Bài 8:

a). $y=\tan^2\left(\sin\left(\cos^3 2x\right)\right)$ b). $y=\tan^3\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)^2$ c). $y=\sqrt{\cot\left(x^2+1\right)}$

d). $y=\frac{(x+1)^2}{(x-1)^3}$ e). $y=\tan 2x+\frac{2}{3}\tan^3 2x+\frac{1}{5}\tan^5 2x$

e). $y=4\sin.\cos 5x.\sin 6x$ f). $y=\cot^5\left[\cos^2\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2\right]$

LỜI GIẢI

a). $y=\tan^2\left(\sin\left(\cos^3 2x\right)\right)$. Đầu tiên áp dụng $\left(u^\alpha\right)'$ với $u=\tan\left(\sin\left(\cos^3 2x\right)\right)$

$$y'=2.\tan\left(\sin\left(\cos^3 2x\right)\right).\left(\tan\left(\sin\left(\cos^3 2x\right)\right)\right)'$$

Áp dụng $(\tan u)'$ với $u=\sin\left(\cos^2 2x\right)$

$$y'=2\tan\left(\sin\left(\cos^3 2x\right)\right).\left(1+\tan^2\left(\sin\left(\cos^3 2x\right)\right)\right).\left(\sin\left(\cos^3 2x\right)\right)'$$

Tính $\sin\left(\cos^3 2x\right)'$ áp dụng $(\sin u)'$ với $u=\cos^3 2x$

$$\left(\sin\left(\cos^3 2x\right)\right)'=\cos\left(\cos^3 2x\right).\left(\cos^3 2x\right)'=\cos\left(\cos^3 2x\right).3\cos^2 2x.(\cos 2x)'$$

$$=\cos\left(\cos^3 2x\right).(-6).\sin 2x.\cos^2 2x.$$

Vậy $y'=2\tan\left(\sin\left(\cos^3 2x\right)\right)\left[1+\tan^2\left(\sin\left(\cos^3 2x\right)\right)\right].\cos\left(\cos^3 2x\right).(-6).\sin 2x.\cos^2 2x.$

b). $y=\tan^3\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)^2$. Bước đầu tiên áp dụng $\left(u^\alpha\right)'$ với $u=\tan\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)^2$

$$y'=3\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)^2.\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)^2\right]'$$

Tính $\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)^2\right]'$ áp dụng $(\tan u)'$ với $u=\frac{\pi}{4}-2x$ được

$$2\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)'=-4\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$$

$$\Rightarrow y'=-12.\left(\frac{\pi}{4}-2x\right).\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)^2.\left(1+\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)^2\right)$$

c). $y=\sqrt{\cot\left(x^2+1\right)}$. Áp dụng $\left(\sqrt{u}\right)'$ với $u=\cot\left(x^2+1\right)$

$y'=\frac{1}{2\sqrt{\cot\left(x^2+1\right)}}.\left(\cot\left(x^2+1\right)\right)'$ áp dụng $(\cot u)'$ với $u=x^2+1$

$$\Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{\cot\left(x^2+1\right)}}.(-1).\left(1+\cot^2\left(x^2+1\right)\right).\left(x^2+1\right)'=\frac{-x\left(1+\cot^2\left(x^2+1\right)\right)}{2\sqrt{\cot\left(x^2+1\right)}}.$$

d). $y=\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^3}$. Áp dụng $\left(\dfrac{u}{v}\right)'$ được:

$$y'=\frac{\left[(x+1)^2\right]'.(x-1)^3-\left[(x-1)^3\right]'.(x+1)^2}{(x-1)^6}=\frac{2(x+1)(x-1)^3-3(x-1)^2.(x+1)^2}{(x-1)^6}$$

$$=\frac{(x+1)(x-1)^2(-x-5)}{(x-1)^6}=\frac{(x+1)(-x-5)}{(x-1)^4}.$$

e). $y=\tan 2x+\dfrac{2}{3}\tan^3 2x+\dfrac{1}{5}\tan^5 2x$

$$y'=(\tan 2x)'+\frac{2}{3}(\tan^3 2x)'+\frac{1}{5}(\tan^5 2x)'$$

Áp dụng $(u^\alpha)'$ với $u=\tan 2x$ và $(\tan u)'$ với $u=2x$ được:

$$y'=(\tan 2x)'+2\tan^2 2x.(\tan 2x)'+\tan^4 2x(\tan 2x)'$$

$$=(1+2\tan^2 2x+\tan^4 2x)(1+\tan^2 2x).(2x)'$$

$$=(1+\tan^2 2x)^2.(1+\tan^2 2x).2=2(1+\tan^2 2x)^3.$$

f). $y=4\sin.\cos 5x.\sin 6x$

Áp dụng công thức biến đổi tích thành tổng của lượng giác , rút gọn y:

$$y=2(\sin 6x-\sin 4x).\sin 6x=2\sin^2 6x-2\sin 6x.\sin 4x=1-\cos 12x-(\cos 2x+\cos 10x)$$

$$=1-\cos 12x-\cos 2x-\cos 10x=1+12\sin 2x+2\sin 2x+10\sin 10x.$$

g). $y=\cot^5\left[\cos^2\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^2\right]$

Bước đầu tiên áp dụng $(u^\alpha)'$ với $u=\cot\left[\cos^2\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^2\right]$

$$y'=5.\cot^4\left[\cos^2\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2\right].\cot\left[\cos^2\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2\right]'$$

Áp dụng $(\cot u)'$ với $u=\cos^2\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^2$

Vậy $\cot\left[\cos^2\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^2\right]'=-\left\{1+\cot^2\left[\cos^2\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^2\right]\right\}.\left[\cos^2\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^2\right]'$

Tính $\left[\cos^2\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^2\right]'$ áp dụng $(u^\alpha)'$ với $u=\cos\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^2$

$$\Rightarrow 2.\cos\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2.\left[\cos\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2\right]'$$

Tính $\left[\cos\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^2\right]'$ áp dụng $(\cos u)'$ với $u=\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)$ được:

$$-\sin\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2.\left[\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2\right]'$$

Tính $\left[\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2\right]'$ áp dụng $\left(u^\alpha\right)'$ với $u=\frac{x-3}{x+2}$ được:

$$2\left(\frac{x-3}{x+2}\right).\left(\frac{x-3}{x+2}\right)'=2.\left(\frac{x-3}{x-2}\right).\frac{5}{(x-2)^2}=\frac{10(x-3)}{(x-2)^3}$$

Vậy $y'=?$

Câu : Tính:

1). Cho $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}$. Tính $f'(-1)$.   2). Cho $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+x^2$. Tính $f'(1)$

3). Cho $f(x)=x^5+x^3-2x-3$. Tính $f'(1)+f'(-1)+4f(0)$

4). Cho $f(x)=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$. Tính $f'(0)$

LỜI GIẢI

1). Cho $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}$. Tính $f'(-1)$.

Bước đầu tiên tính đạo hàm sử dụng công thức $\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)'=\frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)'=-\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}-\frac{9}{x^4}\Rightarrow f'(1)=-1-4-9=-14$$

2). Cho $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+x^2$. Tính $f'(1)$

Ta có $f'(x)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+x^2\right)'=-\frac{1}{x^2}-\frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{x}+2x=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}+2x$

Vậy $f'(1)=-1-\frac{1}{2}+2=\frac{1}{2}$

3). Cho $f(x)=x^5+x^3-2x-3$. Tính $f'(1)+f'(-1)+4f(0)$

Ta có $f'(x)=\left(x^5+x^3-2x-3\right)'=5x^4+3x^2-2$

$f'(1)+f'(-1)+4f(0)=(5+3-2)+(5+3-2)+4.(-2)=4$

4). Cho $f(x)=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$. Tính $f'(0)$

$$f'(x)=\left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)'=\frac{x'\sqrt{4-x^2}-x\left(\sqrt{4-x^2}\right)'}{\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2}=\frac{\sqrt{4-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}}{\left(4-x^2\right)}=\frac{4}{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}}$$

Vậy $f'(0)=\frac{1}{4}$.

Cho $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x$. Với những giá trị nào của x thì:

a. $f'(x)=0$ b. $f'(x)=-2$ c. $f'(x)=10$

LỜI GIẢI

Ta có $f'(x)=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)=x^2+x-2$

a). $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-2$

b). $f'(x)=-2 \Leftrightarrow x^2+x-2=-2 \Leftrightarrow x^2+x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-1$

c). $f'(x)=10 \Leftrightarrow x^2+x-2=10 \Leftrightarrow x^2+x-12=0 \Leftrightarrow x=3 \vee x=-4$

Câu : Giải

a). Cho $f(x)=2x^3+x-\sqrt{2}, g(x)=3x^2+x+\sqrt{2}$. Giải bất phương trình $f'(x)>g'(x)$.

b).Cho $f(x)=2x^3-x^2+\sqrt{3}, g(x)=x^3+\frac{x^2}{2}-\sqrt{3}$. Giải bất phương trình $f'(x)>g'(x)$.

Cho $f(x)=3x+\frac{60}{x}-\frac{64}{x^3}+5$. Giải phương trình $f'(x)=0$

LỜI GIẢI

a). Ta có $f'(x)=\left(2x^3+x-\sqrt{2}\right)'=6x^2+1$, $g'(x)=\left(3x^2+x+\sqrt{2}\right)'=6x+1$

$f'(x)>g'(x) \Leftrightarrow 6x^2+1>6x+1 \Leftrightarrow 6x^2-6x>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$

b). $f'(x)=\left(2x^3-x^2+\sqrt{3}\right)'=6x^2-2x$, $g'(x)=\left(x^3+\frac{x^2}{2}-\sqrt{3}\right)'=3x^2+x$

$f'(x)>g'(x) \Leftrightarrow 6x^2-2x>3x^2+x \Leftrightarrow 3x^2-3x>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$

c). Ta có $f'(x)=\left(3x+\frac{60}{x}-\frac{64}{x^3}+5\right)'=3-\frac{60}{x^2}+\frac{192}{x^4}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3-\frac{60}{x^2}+\frac{192}{x^4}=0\ (1)$. Đặt $t=\frac{1}{x^2},(t>0)$

$(1) \Leftrightarrow 192t^2-60t+3=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{4} \vee t=\frac{1}{16}$

Với $t=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2$

Với $t=\frac{1}{16} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}=\frac{1}{16} \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x=\pm 4$

Vậy $f'(x)=0$ có 4 nghiệm $x=\pm 2$, $x=\pm 4$

Bài 10: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a). $y=3\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)-2\left(\sin^{6\pi} x+\cos^6 x\right)$

b). $y=\cos^4 x\left(2\cos^2 x-3\right)+\sin^4 x\left(2\sin^2 x-3\right)$

LỜI GIẢI

a). $y=3\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)-2\left(\sin^{6\pi} x+\cos^6 x\right)$

Ta có $y=3\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)-2\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\right)=1$

Vậy $y'=0$.

b). $y=\cos^4 x\left(2\cos^2 x-3\right)+\sin^4 x\left(2\sin^2 x-3\right)$

$y=2\cos^6 x-3\cos^4 x+2\sin^6 x-3\sin^4 x=2\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)-3\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)$

$=2\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\right)-3\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)=1$

$\Rightarrow y'=0.$

Bài 11: Chứng minh

a). Cho $y=\tan x$ chứng minh $y'-y^2-1=0$ $(*)$

b). $y=\cot 2x$ chứng minh : $y'+2y^2+2=0$ $(*)$

c). Cho $y=x\sin x$ chứng minh: $x.y-2\left(y'-\sin x\right)+x\left(2\cos x-y\right)=0$

d). Cho hàm số $y=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$. Chứng minh: $2\sqrt{1+x^2}.y'=y$ $(*)$

LỜI GIẢI

a). Cho $y=\tan x$ chứng minh $y'-y^2-1=0$ $(*)$

Ta có: $y'=\left(\tan x\right)'=1+\tan^2 x$

$(*)\Leftrightarrow 1+\tan^2 x-\tan^2 x-1=0$ (đúng) (đpcm).

b). $y=\cot 2x$ chứng minh : $y'+2y^2+2=0$ $(*)$

Ta có: $y'=\left(\cot 2x\right)'=-2\left(1+\cot^2 2x\right)$

$(*)\Leftrightarrow -2\left(1+\cot^2 2x\right)+2\cot^2 2x+2=0$ (đpcm).

c). $y=x\sin x$ chứng minh: $x.y-2\left(y'-\sin x\right)+x\left(2\cos x-y\right)=0$ $(*)$

Ta có: $y'=\left(x\sin x\right)'=x'.\sin x+x.\left(\sin x\right)'=\sin x+x\cos x.$

$(*)\Leftrightarrow x^2.\sin x-2\left(\sin x+x\cos x-\sin x\right)+x\left(2\cos x-x\sin x\right)=0$

$\Leftrightarrow x^2\sin x-2x\cos x+2x\cos x-x^2\sin x=0\Leftrightarrow 0=0$ (đpcm).

d). Cho hàm số $y=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$. Chứng minh: $2\sqrt{1+x^2}.y'=y$ $(*)$

Ta có: $y'=\left(\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}.\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}.\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}.\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{\sqrt{1+x^2}+x}}{2\sqrt{1+x^2}}.$

$(*)\Leftrightarrow 2\sqrt{1+x^2}.\frac{\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}\Leftrightarrow\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$ (đpcm).