Câu 35. Chọn B.

Phương pháp tự luận

Gọi $A\left(x_A;-\frac{1}{3}x_A^3+x_A^2+3x_A-\frac{11}{3}\right)$, $B\left(x_B;-\frac{1}{3}x_B^3+x_B^2+3x_B-\frac{11}{3}\right)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua trục tung.

Ta có $\begin{cases} x_A+x_B=0 \\ y_A=y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=-x_A & (1) \\ -\frac{1}{3}x_A^3+x_A^2+3x_A-\frac{11}{3}=-\frac{1}{3}x_B^3+x_B^2+3x_B-\frac{11}{3} & (2) \end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$-\frac{1}{3}x_A^3+x_A^2+3x_A-\frac{11}{3}=-\frac{1}{3}(-x_A)^3+(-x_A)^2+3(-x_A)-\frac{11}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_A=-3 \Rightarrow x_B=3 \\ x_A=3 \quad \Rightarrow x_A=-3 \end{array}\right.$$

Vậy có hai cặp điểm cần tìm là $A\left(3;\frac{16}{3}\right)$, $B\left(-3;\frac{16}{3}\right)$.

Phương pháp trắc nghiệm

Kiểm tra điều kiện đối xứng qua trục tung $\begin{cases} x_A+x_B=0 \\ y_A=y_B \end{cases}$ và kiểm tra điểm có thuộc đồ thị không.

Câu 36. Chọn C.

Gọi $M\left(x_M, y_M\right), \left(x_M \neq -3\right)$ thỏa yêu cầu bài toán. Ta có:

$$\begin{cases} y_M=x_M+2+\dfrac{9}{x_M+3} \\ y_M=\pm x_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M=-\dfrac{15}{2} \\ y_M=-\dfrac{15}{2} \end{cases}.$$

Câu 37. Chọn C.

Gọi $M(x_0;y_0)$ với $x_0 \in \mathbb{Z}, y_0 \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{2}{x_0^2+2x_0+2} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x_0^2+2x_0+2 \in \{-2;-1;1;2\}$$

✍ $x_0^2+2x_0+2=-2$ (vô nghiệm) ✍

$x_0^2+2x_0+2=1 \Leftrightarrow x_0=-1 \Rightarrow y_0=2 \Rightarrow M(-1;2)$

$x_0^2+2x_0+2=-1$ (vô nghiệm)

$$x_0^2+2x_0+2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \Rightarrow y_0=1 \Rightarrow M(0;1) \\ x_0=-2 \Rightarrow y_0=1 \Rightarrow M(-2;1) \end{array}\right.$$

Vậy có trên đồ thị (C) có ba điểm có tọa độ là các số nguyên.

Câu 38. Chọn B.

Gọi $(x_0;y_0)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có $y_0=x_0^3-3(m-1)x_0^2-3mx_0+2, \forall m$

$$\Leftrightarrow 3(x_0^2+x_0)m+y_0-x_0^3-3x_0^2-2=0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2+x_0=0 \\ y_0-x_0^3-3x_0^2-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_0=0 \\ y_0=2 \end{cases}.$$

Suy ra $P(-1;4), Q(0;2)$ hoặc $P(0;2), Q(-1;4)$ nên $y_P+y_Q=6$.

Câu 39. Chọn C.

Gọi $M\left(x_0;\dfrac{2x_0-1}{x_0+1}\right)\in(C)$ với $x_0\neq-1$. Tiếp tuyến tại M có phương trình

$$y-\frac{2x_0-1}{x_0+1}=\frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)$$

hay $3x-(x_0+1)^2y+2x_0^2-2x_0-1=0$.

Khoảng cách từ $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến

$$d=\frac{\left|-3-2(x_0+1)^2+2x_0^2-2x_0-1\right|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6|x_0+1|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6}{\sqrt{\dfrac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}$$

.

Theo bất đẳng thức Côsi: $\dfrac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2\geq 2\sqrt{9}=6$, vậy $d\leq\sqrt{6}$. Khoảng cách d lớn nhất là $\sqrt{6}$ khi $\dfrac{9}{(x_0+1)^2}=(x_0+1)^2 \Leftrightarrow (x_0+1)^2=3 \Leftrightarrow x_0=-1\pm\sqrt{3}$.

Vậy : $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$, $M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$.

Câu 40. Chọn D.

Đồ thị hàm số (C_m) có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ khi và chỉ khi tồn tại $x_0 \neq 2$ và $x_0 \neq 0$ sao cho $y(x_0) = -y(-x_0)$

$\Leftrightarrow$ tồn tại $x_0 \neq 2$ và $x_0 \neq 0$ sao cho $\dfrac{x_0^2 - 4mx_0 + 5m}{x_0 - 2} = -\dfrac{(-x_0)^2 - 4m(-x_0) + 5m}{(-x_0) - 2}$

$\Leftrightarrow$ tồn tại $x_0 \neq 2$ và $x_0 \neq 0$ sao cho $(1-2m)x_0^2 + 5m = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m(1-2m) < 0 \\ (1-2m).4 + 5m \neq 0 \\ (1-2m).0 + 5m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ m \neq \dfrac{4}{3} \end{cases}.$$

Câu 41. Chọn D.

Lấy điểm $M\left(m; 2 + \dfrac{1}{m-2}\right) \in (C)$ với $m \neq 2$. Ta có $y'(m) = -\dfrac{1}{(m-2)^2}$.

Tiếp tuyến tại M có phương trình $d: y = -\dfrac{1}{(m-2)^2}(x-m) + 2 + \dfrac{1}{m-2}$.

Giao điểm của d với tiệm cận đứng là $A\left(2; 2 + \dfrac{2}{m-2}\right)$.

Giao điểm của d với tiệm cận ngang là $B(2m-2; 2)$.

Ta có $AB^2 = 4\left[(m-2)^2 + \dfrac{1}{(m-2)^2}\right] \geq 8$, suy ra $AB \geq 2\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $(m-2)^2 = 1$, nghĩa là $m = 3$ hoặc $m = -1$.

Câu 42. Chọn C.

Phương trình đường trung trực đoạn AB là $y = x$.

Những điểm thuộc đồ thị cách đều A và B có hoành độ là nghiệm của phương trình :

$$\frac{x+2}{2x-1} = x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right..$$

Hai điểm trên đồ thị thỏa yêu cầu bài toán là $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right); \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Câu 43. Chọn C.

Gọi $M\left(x;y\right)$ thuộc $\left(C\right)$, ta có

$$\overrightarrow{IM}=\left(x-1;y-4\right)\Rightarrow IM^2=\left(x-1\right)^2+\left(x+3+\frac{1}{x-1}-4\right)^2=\underbrace{\left(x-1\right)^2+\left(x-1+\frac{1}{x-1}\right)^2}_{g(x)}.$$

Mà

$$g(x)=\left(x-1\right)^2+\left(x-1\right)^2+\frac{1}{\left(x-1\right)^2}+2=2\left(x-1\right)^2+\frac{1}{\left(x-1\right)^2}+2\ge 2+2\sqrt{2}.$$

$\Rightarrow \min IM=\sqrt{2+2\sqrt{2}}$. Đạt được khi $2\left(x-1\right)^2=\frac{1}{\left(x-1\right)^2}\Leftrightarrow\left(x-1\right)^4=\frac{1}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\\x=1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\end{array}\right.$.

Câu 44. Chọn B.

Phương pháp tự luận

Gọi $M\left(x_M, 2-\frac{1}{x_M+1}\right)$ thuộc (C). Và MH, MK là khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng và tiệm cận ngang. Khi đó $MH=\left|x_M+1\right|$ và $MK=\left|\frac{1}{x_M+1}\right|$. Do đó

$$MH+MK=\left|x_M+1\right|+\frac{1}{\left|x_M+1\right|}\ge 2\ (Cauchy)$$

Suy ra $MH+MK$ bé nhất khi $\left(x_M+1\right)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_M=-2\Rightarrow y_M=3\\x_M=0\Rightarrow y_M=1\end{array}\right.$

Phương pháp trắc nghiệm

Cho đồ thị hàm số $\left(C\right): y=\frac{ax+b}{cx+d}$. Gọi M là điểm thuộc đồ thị hàm số, khi đó tổng khoảng cách từ M đến 2 tiệm cận có độ dài nhỏ nhất là $2\sqrt{\left|\frac{ad-bc}{c^2}\right|}$.

Câu 45. Chọn A.

Gọi A là điểm thuộc thuộc nhánh trái của đồ thị hàm số, nghĩa là $x_A<3\Rightarrow$ với số $\alpha>0$, đặt $x_A=3-\alpha$, suy ra $y_A=1+\frac{6}{x_A-3}=1+\frac{6}{3-\alpha-3}=1-\frac{6}{\alpha}\quad(1)$.

Tương tự gọi B là điểm thuộc nhánh phải, nghĩa là $x_B > 3 \Rightarrow$ với số $\beta > 0$, đặt $x_B = 3+\beta$, suy ra $y_B = 1+\dfrac{6}{x_B-3} = 1+\dfrac{6}{3+\beta-3} = 1+\dfrac{6}{\beta}$ $\quad (2)$.

Vậy $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = \left[(3+\beta)-(3-\alpha)\right]^2 + \left[\left(1+\dfrac{6}{\beta}\right)-\left(1-\dfrac{6}{\alpha}\right)\right]^2$

$$g(\alpha;\beta) = (\alpha+\beta)^2 + \left(\frac{6}{\alpha}+\frac{6}{\beta}\right)^2 = (\alpha+\beta)^2 + (6)^2(\alpha+\beta)^2\left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^2$$
$$= \left(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\right)\left(1+\frac{36}{\alpha^2\beta^2}\right)$$

Dùng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$g(\alpha;\beta) \ge (2\alpha\beta+2\alpha\beta)\left(1+\frac{36}{\alpha^2\beta^2}\right) = 4\alpha\beta + \frac{144}{\alpha\beta} \ge 2\sqrt{4.144} = 48.$$

Vậy $AB \ge \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \alpha = \beta \\ 144\alpha\beta = \dfrac{4}{\alpha\beta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ (\alpha\beta)^2 = \dfrac{1}{36} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{6}$$

Vậy độ dài AB ngắn nhất là $4\sqrt{3}$.

Câu 46. Chọn D.

Gọi $(x_0; y_0)$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có $y_0 = x_0^4 + mx_0^2 - m + 2016, \forall m \Leftrightarrow (x_0^2-1)m + x_0^4 - y_0 + 2016 = 0, \forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 1 = 0 \\ x_0^4 - y_0 + 2016 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2017 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 2017 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M(1;2017) \\ N(-1;2017) \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} M(-1;2017) \\ N(1;2017) \end{cases}.$$

Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng MN là $I(0;2017)$.

Câu 47. Chọn B.

Điểm M nằm trên trục Ox : $M(-2;0) \Rightarrow d_M = |-2| + 0 = 2$

Điểm M nằm trên trục tung : $d_M = 0 + \left|-\dfrac{2}{3}\right| = \dfrac{2}{3} < 2$

Xét những điểm M có hoành độ $|x| > \frac{2}{3} \Rightarrow d_M = |x| + |y| > \frac{2}{3}$.

Xét những điểm M có hoành độ thỏa mãn $|x| < \frac{2}{3}; y < -\frac{2}{3} \Rightarrow |y| > \frac{2}{3} (*)$

- Trường hợp : $0 \le x \le \frac{2}{3}$. Do (*) cho nên : $d_M = |x| + |y| > \frac{2}{3}$
- Trường hợp : $-\frac{2}{3} < x < 0; -\frac{2}{3} < y < 0 \Rightarrow d_M = -x - 1 - \frac{5}{x-3}; d'_M = -1 + \frac{5}{(x-3)^2}$

$d'_M = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 - \sqrt{5} \\ x = 3 + \sqrt{5} \end{array}\right.$. Khi lập bảng biến thiên ,ta thấy hàm số nghịch biến với mọi $x \in \left(-\frac{2}{3}; 0\right)$. Vậy $\min d_M = d_M(0) = \frac{2}{3}$.

Câu 48. Chọn D.

Điểm $M\left(0, \frac{3}{2}\right)$ nằm trên trục Oy. Khoảng cách từ M đến hai trục là $d = \frac{3}{2}$.

Xét những điểm M có hoành độ lớn hơn $\frac{3}{2} \Rightarrow d = |x| + |y| > \frac{3}{2}$.

Xét những điểm M có hoành độ nhỏ hơn $\frac{3}{2}$:

- Với $0 < x < \frac{3}{2} \Rightarrow y > \frac{3}{2} \Rightarrow d = |x| + |y| > \frac{3}{2}$
- Với $-\frac{3}{2} < x < 0; y > 0 \Rightarrow d = -x + x + 1 + \frac{1}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}; d' = -\frac{1}{(x+2)^2} < 0$.

Chứng tỏ hàm số nghịch biến. Suy ra $\min d = y(0) = \frac{3}{2}$.

Câu 49. Chọn B.

Gọi đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $d: y = \frac{1}{2}x - 3$ suy ra $\Delta: y = -2x + m$.

Giả sử Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Khi đó hoành độ của A, B là nghiệm của phương trình

$$\frac{x+4}{x-2} = -2x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 2 \\ \underbrace{2x^2 - (m+3)x + 2m + 4}_{h(x)} = 0 \end{cases}.$$

Điều kiện cần:

Để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt thì phương trình $h(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 2, tức là $\begin{cases}\Delta>0\\ h(2)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-10m-23>0\\ -6\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<5-4\sqrt{3}\\ m>5+4\sqrt{3}\end{array}\right.$ (*).

Điều kiện đủ:

Gọi I là trung điểm của AB, ta có:

$$\begin{cases}x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}\\ y_I=2x_I+m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_I=\dfrac{m+3}{4}\\ y_I=\dfrac{m+3}{2}+m\end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{m+3}{4};\dfrac{3m+3}{2}\right).$$

Để hai điểm A, B đối xứng nhau qua $d: x-2y-6=0$ khi $I\in d$ $\Leftrightarrow \dfrac{m+3}{4}-2.\dfrac{3m+3}{2}-6=0 \Leftrightarrow m=-3$ (thỏa điều kiện (*)).

Với $m=-3$ phương trình $h(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\Rightarrow y=-1\\ x=1\Rightarrow y=-5\end{array}\right.$

Vậy tọa hai điểm cần tìm là $(1;-5)$ và $(-1;-1)$.

Câu 50. Chọn A.

Gọi (x,y) là điểm cố định của họ đồ thị $(C_m): y=x^4+mx^2-m-1$, ta có

$$\begin{aligned}&y=x^4+mx^2-m-1, \forall m\\ &\Leftrightarrow (x^2-1)m+x^4-1-y=0, \forall m\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-1=0\\ x^4-1-y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}; \begin{cases}x=-1\\ y=0\end{cases}\end{aligned}$$

Vậy họ đồ thị có hai điểm cố định là $(-1;0),(1;0)$.

Câu 51. Chọn B.

Gọi $M(x_0;y_0)$ với $x_0\in\mathbb{N}, y_0\in\mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \begin{cases}x_0\in\mathbb{N}\\ y_0=\dfrac{1}{2}\left(x_0-6+\dfrac{8}{x_0+1}\right)\in\mathbb{N}\end{cases} \Rightarrow x_0+1\in\{-8;-4;-2;-1;1;2;4;8\} \Rightarrow x_0\in\{-9;-5;-3;-2;0;1;3;7\}$$

Do $x_0\in\mathbb{N}$ nên

✍ $x_0=0\Rightarrow y_0=1\Rightarrow M(0;1)$ ✍ $x_0=1\Rightarrow y_0=-\dfrac{1}{2}$ (loại)

✍ $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = -\frac{1}{2}$ (loại) ✍ $x_0 = 7 \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow M(7;1)$.

Câu 52. Chọn A.

Gọi $A(x_0; y_0)$, $x_0 > 0$ là điểm cố định cần tìm.

Ta có: $y_0 = -x_0^4 + 2mx_0^2 - 2m + 1, \forall m$

$$\Leftrightarrow 2m(x_0^2 - 1) + 1 - x_0^4 - y_0 = 0, \forall m \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 1 = 0 \\ 1 - x_0^4 - y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \ (x_0 > 0) \\ y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1;0)$$

Lại có $y' = -4x^3 + 4mx \Rightarrow y'(1) = 4m - 4$.

Phương trình tiếp tuyến của (C_m) tại điểm $A(1;0)$ có dạng $y = (4m-4)(x-1)$ hay $y = (4m-4)x + 4 - 4m$ (Δ).

Vì Δ song song với d nên $\begin{cases} 4m - 4 = 16 \\ 4 - 4m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m \neq 1 \end{cases} \Rightarrow m = 5.$

Câu 53. Chọn D.

Gọi $M\left(x, x + 2 + \frac{1}{x+2}\right) \in (C)$.

Khoảng cách từ M đến d là $h\left(M;d\right)$ cho bởi

$$h(M;d) = \frac{|3x + y + 6|}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\left|3x + 6 + x + 2 + \frac{1}{x+2}\right| = \frac{1}{\sqrt{10}}\left|4\left(x+2\right) + \frac{1}{x+2}\right|.$$

- Khi $x + 2 > 0$:

Ta có $4(x+2) + \frac{1}{x+2} \geq 4$ dấu bằng xảy ra khi $4(x+2) = \frac{1}{x+2} \Leftrightarrow \left(x+2\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

Vậy $h\left(M;d\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{4}{\sqrt{10}}$.

- Khi $x + 2 < 0$

  Ta có $-4\left(x+2\right) - \frac{1}{\left(x+2\right)} \geq 4$

  Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow -4\left(x+2\right) = -\frac{1}{x+2} \Leftrightarrow \left(x+2\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$.

Vậy $h\left(M;d\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\dfrac{4}{\sqrt{10}}$.

Câu 54. Chọn C.

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+1}{a-1}\right)\in\left(C\right)$ với $a\neq 1$ ta có $d=\left|a-1\right|+\left|\dfrac{a+1}{a-1}-1\right|=\left|a-1\right|+\dfrac{2}{\left|a-1\right|}\geq 2\sqrt{2}$.

Câu 55. Chọn B.

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+2}{a-2}\right)\in\left(C\right)$ với $a\neq 2$ ta có $\left|a-2\right|=\left|\dfrac{a+2}{a-2}-1\right|\Leftrightarrow\left|a-2\right|=\dfrac{4}{\left|a-2\right|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=4\end{array}\right.$

. Vậy $M\left(0;-1\right),M\left(4;3\right)$.

Câu 56. Chọn A.

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+3}{a-1}\right)\in\left(C\right)$ với $a\neq 1$ ta có $\left|a\right|=\left|\dfrac{a+3}{a-1}\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a^2-2a-3=0\\a^2+3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=3\end{array}\right.$. Vậy $M\left(-1;-1\right),M\left(3;3\right)$.

Câu 57. Chọn C.

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+2}{a-1}\right)\in\left(C\right)$ với $a\neq 1$ ta có

$$\frac{\left|a-\dfrac{a+2}{a-1}+1\right|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\frac{\left|a^2-a-3\right|}{\left|a-1\right|}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a^2-2a-2=0\\a^2-4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1+\sqrt{3}\\a=1-\sqrt{3}\\a=2\\a=-2\end{array}\right..$$

Vậy có hai điểm thỏa yêu cầu là $M\left(2;4\right);M\left(-2;0\right)$.

Câu 58. Chọn C.

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là điểm cố định của họ đồ thị $\left(C_m\right)$, ta có

$$\begin{aligned}&y_0=\left(m+2\right)x_0^3-3\left(m-2\right)x_0+m+7,\forall m\\&\Leftrightarrow\left(x_0^3-3x_0+1\right)m+2x_0^3+6x_0+7-y_0=0,\forall m\\&\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^3-3x_0+1=0\\2x_0^3+6x_0+7-y_0=0\end{cases}\end{aligned}$$

Vì hệ có 3 nghiệm phân biệt nên họ đồ thị có 3 điểm cố định.

Câu 59. Chọn B.

Gọi $M\left(x,y\right),N\left(-x,y\right)$ là hai điểm thuộc đồ thị $\left(C_m\right)$ đối xứng nhau qua trục tung. Ta có

$$x^3-(3m-1)x^2+2mx+m+1=-x^3-(3m-1)x^2-2mx+m+1$$
$$\Leftrightarrow 2x^3+4mx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=-2m \end{array}\right..$$

Vậy $m<0$.

Câu 60. Chọn B.

Ta có $y'=6x^2+2mx-12$. Điều kiện $\begin{cases}\Delta'>0 \\ S=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+72>0 \\ m=0\end{cases} \Leftrightarrow m=0$. Vậy $m=0$.

Câu 61. Chọn C.

Gọi $M\left(a,\dfrac{a+1}{a+2}\right)\in(C)$ với $a\neq -2$, ta có $|a|=\left|\dfrac{a+1}{a+2}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2+a-1=0 \\ a^2+3a+1=0\end{array}\right.$

Phương trình có 4 nghiệm nên trên đồ thị có 4 điểm cách đều hai trục tọa độ.

Câu 62. Chọn B.

Gọi $M\left(a,\dfrac{3a-5}{a-2}\right)\in(C)$ với $a\neq 2$ ta có $|a-2|=\left|\dfrac{3a-5}{a-2}-3\right| \Leftrightarrow (a-2)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=3\end{array}\right.$

. Vậy $M(1;1); N(3;4)$.

Câu 63. Chọn C.

Gọi $A\left(a,-a^3+3a+2\right), B\left(b,-b^3+3b+2\right)$ là hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua $M(-1;\ 3)$, ta có: $\begin{cases} a+b=-2 \\ -a^3+3a+2-b^3+3b+2=6\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-2 \\ (a+b)^3-3ab(a+b)-3(a+b)+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-2 \\ ab=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-2\end{cases} \vee \begin{cases} a=-2 \\ b=0\end{cases}$$

Câu 64. Chọn D.

Ta có $y=\dfrac{3-x}{x-1}=\dfrac{-x+1+2}{x-1}=-1+\dfrac{2}{x-1} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=2 \\ x-1=-2 \\ x-1=1 \\ x-1=-1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-1 \\ x=2 \\ x=0\end{array}\right..$

Vậy có 4 điểm thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 65. Chọn D.

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+1}{a-2}\right)\in(C)$ với $a\neq 2$. Ta có

$$d=|a-2|+\left|\frac{a+1}{a-2}-1\right|=|a-2|+\frac{3}{|a-2|}\geq 2\sqrt{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(a-2)^2=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2+\sqrt{3} \\ a=2-\sqrt{3} \end{array}\right.$. Vậy hai điểm đó là $\left(2+\sqrt{3};1+\sqrt{3}\right)$ và $\left(2-\sqrt{3};1-\sqrt{3}\right)$

Câu 66. Chọn D.

Tâm đối xứng của đồ thị là giao điểm của hai đường tiệm cận. Vậy điểm cần tìm là $M(-1;\ 3)$.

Câu 67. Chọn B.

Gọi $M\left(a;\dfrac{2a+1}{a-1}\right)\in(C)$ với $a\neq 1$.

Ta có $|a-1|=\left|\dfrac{2a+1}{a-1}\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2-2a+1=2a+1 \\ a^2-2a+1=-2a-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow a^2-4a=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=4 \end{array}\right.$

Vậy điểm cần tìm là: $M(0;-1), M(4;3)$.

Câu 68. Chọn A.

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+2}{a-2}\right)\in(C)$ với $a\neq 2$.

Ta có $5|a-2|=\left|\dfrac{a+2}{a-2}-1\right| \Leftrightarrow 5|a-2|=\dfrac{4}{|a-2|} \Leftrightarrow 5\left(a^2-4a+4\right)=4$.

$$\Leftrightarrow 5a^2-20a+16=0 \Leftrightarrow a=\frac{10\pm 2\sqrt{5}}{5}$$

Vậy có hai điểm cần tìm.