Tìm tất cả các giá trị của tham số $m \neq 0$ sao cho tiếp tuyến của đồ thị $(C_m): y = mx^3 - (2m+1)x + m + 1$ tại giao điểm của nó với trục tung tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4 ?

LỜI GIẢI

- Ta có: $M = (C_m) \cap Oy : x = 0 \Rightarrow y = m+1 \Rightarrow M(0; m+1)$.
- Mà $y' = 3mx^2 - 2m - 1 \Rightarrow k = y'(0) = -2m - 1$ là hệ số góc tiếp tuyến tại điểm M và có phương trình

$\Delta : y = -(2m+1)x + m + 1 \qquad (i)$

- $\Delta \cap Ox = A$ thỏa $\begin{cases} y = 0 \\ y = -(2m+1)x + m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{m+1}{2m+1} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\dfrac{m+1}{2m+1}; 0\right)$

$\Delta \cap Oy = B$ thỏa $\begin{cases} x = 0 \\ y = -(2m+1)x + m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = m+1 \end{cases} \Rightarrow B(0; m+1)$.

$\Rightarrow OA = \left|\dfrac{m+1}{2m+1}\right|$, $OB = |m+1|$ với $m \neq -\dfrac{1}{2}$.

- Theo đề: $S_{\Delta AOB} = \dfrac{1}{2}.OA.OB = \dfrac{1}{2}.\left|\dfrac{m+1}{2m+1}\right|.|m+1| = 4$

$\Leftrightarrow (m+1)^2 = 8|2m+1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 16m + 8 = m^2 + 2m + 1 \\ 16m + 8 = -m^2 - 2m - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 7 \pm 2\sqrt{14} \\ m = -9 \pm 6\sqrt{2} \end{array}\right.$.

Tìm m để tiếp tuyến của $(C_m): y = x^3 + 3mx^2 + (m+1)x + 1$ tại điểm có hoành độ $x = -1$ đi qua điểm $A(1; 2)$?

LỜI GIẢI

Ta có: $y' = 3x^2 + 6mx + m + 1 \Rightarrow k = y'(-1) = 4 - 5m$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(-1; 2m-1)$ có dạng:

$d : y = (4 - 5m)(x+1) + 2m - 1$ và $A(1;2) \in d$ nên $\boxed{m = \dfrac{5}{8}}$.

Viết phương trình tiếp tuyến của $(C): y = \dfrac{2x-1}{x+1}$, biết rằng tiếp điểm của tiếp tuyến đó với (C) cách điểm $A(0;1)$ một khoảng $= 2$?

LỜI GIẢI

Gọi $M\left(x_o; \dfrac{2x_o - 1}{x_o + 1}\right), (x_o \neq -1)$ là tiếp điểm. Theo đề thì $MA = 2$ hay

$x_o^2+\left(\frac{2x_o-1}{x_o+1}-1\right)^2=4\Leftrightarrow x_o=0 \vee x_o=2$. Với $x_o=0\Rightarrow$ tiếp tuyến là $d_1:\boxed{y=3x-1}$ và với $x_o=2\Rightarrow d_2:\boxed{y=\frac{x}{3}+\frac{1}{3}}$.

Viết phương trình tiếp tuyến của $(C):y=\frac{x}{1-x}$ tại M, biết rằng tiếp tuyến đó cắt các trục tọa độ tại A và B sao cho M là trung điểm của AB ?

LỜI GIẢI

Gọi $M\left(m;\frac{m}{1-m}\right),(m\neq 1)$ là tiếp điểm. Phương trình tiếp tuyến tại M có

dạng $\Delta:x-(1-m)^2y-m^2=0$. Khi đó: $A(m^2;0)$ và $B\left(0;\frac{-m^2}{(1-m)^2}\right)$.

Để M là trung điểm của đoạn AB thì $m\neq 0;\ m^2=2m;\ -\frac{m^2}{(1-m)^2}=\frac{2m}{1-m}$

$\Leftrightarrow m=2$. Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $\Delta:\boxed{x-y-4=0}$.

Tìm m để đồ thị hàm số $(C_m):y=x^3-3mx+2$ có tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d:x+y+7=0$ góc α, biết $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{26}}$?

LỜI GIẢI

Gọi k là hệ số góc tiếp tuyến $\Rightarrow$ tiếp tuyến có vtpt $\overrightarrow{n_1}=(k;-1)$.

Đường thẳng $d:x+y+7=0$ có vtpt $\overrightarrow{n_2}=(1;1)$.

Theo đề $\cos\alpha=\cos\left(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right)=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{26}}=\frac{|k-1|}{\sqrt{2}.\sqrt{k^2+1}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=\frac{3}{2}\\k=\frac{2}{3}\end{array}\right.$.

YCBT $\Leftrightarrow$ ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l}y'=\frac{3}{2}\\y'=\frac{2}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-3m=\frac{3}{2}\\3x^2-3m=\frac{2}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=\frac{2m+1}{2}\\x^2=\frac{9m+2}{9}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{2m+1}{2}\geq 0\\\frac{9m+2}{9}\geq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\boxed{m\geq-\frac{1}{2}}.$$

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=\frac{2x-1}{x-1}$, biết rằng tiếp tuyến này cắt trục Ox, Oy lần lượt tại A, B thỏa: $OA=4OB$?

LỜI GIẢI

Giả sử tiếp tuyến d của (C) tại $M(x_o;y_o)\in(C)$ cắt Ox tại A, cắt Oy tại B

sao cho $OA=4OB$. Do ΔOAB vuông tại O nên $\tan A=\frac{OB}{OA}=\frac{1}{4}\Rightarrow$ hệ số góc của d bằng $\frac{1}{4}$ hoặc $-\frac{1}{4}$. Mà hệ số góc của d là: $y'(x_o)=-\frac{1}{(x_o-1)^2}<0$

$\Rightarrow -\frac{1}{(x_o-1)^2}=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow x_o=-1\Rightarrow y_o=\frac{3}{2}$ hoặc $x_o=3\Rightarrow y_o=\frac{5}{2}$.

Khi đó có hai tiếp tuyến là: $d: \boxed{y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}}$ hoặc $d: \boxed{y=-\frac{1}{4}x+\frac{13}{4}}$.

Tìm các điểm M trên đường thẳng $d: y=-2x+19$, biết rằng tiếp tuyến của đồ thị $(C): y=(x+2)(x-1)^2$ đi qua điểm M vuông góc với đường thẳng $d': x+9y-8=0$?

LỜI GIẢI

- Hàm số được viết lại: $y=x^3-3x+2$.
- Vì tiếp tuyến $\Delta\perp d': y=-\frac{1}{9}x+\frac{8}{9}$ nên $\Leftrightarrow k.\left(-\frac{1}{9}\right)=-1\Leftrightarrow k=9$.
- Gọi $M(x_o;y_o)\in(C)$ là tiếp điểm $\Rightarrow k=y'(x_o)=3x_o^2-3=9\Leftrightarrow x_o=\pm2$.
- Phương trình tiếp tuyến tại M có dạng: $\Delta: y=k(x-x_o)+x_o^3-3x_o+2$.

Hay $\Delta_1: y=9x-14$ hoặc $\Delta_2: y=9x+18$ là hai tiếp tuyến tại M.

- Khi đó, tọa độ điểm M là giao điểm của đường thẳng d và tiếp tuyến

$d\cap\Delta_1=M_1$ thỏa $\begin{cases}y=-2x+19\\y=9x-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=13\end{cases}\Rightarrow M_1(3;13)$.

$d\cap\Delta_2=M_2$ thỏa $\begin{cases}y=-2x+19\\y=9x+18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{11}\\y=\frac{207}{11}\end{cases}\Rightarrow M_2\left(\frac{1}{11};\frac{207}{11}\right)$.

- Vậy có hai điểm M là $M_1(3;13)$ hoặc $M_2\left(\frac{1}{11};\frac{207}{11}\right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Tìm các điểm $A, B\in(C): y=-x^3+3x$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau và $AB=4\sqrt{2}$?

LỜI GIẢI

Gọi $A(a;-a^3+3a), B(b;-b^3+3b)\in(C), (a\neq b)$.

Do tiếp tuyến tại A và B song song nhau nên $y'(a)=y'(b)$ hay

$\Leftrightarrow -3a^2+3=-3b^2+3 \Leftrightarrow a=-b$ (nhận) hoặc $a=b$ (loại).

Theo đề $\Rightarrow AB^2=32 \Leftrightarrow \begin{cases} ab=-4 \\ a=-b \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2;b=-2 \\ a=-2;b=2 \end{array}\right.$.

Vậy $A(2;-2),B(-2;2)$ hoặc $A(-2;2),B(2;-2)$ thì thỏa yêu cầu bài toán.

Tìm $M\in(C): y=x^3-3x+2$ để tiếp tuyến của (C) tại điểm M cắt đồ thị (C) tại điểm thức hai là N thỏa mãn $|x_M-x_N|=6$?

LỜI GIẢI

Gọi $M(a;a^3-3a+2)\in(C)$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm M:

$\Delta: y=(3a^2-3)(x-a)+a^3-3a+2$ hay $\Delta: y=(3a^2-3)x-2a^3+2$

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3x+2=(3a^2-3)x-2a^3+2$

$\Leftrightarrow (x-a)^2(x+2a)=0 \Leftrightarrow x=a \vee x=-2a \Rightarrow x_M=a;\ x_N=-2a$.

Theo đề: $|x_M-x_N|=6 \Leftrightarrow |a-(-2a)|=6 \Leftrightarrow |a|=2 \Rightarrow a=\pm 2$.

Vậy có hai điểm M thỏa yêu cầu bài toán: $\boxed{M(2;4) \vee M(-2;0)}$.

Tìm các điểm trên $(C): y=\dfrac{2x-3}{x+1}$, sao cho tiếp tuyến tại đó tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\dfrac{18}{5}$ (đvdt) ?

LỜI GIẢI

Gọi $M\left(x_o;\dfrac{2x_o-3}{x_o+1}\right)\in(C);(x_o\neq -1)$ và phương trình tiếp tuyến tại M:

$\Delta: y=\dfrac{5}{(x_o+1)^2}(x-x_o)+\dfrac{2x_o-3}{x_o+1}$ và $\Delta\cap Ox=A\left(\dfrac{7x_o^2-x_o-3}{5x_o};0\right)$

$\Delta\cap Oy=B\left(0;\dfrac{2x_o^2-6x_o-3}{(x_o+1)^2}\right)$. Do $S_{\Delta ABO}=\dfrac{18}{5}\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}AO.BO=\dfrac{18}{5}$

Giải phương trình này, sẽ tìm được $x_o \Rightarrow M$ cần tìm.

Tìm tọa độ điểm $M \in (C): y = \dfrac{2x-1}{x+1}$, sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất ?

LỜI GIẢI

Gọi $M\left(x_o; 2-\dfrac{3}{x_o+1}\right) \in (C), (x_o \neq -1)$. Khi đó tiếp tuyến tại M dạng

$\Delta: y = \dfrac{3}{(x_o+1)^2}(x-x_o) + 2 - \dfrac{3}{x_o+1}$. Khi đó khoảng cách từ $I(-1;2)$ đến tiếp tuyến là:

$$d(I;\Delta) = \frac{\left|3(-1-x_o) - 3(x_o+1)\right|}{\sqrt{9+(x_o+1)^4}} = \frac{6|x_o+1|}{\sqrt{9+(x_o+1)^4}}$$

Hay $d(I;\Delta) = \dfrac{6}{\sqrt{\dfrac{9}{(x_o+1)^2} + (x_o+1)^2}} \overset{\text{Cauchy}}{\leq} \sqrt{6}$ và $d_{max} = \sqrt{6}$ khi và chỉ khi

$$\frac{9}{(x_o+1)^2} = (x_o+1)^2 \Leftrightarrow (x_o+1)^2 = 3 \Leftrightarrow x_o = -1 \pm \sqrt{3}.$$

Vậy: $\boxed{M_1\left(-1+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3}\right)}$ hoặc $\boxed{M_2\left(-1-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}\right)}$ là hai điểm cần tìm