$. Vậy

$$I = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin^{2007}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin^{2007}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos^{2007}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2007} t}{\sin^{2007} t + \cos^{2007} t} dx = J \ (1).$$

Mặt khác $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $I = \frac{\pi}{4}$.

Tổng quát: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx = \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}^+$.

Câu 138. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{11} x dx$ là

A. $\frac{250}{693}$. **B.** $\frac{254}{693}$. **C.** $\frac{252}{693}$. **D.** $\frac{256}{693}$.

Hướng dẫn giải

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{11} x dx = \frac{10!!}{11!!} = \frac{2.4.6.8.10}{1.3.5.7.9.11} = \frac{256}{693}.$$

Câu 139. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx$ là

A. $\frac{67\pi}{512}$. **B.** $\frac{61\pi}{512}$. **C.** $\frac{63\pi}{512}$. **D.** $\frac{65\pi}{512}$.

Hướng dẫn giải

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx = \frac{9!!}{10!!}.\frac{\pi}{2} = \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}.\frac{\pi}{2} = \frac{63\pi}{512}$$

Công thức Walliss (dùng cho trắc nghiệm):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, \text{ neáu n leû} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}.\dfrac{\pi}{2}, \text{neáu n chaün} \end{cases}.$$

Trong đó: n!! đọc là **n walliss** và được định nghĩa dựa vào n lẻ hay chẵn.

Chẳng hạn:

$0!! = 1;\ 1!! = 1;\ 2!! = 2;\ 3!! = 1.3;\ 4!! = 2.4;\ 5!! = 1.3.5;$

$6!! = 2.4.6;\ 7!! = 1.3.5.7;\ 8!! = 2.4.6.8;\ 9!! = 1.3.5.7.9;\ 10!! = 2.4.6.8.10.$

Câu 140. Giá trị của tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$ là

A. $\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$. **B.** $\ln\left(\frac{e}{e+1}\right)$. **C.** $2\ln\left(\frac{e}{e+1}\right)$. **D.** $2\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$.

Hướng dẫn giải

Vì $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} \Rightarrow I = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{d\left(1+e^x\right)}{1+e^x} = 1 - \ln\left|1+e^x\right|\Big|_0^1 = 1 - \ln(1+e) + \ln 2 = \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$

Câu 141. Giá trị của tích phân $I = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x - 1}}$ là

A. $\frac{5}{3}$. **B.** $\frac{10}{3}$. **C.** $\frac{20}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \sqrt{e^x - 1} \Leftrightarrow t^2 = e^x - 1 \Rightarrow dx = \frac{2tdt}{e^x} \Rightarrow I = 2\int_1^2 \left(t^2+1\right)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} + t\right)\Big|_1^2 = \frac{20}{3}$

Câu 142. Giá trị của tích phân $I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$ là

A. $\frac{4-\pi}{3}$. **B.** $\frac{4-\pi}{2}$. **C.** $\frac{5-\pi}{3}$. **D.** $\frac{5-\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \sqrt{e^x - 1} \Rightarrow t^2 = e^x - 1 \Rightarrow 2tdt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{2tdt}{e^x} = \frac{2tdt}{t^2+1}$

$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{2t^2}{t^2+1}dt = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt = \frac{4-\pi}{2}$

Câu 143. Giá trị của tích phân $I = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^3}dx$ là

A. $2\sqrt{2} - 1$. **B.** $\sqrt{2} - 1$. **C.** $\sqrt{2} - 2$. **D.** $2\sqrt{2} - 2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \sqrt{e^x + 1} \Leftrightarrow t^2 = e^x + 1 \Leftrightarrow 2tdt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{2tdt}{e^x} \Rightarrow I = 2\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{tdt}{t^3} = -2.\frac{1}{t}\Big|_{\sqrt{2}}^2 = \sqrt{2} - 1$

Câu 144. Giá trị của tích phân $I = \int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$ là

A. $2\ln 3$. **B.** $\ln 3$. **C.** $\ln 2$. **D.** $2\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\ln x$; $x=e\Rightarrow t=1,\ x=e^2\Rightarrow t=2\ \Rightarrow I=\int\limits_1^2\frac{dt}{t}=\ln|t|\Big|_1^2=\ln 2$.

Câu 145. Giá trị của tích phân: $I=\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{e^{2x}dx}{e^x-1+\sqrt{e^x-2}}$ là

A. $2\ln 2-1$. **B.** 2ln3 – 1. **C.** $\ln 3-1$. **D.** $\ln 2-1$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt{e^x-2}$, Khi $x=\ ln2\Rightarrow t\ =\ 0$; $x=\ ln3\Rightarrow\ t=1; e^x\ =\ t^2+\ 2\Rightarrow\ e^x dx\ =\ 2tdt$

$$\mathrm{I}=2\int\limits_0^1\frac{(t^2+2)tdt}{t^2+t+1}\ =2\int\limits_0^1(t-1+\frac{2t+1}{t^2+t+1})dt\ =2\int\limits_0^1(t-1)dt\ +2\int\limits_0^1\frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1}$$

$$=(t^2-2t)\Big|_0^1\ +2\ln(t^2+t+1)\Big|_0^1=2\ln 3-1.$$

Câu 146. Cho $M=\int\limits_0^{\ln 2}\frac{2e^{3x}+e^{2x}-1}{e^{3x}+e^{2x}-e^x+1}dx$. Giá trị của e^M là

A. $\frac{7}{4}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{11}{4}$. **D.** $\frac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải

$$M=\int\limits_0^{\ln 2}\frac{2e^{3x}+e^{2x}-1}{e^{3x}+e^{2x}-e^x+1}dx=\int\limits_0^{\ln 2}\frac{3e^{3x}+2e^{2x}-e^x-(e^{3x}+e^{2x}-e^x+1)}{e^{3x}+e^{2x}-e^x+1}dx$$

$$=\int\limits_0^{\ln 2}\left(\frac{3e^{3x}+2e^{2x}-e^x}{e^{3x}+e^{2x}-e^x+1}-1\right)dx=\ln\left(e^{3x}+e^{2x}-e^x+1\right)\Big|_0^{\ln 2}-x\Big|_0^{\ln 2}=\ln\frac{11}{4}\Rightarrow e^M=\frac{11}{4}$$

Câu 147. $I=\int\limits_1^e\frac{\ln x\sqrt[3]{2+\ln^2 x}}{x}dx$.

A $\frac{3}{8}\left[\sqrt[3]{3^5}-\sqrt[3]{2^5}\right]$. **B.** $\frac{3}{8}\left[\sqrt[3]{3^5}-\sqrt[3]{2^4}\right]$. **C.** $\frac{3}{8}\left[\sqrt[3]{3^4}-\sqrt[3]{2^5}\right]$. **D.** $\frac{3}{8}\left[\sqrt[3]{3^4}-\sqrt[3]{2^4}\right]$.

Hướng dẫn giải

$$I=\int\limits_1^e\frac{\ln x\sqrt[3]{2+\ln^2 x}}{x}dx=\int\limits_1^e\ln x\sqrt[3]{2+\ln^2 x}d\left(\ln x\right)=\frac{1}{2}\int\limits_1^e\left(2+\ln^2 x\right)^{\frac{1}{3}}d\left(2+\ln^2 x\right)$$

$$=\frac{3}{8}.\sqrt[3]{\left(2+\ln^2 x\right)^4}\Big|_1^e=\frac{3}{8}\left[\sqrt[3]{3^4}-\sqrt[3]{2^4}\right]$$

Câu 148. Giá trị của tích phân $I=\int\limits_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$ là

A. $I=\frac{\pi}{8}\ln 3$. **B.** $I=\frac{\pi}{4}\ln 2$. **C.** $I=\frac{\pi}{8}\ln 3$. **D.** $I=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x=\tan t\Rightarrow dx=(1+\tan^2 t)dt$. Đổi biến: $x=0\Rightarrow t=0,\ x=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+\tan t)}{1+\tan^2 t}\left(1+\tan^2 t\right)dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt.$$

Đặt $t=\frac{\pi}{4}-u\Rightarrow dt=-du$; Đổi cận: $t=0\Rightarrow u=\frac{\pi}{4}$, $\mathrm{t}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow u=0$

$$\Rightarrow I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right]du$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\frac{1-\tan u}{1+\tan u}\right)du=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{2}{1+\tan u}\right)du=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2du-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\tan u\right)du=\frac{\pi}{4}\ln 2-I.$$

Vậy $I=\frac{\pi}{8}\ln 2$.

Câu 149. Cho hàm số *f(x)* liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa $f(-x)+2f(x)=\cos x$. Giá trị của tích phân $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ là

A. $I=\frac{1}{3}$. **B.** $I=\frac{4}{3}$. **C.** $I=\frac{2}{3}$. **D.** $I=1$.

Hướng dẫn giải

Xét tích phân $J=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx$. Đặt $x=-t\Rightarrow dx=-dt$.

Đổi cận: $x=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=-\frac{\pi}{2}$.

Suy ra: $J=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(t)dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt=I$.

Do đó: $3I=J+2I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[f(-x)+2f(x)\right]dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=2$.

Vậy $I=\frac{2}{3}$.

II. VẬN DỤNG CAO

Câu 150. Tìm hai số thực A,B sao cho $f(x)=A\sin\pi x+B$, biết rằng $f'(1)=2$ và $\int_0^2 f(x)dx=4$.

A. $\begin{cases}A=-2\\ B=-\frac{2}{\pi}\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}A=2\\ B=-\frac{2}{\pi}\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}A=-2\\ B=\frac{2}{\pi}\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}A=-\frac{2}{\pi}\\ B=2\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

$f(x)=A\sin\pi x+B\Rightarrow f'(x)=A\cos\pi x$

$f'(1)=2\Rightarrow A\pi\cos\pi=2\Rightarrow A=-\frac{2}{\pi}$

$\int_0^2 f(x)dx=4\Rightarrow\int_0^2(A\sin\pi x+B)dx=4\Rightarrow-\frac{A}{\pi}\cos 2\pi+2B+\frac{A}{\pi}\cos 0=4\Rightarrow B=2$

Câu 151. Giá trị của *a* để đẳng thức $\int_1^2\left[a^2+(4-4a)x+4x^3\right]dx=\int_2^4 2xdx$ là đẳng thức đúng

A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

$$12=\int_1^2\left[a^2+(4-4a)x+4x^3\right]dx=\left[a^2x+(2-2a)x^2+x^4\right]\Big|_1^2\Rightarrow a=3.$$

Câu 152. Giá trị của tích phân $I=\int_0^a\frac{dx}{x^2+a^2}\ (a>0)$ là

A. $\frac{\pi}{4a}$. **B.** $\frac{\pi^2}{4a}$. **C.** $-\frac{\pi^2}{4a}$. **D.** $-\frac{\pi}{4a}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $x=a\tan t;\ t\in\left(\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow dx=a(1+\tan^2 t)dt$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=a\Rightarrow t=\frac{\pi}{4}\end{cases}$.

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{a(1+\tan^2 t)}{a^2\tan^2 t+a^2}dt=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=\frac{\pi}{4a}$.

Câu 153. Giá trị của tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}dx$ là

A. $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{4\pi}{\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{-\pi}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$. Đổi cận : $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$.

Vậy $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}dx=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dt}{\sqrt{3-2t^2}}==\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dt}{\sqrt{\frac{3}{2}-t^2}}$.

Đặt $t=\sqrt{\frac{3}{2}}\cos u\quad\Rightarrow\quad dt=-\sqrt{\frac{3}{2}}\sin udu$. Đổi cận : $\begin{cases}t=0\to u=\frac{\pi}{2}\\ t=\frac{\sqrt{3}}{2}\to u=\frac{\pi}{4}\end{cases}$, suy ra

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dt}{\sqrt{\frac{3}{2}-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin udu}{\sqrt{\frac{3}{2}\left(1-\cos^2 u\right)}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}du=\frac{1}{\sqrt{2}}u\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

Câu 154. Cho $I=\int_x^1\frac{dt}{1+t^2}$. Tích phân nào sau đây có giá trị bằng với giá trị của tích phân đã cho.

A. $-\int_1^x\frac{dt}{1+t^2}$. **B.** $\int_1^x\frac{dt}{1+t^2}$. **C.** $\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{1+t^2}$. **D.** $-\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{1+t^2}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $u=\frac{1}{t}\Rightarrow t=\frac{1}{u}\Rightarrow dt=-\frac{1}{u^2}du$. Đổi cận $t=x\Rightarrow u=\frac{1}{x};t=1\Rightarrow u=1$

$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{-\frac{1}{u^2}du}{1+\frac{1}{u^2}} = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{-du}{u^2+1} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{du}{u^2+1} \Rightarrow \int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$$

Câu 155. Giá trị của tích phân $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x}\ln(\sin x)dx$ là

A $-\sqrt{3}\ln 2+\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$.

B. $\sqrt{3}\ln 2+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$.

C. $-\sqrt{3}\ln 2-\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$.

D. $-\sqrt{3}\ln 2+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases} u=\ln(\sin x) \Rightarrow du=\cot^2 x dx \\ dv=\frac{1}{\sin^2 x}dx \Rightarrow v=-\cot x \end{cases}$$

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x}\ln(\sin x)dx = -\cot x\ln(\sin x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^2 x dx$$

$$=\left(\sqrt{3}\ln\frac{1}{2}-\cot x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = -\sqrt{3}\ln 2+\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

Câu 156. Giá trị của tích phân $I=\int_0^2 \min\left\{1,x^2\right\}dx$ là

A. 4. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $-\frac{3}{4}$.

Hướng dẫn giải

Xét hiệu số $1-x^2$ trên đoạn $[0;2]$ để tìm $\min\left\{1,x^2\right\}$.

Vậy $I=\int_0^2 \min\left\{1,x^2\right\}dx = \int_0^1 x^2dx+\int_1^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + x\Big|_1^2 = \frac{4}{3}$.

Câu 157. Giá trị của tích phân $I=\int_{-8}^{-3} \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}dx$ là

A. $\ln\frac{2}{3}$. **B.** 2. **C.** $-\ln 2$. **D.** $2\ln 2$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\sqrt{1-x} \Rightarrow x=1-t^2 \Rightarrow dx=-2tdt$. Đổi cận $\begin{cases} x=-8 \Rightarrow t=3 \\ x=-3 \Rightarrow t=2 \end{cases}$.

Vậy $I=\int_{-8}^{-3} \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}dx = \int_3^2 \frac{-2tdt}{\left(1-t^2\right)t} = 2\int_2^3 \frac{tdt}{\left(1-t^2\right)t} = 2\int_2^3 \frac{dt}{1-t^2} = \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\Bigg|_2^3 = \ln\frac{2}{3}$.

Câu 158. Biết $I=\int_1^a \frac{x^3-2\ln x}{x^2}dx = \frac{1}{2}+\ln 2$. Giá trị của a là

A. 2. **B.** $\ln 2$. **C.** π. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

$$I=\int_1^a \frac{x^3-2\ln x}{x^2}dx=\frac{1}{2}+\ln 2=\int_1^a xdx-2\int_1^a \frac{\ln x}{x^2}dx=\frac{1}{2}+\ln 2$$

$$=\left(\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2}\right)-2\left(\frac{1}{a}\ln a+\frac{1}{a}-1\right)=\frac{1}{2}+\ln 2\Rightarrow a=2$$

HD casio: Nhập $\int_1^2 \frac{x^3-2\ln x}{x^2}dx-\frac{1}{2}-\ln 2=0$ nên $a=2$.

Câu 159. Cho $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{3\sin x+1}dx$, $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{(\sin x+2)^2}dx$. Khẳng định nào sau đây là **sai** ?

A. $I_1=\frac{14}{9}$. **B.** $I_1>I_2$. **B.** $I_2=2\ln\frac{3}{2}+\frac{3}{2}$. **D.** $I_2=2\ln\frac{3}{2}-\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sqrt{3\sin x+1}dx=\int_1^4\frac{\sqrt{t}}{3}dt=\frac{14}{9}$$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{(\sin x+2)^2}dx=2\int_2^3\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}\right)dt=2\ln\frac{3}{2}-\frac{2}{3}$$

Câu 160. Tất cả các giá trị của tham số m thỏa mãn $\int_0^m(2x+5)dx=6$ là

A. $m=1, m=-6$. **B.** $m=-1, m=-6$. **C.** $m=-1, m=6$. **D.** $m=1, m=6$.

Hướng dẫn giải

$$\int_0^m(2x+5)dx=6\Rightarrow (x^2+5x)\Big|_0^m=6\Rightarrow m^2+5m-6=0\Rightarrow m=1,\ m=-6.$$

Hướng dẫn casio: Thay $m=1$ và $m=-6$ vào thấy thỏa mãn.

Câu 161. Cho hàm số $h(x)=\frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}$. Tìm để $h(x)=\frac{a\cos x}{(2+\sin x)^2}+\frac{b\cos x}{2+\sin x}$ và tính $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}h(x)dx$

A. $a=-4,\ b=2;\ I=\frac{2}{3}+2\ln\frac{3}{2}$. **B.** $a=4,\ b=-2;\ I=-\frac{2}{3}-2\ln\frac{3}{2}$.

C. $a=2,\ b=4;\ I=-\frac{1}{3}+4\ln\frac{3}{2}$. **D.** $a=-2,\ b=4;\ I=\frac{1}{3}+4\ln\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Sử dụng đồng nhất thức, ta thấy

$$h(x)=\frac{a\cos x}{(2+\sin x)^2}+\frac{b\cos x}{2+\sin x}=\frac{a\cos x+b\cos x(2+\sin x)}{(2+\sin x)^2}=\frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}\Rightarrow\begin{cases}\frac{b}{2}=1\\ a+2b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-4\\ b=2\end{cases}.$$

Vậy $\int_0^{\frac{\pi}{2}}h(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{-4\cos x}{(2+\sin x)^2}+\frac{2\cos x}{2+\sin x}\right)dx=\left(-\frac{4}{2+\sin x}+2\ln|2+\sin x|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$=-\frac{4}{3}+2\ln 3+2-2\ln 2=\frac{2}{3}+2\ln\frac{3}{2}.$$

Câu 162. Giá trị trung bình của hàm số $y=f(x)$ trên $[a;b]$, kí hiệu là $m(f)$ được tính theo công thức $m(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Giá trị trung bình của hàm số $f(x)=\sin x$ trên $[0;\pi]$ là

A. $\frac{4}{\pi}$. **B.** $\frac{3}{\pi}$. **C.** $\frac{1}{\pi}$. **D.** $\frac{2}{\pi}$.

Hướng dẫn giải

$m(f)=\frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi}\sin xdx=\frac{2}{\pi}$.

Câu 163. Cho ba tích phân $I=\int_0^1\frac{dx}{3x+1}$, $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^4 x-\cos^4 x\right)dx$ và $K=\int_{-1}^2\left(x^2+3x+1\right)dx$. Tích phân nào có giá trị bằng $\frac{21}{2}$?

A. *K*. **B.** *I*. **C.** *J*. **D.** *J* và *K*.

Hướng dẫn giải

$I=\int_0^1\frac{dx}{3x+1}=\frac{1}{3}\ln|3x+1|\Big|_0^1=\frac{1}{4}\ln 4$

$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin^4 x-\cos^4 x\right)dx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx=\frac{1}{2}$

$K=\int_{-1}^2\left(x^2+3x+1\right)dx=\frac{21}{2}$.

Câu 164. Với $0<a<1$, giá trị của tích phân sau $\int_0^a\frac{dx}{x^2-3x+2}dx$ là:

A. $\ln\left|\frac{a-2}{2a-1}\right|$. **B.** $\ln\left|\frac{a-2}{a-1}\right|$. **C.** $\ln\left|\frac{a-2}{2(a-1)}\right|$. **D.** $\ln\left|\frac{a-2}{2a+1}\right|$.

Hướng dẫn giải

$\int_0^a\frac{dx}{x^2-3x+2}=\int_0^a\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}\right)dx=\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Big|_0^a=\ln\left|\frac{a-2}{a-1}\right|$

Câu 165. Cho $2\sqrt{3}m-\int_0^1\frac{4x^3}{(x^4+2)^2}dx=0$. Khi đó giá trị của $144m^2-1$ bằng

A. $\frac{-2}{3}$. **B.** $4\sqrt{3}-1$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

$2\sqrt{3}.m-\int_0^1\frac{d(x^4+2)}{(x^4+2)^2}=0\Leftrightarrow 2\sqrt{3}.m+\frac{1}{(x^4+2)}\Big|_0^1=0\Leftrightarrow 2\sqrt{3}m+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow m=\frac{1}{12\sqrt{3}}$.

Vậy $144m^2-1=144\left(\frac{1}{12\sqrt{3}}\right)^2-1=\frac{-2}{3}$.

Câu 166. Cho hàm số f liên tục trên đoạn $[a;b]$ và có đạo hàm liên tục trên $(a;b)$, đồng thời thỏa mãn $f(a)=f(b)$. Lựa chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. $\int_a^b f'(x).e^{f(x)}dx = 2$.

B. $\int_a^b f'(x).e^{f(x)}dx = 1$.

C. $\int_a^b f'(x).e^{f(x)}dx = -1$.

D. $\int_a^b f'(x).e^{f(x)}dx = 0$.

Hướng dẫn giải

$$\int_a^b e^{f(x)} f'(x)dx = \int_a^b e^{f(x)} d(f(x)) = e^{f(x)}\Big|_a^b = e^{f(b)} - e^{f(a)} = 0.$$

Câu 167. Kết quả phép tính tích phân $I = \int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$ có dạng $I = a\ln 3 + b\ln 5$ $(a, b \in \mathbb{Z})$. Khi đó $a^2 + ab + 3b^2$ có giá trị là

A. 1.

B. 5.

C. 0.

D. 4.

Hướng dẫn giải

Ta có $I = \int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}} = 2\int_2^4 \frac{1}{t^2-1}dt = \int_2^4 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt = 2\ln 3 - \ln 5$,

suy ra $a = 2, b = -1$. Vậy $a^2 + ab + 3b^2 = 4 - 2 + 3 = 5$.

Câu 168. Với $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x)^n \sin x dx$ có giá trị bằng

A. $\frac{1}{2n}$.

B. $\frac{1}{n-1}$.

C. $\frac{1}{n+1}$.

D. $\frac{1}{n}$.

Hướng dẫn giải

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x)^n \sin x dx = \int_0^1 t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Câu 169. Với $n \in \mathbb{N}, n > 1$, giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[n]{\sin x}}{\sqrt[n]{\cos x} + \sqrt[n]{\sin x}} dx$ là

A. $-\frac{\pi}{4}$.

B. $\frac{\pi}{4}$.

C. $\frac{3\pi}{4}$.

D. $-\frac{3\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dx = -dt$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[n]{\sin x}}{\sqrt[n]{\cos x} + \sqrt[n]{\sin x}} dx = 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

Câu 170. Giá trị của tích phân $\int_0^{2017\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx$ là

A. $3034\sqrt{2}$.

B. $-4043\sqrt{2}$.

C. $3043\sqrt{2}$.

D. $4034\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Do hàm số $f(x) = \sqrt{1-\cos 2x}$ là hàm liên tục và tuần hoàn với chu kì $T = \pi$ nên ta có

$$\int_0^T f(x)dx = \int_T^{2T} f(x)dx = \int_{2T}^{3T} f(x)dx = ... = \int_{(n-1)T}^{nT} f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{nT} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx + \int_T^{2T} f(x)dx + ... + \int_{(n-1)T}^{nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{2017\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx = 2017\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx = 2017\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sin x dx = 4034\sqrt{2}$$

Câu 171. Giá trị của tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{(1+\sin x)^{1+\cos x}}{1+\cos x}\right)dx$ là

A. $2\ln 3 - 1$. **B.** $-2\ln 2 - 1$. **C.** $2\ln 2 - 1$. **D.** $-2\ln 3 - 1$.

Hướng dẫn giải

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\ln(1+\sin x)^{1+\cos x} - \ln(1+\cos x)\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)\ln(1+\sin x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\cos x)dx$$

Đặt $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$. Đổi cận $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1+\cos x\right)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1+\sin t\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\sin x)dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)\ln(1+\sin x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ln(1+\sin x)dx = 2\ln 2 - 1$$

Câu 172. Có mấy giá trị của b thỏa mãn $\int_0^b (3x^2 - 12x + 11)dx = 6$

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

$$\int_0^b (3x^2 - 12x + 11)dx = \left(x^3 - 6x^2 + 11x\right)\Big|_0^b = b^3 - 6b^2 + 11b - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = 2 \\ b = 3 \end{array}\right..$$

Câu 173. Biết rằng $\int_0^b 6dx = 6$ và $\int_0^a xe^x dx = a$. Khi đó biểu thức $b^2 + a^3 + 3a^2 + 2a$ có giá trị bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

+Ta có $\int_0^b 6dx = 6 \Rightarrow b = 1$.

+Tính $\int_0^a xe^x dx$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$. Khi đó, $\int_0^a xe^x dx = xe^x\Big|_0^a - \int_0^a e^x dx = e^a - e^a + 1 = a \Rightarrow a = 1$.

Vậy $b^2 + a^3 + 3a^2 + 2a = 7$.

Câu 174. Biết rằng $\int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = A$, $\int_0^{b\pi} 2dx = B$ (với $a, b > 0$). Khi đó giá trị của biểu thức $4aA + \frac{B}{2b}$ bằng

A. 2π . **B.** π . **C.** 3π . **D.** 4π .

Hướng dẫn giải

+Tính $\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2}$

Đặt $t = a\tan x;\ a \in \left(\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = a(1+\tan^2 t)dt$

Đổi cận : $x = 0 \Rightarrow t = 0;\ x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$. Vậy $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a(1+\tan^2 t)}{a^2\tan^2 t + a^2}dt = \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{4a}$

+Tính: $\int_0^{b\pi} 2dx = 2b\pi$, suy ra $\frac{B}{2b} = \pi$.